UNIVERSITÉ Pierre et Marie CURIE - PARIS VI

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité
MATHÉMATIQUES

Feuilletages et résidu non commutatif longitudinal

par

Stéphane Vassout

Thèse soutenue le 6 décembre 2001 devant le jury composé de :

M. Alain Connes Président
M. Ryszard Nest Rapporteur
M. Paolo Piazza Rapporteur
M. Gilles Pisier
M. Jean Renault
M. Georges Skandalis Directeur

A mes parents

Remerciements

Je souhaite en premier lieu exprimer ma reconnaissance à Alain Connes, Gilles Pisier et Jean Renault qui ont accepté de faire partie de mon jury de thèse, et à Ryszard Nest et Paolo Piazza, qui ont bien voulu en être les rapporteurs et se déplacer pour assister à ma soutenance.

Sur les conseils avisés de Marc Rosso qui avait guidé mes premiers pas en géométrie non commutative à l'Ecole Polytechnique, j'ai eu la chance de pouvoir travailler sous la direction de Georges Skandalis pendant mon année de DEA et ma thèse. Il m'a proposé des sujets de recherche d'un très grand intérêt mathématique, a répondu avec beaucoup de patience et de gentillesse à mes questions et a su m'encourager à la rigueur en relisant les épreuves de cette thèse ; j'ai pu bénéficier de son savoir mathématique (non mesurable) tout autant que de ses qualités humaines (malgré une scandaleuse propension à ne pas reconnaitre sa juste valeur à l'équipe de l'OM).
Il m'a en outre permis de m'intégrer dans l'équipe parisienne d'Algèbres d'Opérateurs, et plus largement dans la grande famille française des algébristes d'opérateurs qui m'ont chaleureusement accueilli.

Mon cadre de travail pendant ces années a été exceptionnel scientifiquement et humainement. J'ai eu la possibilité de participer à de nombreuses reprises à des séminaires et conférences grâce au soutien de l'équipe, du GdR Algèbres d'Opérateurs, et de l'Institut de Mathématiques de Jussieu.

Nous avons cheminé de concert avec Frédéric Cadet, sur les routes ardues mais généreuses de la science, échangeant régulièrement nos problèmes et nos questions. Benoit Collins, Stéphane Damaville, Franck Lesieur, Roland Vergnioux, Yi-Jun Yao, Claire Debord, François Pierrot, Raphaël Ponge et Kroum Tzanev ont accepté de se joindre à nous pour élargir le cercle de nos connaissances lors d'un séminaire hebdomadaire, qui fut aussi riche et utile qu'agréable. Je souhaite également remercier Claire Anantharaman-Delaroche, Saad Baaj, Moulay Benameur, Etienne Blanchard, Thierry Fack, Pierre-Yves Le Gall, Jean-Marie Lescure, Bertrand Monthubert et Jean Renault, qui par leurs remarques et leurs conseils ont contribué directement à mon travail. L'ambiance excellente du plateau des doctorants de Chevaleret m'en fit un des habitués réguliers. En particulier, les occupants du bureau 7C14, Myss-Ham, Pedro, Patrick, Mathieu, Chu, Evelia, Roland et Frédéric ont supporté avec mansuétude et bonne humeur mes sarcasmes et ma musique et ont bien gagné le droit à un peu de calme !

J'envoie également un clin d'oeil à Frédéric Jean, Luc Joseph et Emmanuel Royer qui ont embrassé la voie des mathématiques avec moi, et surtout à François Martin, ami et complice de tous les instants, relecteur critique et attentif, et qui a accepté, en outre, de me servir de relais administratif, sacrifice dont je connais le prix.

Je ne saurais terminer ces remerciements sans dire que cette thèse n'aurait sans doute pas vu le jour sans le soutien, les encouragements et la compréhension sans faille de Sonia.

Le secret de l'industrie moderne, c'est l'utilisation intelligente des résidus.

