Université Denis Diderot (Paris VII) **2005-2006**
MI3 **Groupe Concours**

Feuille 7
Formes quadratiques

Exercice 1 — Déterminer, pour les formes quadratiques suivantes, les formes bilinéaires symétriques associées, et donner les matrices dans la base canonique.

- $q_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_1(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$.
- $q_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_2(x, y, z) = 2xy - y^2 + 5yz + 3z^2$.
- $q_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_3(x, y, z) = 3x^2 - 6xy + 4xz - 8y^2 + 5yz$.
- $q_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_4(x, y, z) = 2(x + y - z)^2 - (y - 2z)^2 - (2x + y)^2$.
- $q_5 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_5(x, y, z, t) = z^2 - 3yt + xz + 3xt - 2xy + t^2 - 2yz + 6tz - x^2$.

Exercice 2 —
Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$q(x, y, z) = 2x^2 - z^2 + 4xy \qquad \text{pour tout vecteur } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et expliciter sa forme bilinéaire symétrique associée φ.
2. Ecrire la matrice M_φ de φ dans la base canonique.
3. Soient l_1, l_2 et l_3 les formes linéaires définies sur $\mathbb{R}^3$ par

$$l_1(x, y, z) = x + y \qquad l_2(x, y, z) = y \qquad l_3(x, y, z) = z.$$

(a) Montrer que ces formes linéaires sont linéairement indépendantes.

(b) Montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} l_1(x, y, z) = a \\ l_2(x, y, z) = b \\ l_3(x, y, z) = c \end{cases}$ a une unique solution.

(c) Exprimer la forme quadratique q à l'aide des carrés des formes linéaires l_1, l_2 et l_3.

(d) Montrer qu'il existe une base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\begin{cases} l_1(u_1) = 1 \\ l_2(u_1) = 0 \\ l_3(u_1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1(u_2) = 0 \\ l_2(u_2) = 1 \\ l_3(u_2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1(u_3) = 0 \\ l_2(u_3) = 0 \\ l_3(u_3) = 1. \end{cases}$$

Quelle est la matrice M'_φ de φ dans la base (u_1, u_2, u_3) ?

(e) Déterminer une matrice P telle que $M'_\varphi = {}^tPM_\varphi P$.

Exercice 3 — Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par :

$$q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6yz \qquad \text{pour tout vecteur } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Décomposer la forme quadratique q en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.
2. Montrer que pour tout $u \neq 0$ dans $\mathbb{R}^3$ on a $q(u) > 0$.
3. Soit A la matrice de q dans la base canonique. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$.

Exercice 4 — Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \qquad \text{pour tout vecteur } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Ecrire la matrice de q dans la base canonique.
2. Montrer que q est une forme quadratique dégénérée et trouver une base du noyau de q.
3. Trouver une base orthogonale pour q. Quelle est la matrice de q dans cette base ?

Exercice 5 — Soit a un nombre réel. Soit $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x,y,z,t) = a(z^2 - x^2) - y^2 + 2axy + 6zt \qquad \text{pour tout vecteur } (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4.$$

1. Pour quelles valeurs de a la forme quadratique est-elle non dégénérée ?
2. On suppose que q est dégénérée. Trouver une base orthogonale pour q.

Exercice 6 — Soit a un nombre réel, et soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x,y,z) = a(x^2 + y^2 + z^2) - 2xy + 2xz + 2yz \text{ pour tout vecteur } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Pour quelles valeurs de a la forme quadratique est-elle non dégénérée ?
2. On suppose que $a = 0$. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $v = (2,2,1)$. Trouver une base de $D^\perp$. Les sous-espaces vectoriels D et $D^\perp$ sont-ils supplémentaires ?
3. Montrer que la forme quadratique q est définie positive si et seulement si $a > 2$.
4. On suppose que $a = 4$. Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $9x - y + 6z = 0$. Trouver une base de $P^\perp$.

Exercice 7 — Soit a un nombre réel, et soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x,y,z) = a^2x^2 + 4xy + xz + yz \text{ pour tout vecteur } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Déterminer la signature de q.
2. Soit $q' : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q'(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$. Pour quelles valeurs de a existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bijective telle que $q = q' \circ f$. Dans ce cas, expliciter f.

Exercice 8 — Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une matrice U de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tUAU$.

Exercice 9 — Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x,y,z) = 4x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy - 2yz \text{ pour tout vecteur } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Trouver le noyau, une base orthogonale, et écrire la matrice de q dans la base trouvée.

