Courbes paramétrées, Intégrales doubles

Exercice 1 — Pour $t \in D$, étudiez la courbe paramétrée définie par $t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^2$

1. $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ et $f(t) = \left(\dfrac{t^2+1}{t^2-1}, \dfrac{t^2}{t-1}\right)$;
2. $D = \mathbb{R}$ et $f(t) = (\cos t, \sin(t/3))$;
3. $D = \mathbb{R}$ et $f(t) = \left(\cos t, \dfrac{(\sin t)^2}{2+\sin(t)}\right)$;
4. $D = \mathbb{R}$ et $f(t) = \big(t+t^2, t-t^2\big)$.

Exercice 2 — Calculez l'aire du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 1 \quad , \quad x^2 \leq y \leq 4 - x^3\}$.

Exercice 3 — Soit un nombre $a > 1$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x \leq a \quad , \quad 0 \leq y \leq x\}$. Calculez $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2} dxdy$.

Exercice 4 — Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$. Montrez que D est un disque et calculez $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$.

Exercice 5 — Dans le plan yOz, on considère la branche d'hyperbole $\mathcal{C}$ définie par $yz = 1$ et $z > 0$, et on note $\mathcal{S}$ la surface de révolution obtenue en faisant tourner $\mathcal{C}$ autour de l'axe Oz.

1. Pour tout nombre $a > 1$, calculez le volume V_a limité par $\mathcal{S}$ et les plans $z = 1$ et $z = a$.
2. Montrer que V_a admet une limite lorsque a tend vers $+\infty$.

Exercice 6 — Soient a et b des nombres strictement positifs. Calculez l'intégrale double $\displaystyle\iint_D (x^2 - y^2) dxdy$ avec D le domaine borné délimité par l'ellipse d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.