Feuille 4
Séries entières

Exercice 1 — Calculer le rayon de convergence des séries entières de la forme $\sum a_n z^n$ lorsque la suite a_n est donnée par :
1) $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ 2) $a_n = \dfrac{1}{n!}$ 3) $a_n = 2^p$ si $n = 2p$ est pair et 0 sinon
4) $a_n = \dfrac{1}{n\pi^n}$ 5) $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$avec P et Q des polynômes non nuls.
6) $a_n = \dfrac{\ln n}{2^{3n-2}}$ 7) a_n est le n-ième terme du développement décimal de e

Exercice 2 — Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :
1) $\sum n^2 x^n \quad (n \geq 0)$ 2) $\sum \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} x^n \quad (n \geq 1)$ 3) $\sum \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n} \quad (n \geq 1)$
4) $\sum \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n} \quad (n \geq 1)$ 5) $\sum \frac{x^n}{1+2+\cdots+n} \quad (n \geq 1)$ 6) $\sum \frac{\sin(n\alpha)}{n!} x^n \quad (n \geq 0)$

Exercice 3 — Donner le développement en série entière de
1) e^{x^2-2x} en 1 2) $\arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ en 0 3) $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$ en 0
4) $\ln(x+a)$ en 0 5) $e^x \cos x$ en 0 6) $(\cos x)^3$ en 0
7) $\frac{1}{(1+x^2)(1-x)}$ en 0 8) $\int_0^x \frac{\arctan(t^2)}{t} dt$ en 0 9) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ en 0

Exercice 4 — Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} S(t)dt$ converge lorsque $x > 1$ avec $S(t) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} t^{2n+1}$, où $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq 1$.

Exercice 5 — Soit $a_n$une suite réelle convergeant vers a

1. Calculer le rayon de convergence de $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} e^{-t} f(t)$.

Exercice 6 — Soit a_n une suite complexe convergeant vers a. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Montrer que si la série $\sum a_n$ est absolument convergente, alors $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
2. Montrer que $f(x) = \dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n}$ avec $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, et en déduire une autre démonstration du résultat.

Exercice 7 — Montrer que la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $f(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ si $t > 0$ est de classe C^∞ mais pas développable en série entière en 0.

Exercice 8 — Pour tout $x \neq 1$, posons $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$.

1. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
   On note $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ce développement et R le rayon de convergence de $(\sum a_n x^n)$.
2. En calculant un produit de séries, montrer que $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
3. Montrer que $R \geq 1$ et que $f(x) = \sum a_n x^n$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
4. En raisonnant par l'absurde, montrer que $R = 1$.

Exercice 9 — On considère l'équation différentielle

$$(1 + x^2)y'' - 2y = 0. \tag{1}$$

1. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Montrer que f est solution de (1) si et seulement on si on a

$$a_{n+2} = -\frac{n-2}{n+2} a_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2. Montrer qu'il existe une unique fonction f solution de (1) telle que
   – f est développable en série entière au voisinage de 0,
   – $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.
   Calculer les coefficients et le rayon de convergence de la série entière obtenue.

Exercice 10 — Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ existe-t-il une fonction f non nulle développable en série entière au point 0, telle que $f'(x) = f(ax)$? Préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue.

Exercice 11 — Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ et } g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

1. Montrer que f est développable en série entière en 0 et que le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue est infini.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' - xy = 1$. En déduire le développement en série entière de f en 0.
3. Développer g en série entière sur $\mathbb{R}$. En déduire une expression de $\int_0^1 g(t)dt$ sous forme de somme d'une série numérique.
4. En écrivant $f(1)$ de deux manières, démontrer l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)} = \sqrt{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n \times (2n+1)}.$$