Feuille 8
Topologie des espaces vectoriels normés

Sauf précision contraire, $\mathbb{R}^n$ est muni d'une des trois normes usuelles.

Exercice 1 — On considère l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $N(x, y) = \max(|2x + y|, |x + 2y|)$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\|u\|_\infty \leq N(u) \leq 2\|u\|_1$, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$.
3. Montrer que les normes $\| - \|_\infty$, N et $\| - \|_1$ sont équivalentes.

Exercice 2 — Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On considère l'application N de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$N\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \max(|x| + |y|, |z| + |t|)\,.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Sur E, on considère les normes définies par

$$N_\infty\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \max(|x|, |y|, |z|, |t|)\,,\ N_1\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = |x| + |y| + |z| + |t|\,.$$

   Montrer que $N_\infty(A) \leq N(A) \leq N_1(A)$, pour tout $A \in E$; en déduire que la norme N est équivalente à N_∞ et N_1.
3. Vérifier que

$$N(AB) \leq N(A)N(B)\,,$$

   pour tous A et B, éléments de E. Donner un exemple de matrices A et B pour lesquelles on a $N(AB) < N(A)N(B)$.

Exercice 3 — Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose

$$N_\infty(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad , \quad N_1(f) = \int_0^1 |f(x)|\,dx \quad , \quad N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} .$$

1. Montrer que N_∞, N_1 et N_2 sont des normes sur E.
2. Montrer que $N_1(f) \leq N_2(f) \leq N_\infty(f)$, pour tout $f \in E$.
3. Montrer que $N_1(f) = N_2(f)$ si seulement si f est une constante ; montrer que $N_2(f) = N_\infty(f)$ si seulement si f est une constante.
4. Soit f une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, telle que $f(x) = 0$, pour $x \geq 1$. Pour tout entier $k \geq 1$, on définit $f_k \in E$ par $f_k(x) = f(kx)$, pour tout $x \in [0, 1]$. Calculer les nombres $N_\infty(f_k), N_2(f_k), N_1(f_k)$. En déduire que les normes N_∞, N_2 et N_1 ne sont pas équivalentes entre elles.

Exercice 4 — Soit C la courbe plane donnée par l'équation polaire $\rho = \dfrac{1}{e^{-\theta} + 1}$, autrement dit

$$C = \{\, (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\ :\ \rho = \frac{1}{e^{-\theta} + 1}\,,\ \theta \in \mathbb{R}\}\,.$$

Montrer que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point d'accumulation de C si et seulement si (x, y) satisfait l'une des conditions suivantes :

- $(x,y) \in C$,
- $x^2+y^2=1$,
- $(x,y)=(0,0)$.

(Pour faire cet exercice, il pourra être utile de tracer la courbe C).

Exercice 5 — Pour chacune des fonctions f_j suivantes :

1. déterminer le plus grand sous-ensemble A_j de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f_j est définie ;
2. discuter l'existence et la valeur de la limite de f_j au point (a,b) donné.

$$f_1(x,y)=\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad f_2(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \quad , \quad (a,b)=(0,0)\,;$$

$$f_3(x,y)=\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|} \quad , \quad f_5(x,y)=\frac{\sin x-\sin y}{x-y} \quad , \quad (a,b)=(1,1)\,.$$

Exercice 6 — Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$ et soient les ensembles

$$S_1=\{\,(x,y)\ :\ 0<|y|<x^2\,\} \quad , \quad S_2=\{\,(x,y)\ :\ x^2\leq |y|\,,\, y\neq 0\,\}\,.$$

1. Calculer les limites en $(0,0)$ des fonctions
$$f_1=f|_{S_1}\,,\, f_2=f|_{S_2}\,.$$
2. En déduire la limite de f en $(0,0)$.

Exercice 7 — On pose $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,(\log|x|)\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1. Montrer qu'on définit ainsi une fonction f sur l'ensemble $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
2. Soit $b \in \mathbb{R}$. Calculer la limite de f en $(0,b)$.

Exercice 8 —

On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$A_1=\{\,(x,y)\ :\ 1-xy>0\,\} \quad , A_2=\{\,(x,y)\ :\ 1-xy\geq 0\,\} \quad , A_3=\{\,(x,y)\ :\ xy=1\,\mathrm{et}\,x>0\,\}\,,$$

$$A_4=\{\,(x,y)\ :\ xy=1\,\mathrm{et}\,x>-1\,\} \quad , \quad A_5=\{\,(x,y)\ :\ (y-2x+1)(y-x+2)\leq 0\,\}\,,$$

$$A_6=\{\,(x,y)\ :\ x^2+my^2\leq 1\,\} \quad (\text{discuter suivant}\, m\in\mathbb{R})\,,$$

$$A_7=\{\,\left(1+\frac{1}{n}\cos n\,,-1+\frac{1}{n}\sin n\right)\ :\ n\in\mathbb{N}^*\,\}\,.$$

Pour chacun d'eux : dire s'il est ouvert, fermé, borné, compact.

Exercice 9 — Soit (x_k) une suite convergente dans $\mathbb{R}^n$ et soit $l=\lim_{k\to+\infty}x_k$. On pose $A=\{x_k\ :\ k\geq 0\}\cup\{l\}$. Montrer que A est compact.

Exercice 10 — Trouver des fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et des parties A de $\mathbb{R}$ telles que

1. A est ouvert et $f(A)$ n'est pas ouvert,
2. A est fermé et $f(A)$ n'est pas fermé,
3. A est compact et $f^{-1}(A)$ n'est pas compact.