Roy Lewis, *Pourquoi j'ai mangé mon père*

Le feuilletage consiste à travailler la pâte (détrempe) en lui incorporant du beurre par la technique du "tourage", c'est à dire en la pliant sur elle-même et en l'applatissant au rouleau un certain nombre de fois, tout en la laissant reposer entre chaque opération. Plus on fait de tours, plus les "feuillets" sont gonflés et nombreux.

Larousse Gastronomique

Table des matières

Introduction

Ce travail de thèse porte sur la définition et l'étude des propriétés d'un résidu de Wodzicki pour les variétés feuilletées compactes mesurées. Pour arriver à ce but, les outils de la théorie des algèbres d'opérateurs sont utilisés de manière essentielle, dans l'esprit de la géométrie non commutative, développée par Alain Connes.

Le résidu de Wodzicki (appelé aussi résidu non commutatif) d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété compacte de dimension n a été introduit en 1985 par Mariusz Wodzicki [Wod87], après des travaux d'Adler, Guillemin et Manin [Kas89]. Le résidu non commutatif a de nombreuses applications à des domaines très variés.

- C'est un instrument analytique très puissant pour étudier la théorie spectrale des opérateurs pseudo-différentiels, la fonction ζ d'opérateur [Wod82, Wod84] et le développement du noyau de l'opérateur de la chaleur [Sch99, Lot92a, Gil95].
- Il permet de calculer des invariants toplogiques ou géométriques pour les variétés : invariants de Novikov-Shubin [GI00b, GI00a], invariants eta [Mel95, LP00, Wod84, Lot92b],...
- Il est également devenu un élément important de la géométrie non commutative [Co94, CL92, Co88b]. Un théorème démontré en 1988 par Connes [Co88a] établit, par exemple, l'égalité (à un coefficient multiplicatif près) entre la trace de Dixmier d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-n$ et le résidu non commutatif de cet opérateur, et étend ainsi la définition de la trace de Dixmier à l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre entier. De même, ce résidu non commutatif a permis à Connes et Moscovici de formuler le théorème de l'indice local, de manière abstraite [CM95, Co81].

Le but de cette thèse est de généraliser le résidu non commutatif au cas des opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux sur une variété feuilletée compacte munie d'une mesure transverse invariante. Avant de proposer un plan détaillé de ce travail, introduisons en quelques mots le résidu de Wodzicki et les feuilletages mesurés (vus comme objets de la géométrie non commutative).

Commençons par énoncer cinq propriétés qui caractérisent le résidu de Wodzicki d'un opérateur P sur une variété compacte M de dimension n. [Sch99] :

1. C'est un objet local : il est donné par l'intégration d'une densité sur la variété ne dépendant que du symbole d'ordre $-n$.
2. Il est donné par le coefficient logarithmique de l'expansion asymptotique du noyau de Schwartz de l'opérateur au voisinage de la diagonale.
3. C'est un objet globalement défini : c'est le résidu de la fonction méromorphe définie par $z \mapsto \frac{1}{\mathrm{ord} A} Tr(PA^{-z})$, où A est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m elliptique

admettant des puissances complexes (on peut se limiter au cas d'un opérateur différentiel positif inversible).

