Université Denis Diderot (Paris VII) **2005-2006**
MI3 **Groupe Concours**

Feuille 5
Diagonalisation, Trigonalisation

Exercice 1 — Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le déterminant de la matrice $A - \lambda I_3$.
2. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme $f - \lambda\mathrm{id}$ est-il inversible ?
3. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et une base de $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$. Quelles sont les dimensions de ces sous-espaces ? Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
4. Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(f + \mathrm{id})$? Donner une base de ce sous-espace et montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(f + \mathrm{id})$.
5. Ecrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}).$$

Exercice 2 — Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la formule :

$$\forall\ x, y, z \in \mathbb{R} \quad f(x, y, z) = (2y + z, x - y - z, 2x - z).$$

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer le déterminant de A.
   Quel est le rang de f ?
2. On pose $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, -1, 2)$ et $w = (-1, 1, 1)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice B de f dans cette base.
3. Donner une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = B$.
   Calculer P^{-1} et vérifier la formule $P^{-1}AP = B$.

Exercice 3 — Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de f.
2. Notons P le sous-espace propre de $\mathbb{R}^3$ pour la valeur propre 1.
   (a) Quelle est la dimension de P ?
   (b) Trouver une équation de P.
3. Considérons les vecteurs $u_1 = (3, -2, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ et $u_3 = (-1, 1, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Quelle est la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3).
4. Calculer le polynôme caractéristique de f.
5. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 4 — Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 12 & 11 & 5 \\ -10 & -9 & -4 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de f.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.
3. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f. Posons $v = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que $(v, f(v), f^2(v))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de f dans cette base.
4. Quel est le rang de f ?
5. Trouver une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exercice 5 — Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f.
2. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 6 — Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & 3 \\ -1 & -16 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 — Soit m un nombre réel. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & m+1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & -m-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f.
2. On suppose $m \neq 2$ et $m \neq -1$. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.
3. On suppose $m = 2$.
   (a) Quelles sont les valeurs propres de f ?
   (b) Montrer que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.
4. On suppose $m = -1$.
   (a) Quelles sont les valeurs propres de f ?
   (b) Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.
   (c) Trouver une base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.
   (d) Quelle est la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) ?

Exercice 8 — Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ -1 & 1 & a-1 \\ a-1 & 0 & 2a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 1$.

Exercice 9 — Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 4. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de $\mathbb{C}$. On note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de f.
2. Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f, et écrire la matrice de f dans cette base.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 — Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est triangulaire supérieure.
4. Calculer $(A - 2I_3)^2$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 — Soient a un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3a \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f. Montrer que 1 est valeur propre de f.
2. On suppose que $a \neq 1$.
   (a) Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a > 1$.
   (b) Lorsque $a > 1$, l'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. On suppose que $a = 1$.
   (a) Trouver une base de chaque sous-espace propre.
   (b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
   (c) Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
   (d) Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 — Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant les deux propriétés suivantes :
- la seule valeur propre de f est 1,
- le sous-espace propre $P = E_1(f)$ est de dimension 2.

1. Soit u un vecteur quelconque de P. Que vaut $f(u)$?
2. Soit (u_1, u_2) une base de P et u_3 un vecteur de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à P.
   (a) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \text{où } a,\ b,\ c \text{ sont des nombres réels.}$$

   (c) Exprimer le polynôme caractéristique de f à l'aide de c. En déduire que $c = 1$.
3. Montrer que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.
4. Soit v_3 un vecteur n'appartenant pas à P. On pose $v_2 = f(v_3) - v_3$.
   (a) Montrer que le vecteur v_2 est non nul et appartient à P.
   (b) Montrer qu'il existe un vecteur $v_1 \in P$ tel que (v_1, v_2, v_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Quelle est la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) ?

Exercice 13 — Soit n un entier positif, et soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

1. Soit P un élément de E. Montrer que $(X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P' \in E$.
2. Soit f l'application de E définie par $f(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E, et écrire sa matrice dans la base $(1, X, \cdots, X^n)$.
   (b) Déterminer les valeurs propres de f.

Exercice 14 — Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une matrice inversible $P \in M_2(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.
3. Calculer A^n pour tout entier naturel n.
4. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites (u_n) à termes réels telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_n + \tfrac{3}{2}\, u_{n+1}.$$

   (a) Soit (u_n) une suite à termes réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \binom{u_n}{u_{n+1}}$. Montrer que (u_n) appartient à E si et seulement si $X_{n+1} = AX_n$ pour tout n.
   (b) Quelle est la dimension de E ? Trouver une base de E.
   (c) Soit F le sous-espace vectoriel de E formé des suites $(u_n) \in E$ telles que la série $(\sum u_n)$ est convergente. Quelle est la dimension de F ?

Exercice 15 — Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites (u_n) de nombres réels telles que

$$u_{n+2} = (1 + a)u_{n+1} - au_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que la matrice A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de a les suites des coefficients de la matrice A^n sont-elles bornées ? convergentes ?
4. Trouver une base du sous-espace vectoriel F des suites bornées de E.

Exercice 16 — Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Cherchons les matrices $B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $B^3 = A$.

1. Déterminer les valeurs propres de A et une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique, et $g \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^3 = f$. Montrer que $g \circ f = f \circ g$. En déduire que les vecteurs propres de f sont aussi des vecteurs propres pour g. Quelles possibilités a-t-on pour les valeurs propres associées ?
3. Résoudre l'équation $B^3 = A$ dans $M_n(\mathbb{C})$. Calculer la somme et le produit des solutions.