Université Denis Diderot (Paris VII) **2005-2006**
CC4 **Groupe Concours**

Séries de Fourier

Exercice 1 — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par :
$f(x) = x$ si $x \in [0, \pi/2]$, $f(x) = \pi - x$ si $x \in [\pi/2, \pi]$, $f(x) = -f(-x)$ si $x \in [-\pi, 0]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Montrer que la série de Fourier de f converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le développement en série de Fourier de la primitive de f qui s'annule en 0.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

Exercice 2 — Calculer les coefficients de Fourier des fonctions suivantes :

1. f 2π-périodique définie par $f(x) = x/2$ pour tout $x \in]-\pi, \pi[$ et $f(\pi) = \pi/2$.
2. f 2π-périodique définie par $f(x) = \dfrac{1}{12}(\pi^2 x - x^3)$ pour tout $x \in]-\pi, \pi[$ et $f(\pi) = 0$.
3. f 2α-périodique définie par $f(x) = 1 - \dfrac{|x|}{\alpha}$ pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$ $(\alpha > 0)$.

Exercice 3 — Soit f la fonction périodique de période 2 définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = |\sin(\pi x)|$. Montrer que f est égale en tout point la somme d'une série trigonométrique que l'on déterminera.

Exercice 4 — Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \cosh(\alpha x)$ pour $x \in]-\pi, \pi]$ (avec $\alpha > 0$).

1. Calculer les coefficients de Fourier de f et étudier la convergence de la série de Fourier.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}$.
3. En utilisant la formule de Parseval calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + n^2)^2}$.
4. Déduire de ce qui précède les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \sinh(\alpha x)$ pour $x \in]-\pi, \pi]$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2}$.

Exercice 5 — Soit f une fonction continue par morceaux 2π-périodique et $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier.

1. Exprimer en fonction des c_n les coefficients de Fourier de la fonction $g(t) = f(t + a)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
2. Exprimer $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t + a) - f(t)|^2 \, dt$ en fonction des c_n.