Exercice 10 — Calculer la signature des formes quadratiques suivantes :

- $q_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz$
- $q_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_2(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 - z^2 - 8xz$
- $q_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_3(x,y,z) = x^2 - 3y^2 - 2xy + 4xz$
- $q_4 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_4(x,y,z,t) = xy + xz + xt + yz + yt + zt$
- $q_5 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_5(x,y,z,t) = xy + xz + xt - yz + yt + 2zt$

Exercice 11 — Soient q_1 et q_2 les formes quadratiques définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$q_1(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{et} \quad q_2(x,y) = 7x^2 + 6xy + 2y^2 \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ qui est à la fois orthonormée pour q_1 et orthogonale pour q_2.

Exercice 12 — Soit a un nombre réel. Calculer la signature des formes quadratiques suivantes :
- $q_1 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_1(x,y,z,t) = x^2 + y^2 - at^2 + 2axy + 4zt$.
- $q_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_2(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - 2t^2 - 2xy + 2xz - 2xt + 2yz - 4ayt$.

Exercice 13 — Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x,y,z) = x^2 + 11y^2 + 6z^2 - 6xy + 2xz - 2yz \qquad \text{pour tout vecteur } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que la forme quadratique q est définie positive.
2. Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 0$.
   (a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus P^\perp$.
   (b) Quelle est la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P, c'est-à-dire de la projection sur P parallèlement à $P^\perp$?

Exercice 14 — Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2xz - yz \qquad \text{pour tout vecteur } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ tels que $q_{|F}$ est définie positive, $q_{|G}$ est définie négative, et $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. Trouver une base d'un tel sous-espace vectoriel F et d'un tel sous-espace vectoriel G.
3. Soit l la forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par $l(x,y,z) = x + y + z$. Montrer qu'il existe un unique vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $l(u) = B(u,v)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, où B est la forme bilinéaire symétrique associée à q. Déterminer v.

Exercice 15 — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 2. Soient q une forme quadratique non dégénérée sur E et B sa forme bilinéaire symétrique associée. On suppose qu'il existe un vecteur u non nul de E tel que $q(u) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur de E tel que $B(u,v) = 1$.
2. Soit $v \in E$ tel que $B(u,v) = 1$. Montrer qu'il existe un nombre réel λ tel que l'on ait $B(u, v+\lambda u) = 1$ et $q(v + \lambda u) = 0$.
3. Soit $v \in E$ tel que $B(u,v) = 1$ et $q(v) = 0$.
   (a) Montrer que les vecteurs u et v sont linéairement indépendants.
   (b) Soit P le plan de E engendré par u et v. Montrer que $E = P \oplus P^\perp$.

Exercice 16 — Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et φ une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. Soit E un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. Pour tout $(u, v) : inE^2$, on pose

$$f(u, v) = \int_I u(t)v(t)\varphi(t)dt \ .$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur E. Déterminer la forme quadratique associée à f.
2. On suppose désormais que E est l'ensemble des foncions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et que $I = [-1, 1]$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E dans chacun des cas suivants.

$$a)\ \varphi(t) = 1 \ \ ; \ \ b)\ \varphi(t) = t \ \ ; \ \ c)\ \varphi(t) = |t| \ .$$

Exercice 17 — On rappelle que la *trace* d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille n. On définit $f : E \times E \to \mathbb{R}$ par $f(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY)$.

1. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur E.
2. On suppose désormais que $n = 2$. On pose :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

   Montrer que (A_1, A_2, A_3, A_4) est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 18 — Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E.

1. Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $q \in \mathcal{Q}(E)$.Montrer que $q \circ \varphi \in \mathcal{Q}(E)$. On suppose que dans une base $\mathcal{B}$ de E, φ est représenté par la matrice B et q par la matrice A. Quelle est la matrice de $q \circ \varphi$ dans la base $\mathcal{B}$?
2. Soient $q, q' \in \mathcal{Q}(E)^2$. On dit que q' est *équivalente* à q s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $q' = q \circ \varphi$. Montrer que pour toutes formes quadratiques q_1, q_2, q_3 dans $\mathcal{Q}(E)$, on ales propriétés suivantes :
   (a) q_1 est équivalente à elle-même ;
   (b) Si q_1 est équivalente à q_2, alors q_2 est équivalente à q_1 ;
   (c) Si q_1 est équivalente à q_2 et q_2 est équivalente à q_3, alors q_1 est équivalente à q_3.
3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $E = \mathbb{C}^2$. Montrer que toute forme quadratique sur E est équivalente à l'une des trois formes suivantes ;

$$q_0(x, y) = 0 \ \ , \ \ q_1(x, y) = x^2 \ \ , \ \ q_2(x, y) = x^2 + y^2 \ \ .$$

4. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que $E = \mathbb{R}^2$. Montrer que toute forme quadratique sur E est équivalente à l'une des six formes suivantes ;

$$q_0 = 0 \ , \ q_{1,+} = x^2 \ , \ q_{1,-} = -x^2 \ , \ q_{2,+} = x^2 + y^2 \ , \ q_{2,-} = -x^2 - y^2 \ , \ q_2 = x^2 - y^2 \ .$$