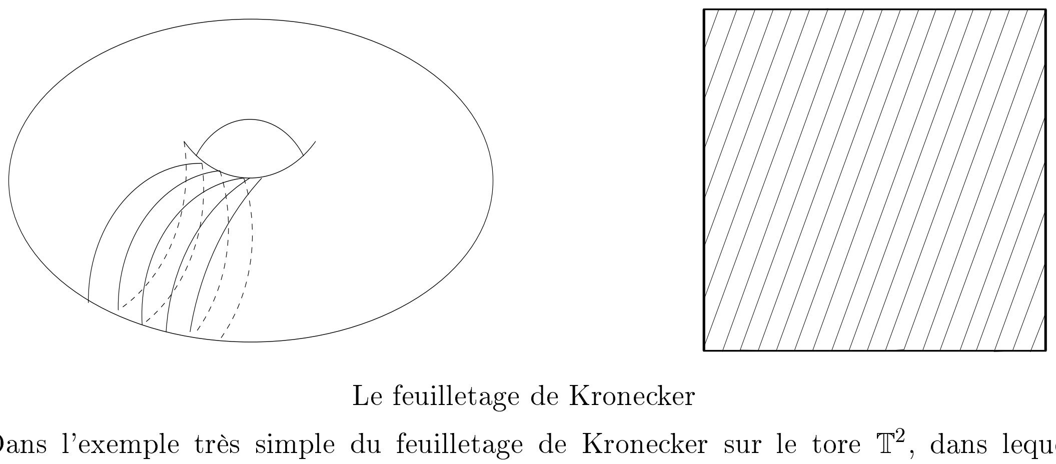
4. Il s'exprime également en termes des coefficients du développement asymptotique du noyau de l'opérateur de la chaleur Pe^{tA}, associé à un opérateur A admettant des puissances complexes, lorsque t tend vers 0.
5. Enfin, il définit une trace résiduelle sur l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre entier ; si la variété considérée est connexe et de dimension $n \geq 2$, c'est l'unique trace (à constante multiplicative près) sur l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre entier.

Ce résidu a été l'objet d'études et de généralisations récentes.

- Kontsevich et Vishik [KV95] ont généralisé l'utilisation de fonctions holomorphes d'opérateurs et utilisé le résidu non commutatif pour définir une notion de déterminant généralisé.
- Fedosov, Golse, Leichtnam et Schrohe [FGLS96] ont défini un résidu de Wodzicki pour les opérateurs pseudo-différentiels de l'algèbre de Boutet de Monvel pour une variété à bords.
- Lesch [Les99] et Schrohe [Sch97a, Sch97b] ont étendu la définition aux cas de variétés avec des singularités coniques et à des opérateurs pseudo-différentiels avec des symboles comportant des termes logarithmiques.
- Raphaël Ponge [Pon00] a défini le résidu non commutatif pour les variétés de Heisenberg.

Introduisons maintenant brièvement un cadre approprié pour développer un résidu non commutatif feuilleté : celui développé par Connes pour les feuilletages mesurés.

Un des premiers exemples concrets de la géométrie non commutative a été fourni par l'étude des feuilletages. Etant donnée une variété lisse compacte M munie d'un feuilletage régulier $\mathcal{F}$ et d'une mesure transverse μ, le but est d'étudier l'espace-quotient $M/\mathcal{F}$, qui est en général un espace singulier.



Le feuilletage de Kronecker

Dans l'exemple très simple du feuilletage de Kronecker sur le tore $\mathbb{T}^2$, dans lequel le feuilletage $\mathcal{F}_\theta$ est défini sur le tore par des feuilles de dimension 1 difféomorphes à $\mathbb{R}$ qui s'enroulent sur le tore selon un angle θ tel que $\theta/2\pi$ soit irrationnel, le feuilletage est ergodique. L'espace quotient est donc un espace singulier : toute fonction continue passant au quotient est presque partout constante, puisqu'elle est constante sur chaque feuille ; par continuité, elle est donc constante. Ainsi, l'algèbre des fonctions continues sur $\mathbb{T}^2/\mathcal{F}_\theta$ est réduite à l'algèbre $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Pour comprendre ces objets quotients, Connes a défini, en 1978 [Co79], la C*-algèbre réduite et l'algèbre de Von Neumann correspondant à un feuilletage, en utilisant le groupoïde d'holonomie associé à un feuilletage. Cette relation établie entre feuilletages et algèbres d'opérateurs non commutatives a permis d'exhiber des exemples très variés d'algèbres de von Neumann et a fourni des exemples intéressants de C*-algèbres de groupoïdes. Cette construction continue de nourrir la géométrie non commutative et a été récemment généralisée par Claire Debord [Deb00] au cas des feuilletages singuliers. Les algèbres non commutatives des feuilletages ont été étudiées en détail, notamment par Fack, Hilsum et Skandalis [FS82a, FS82b, FS80, HS83], et ont permis de relier certaines propriétés géométriques des feuilletages aux propriétés de leurs algèbres d'opérateurs. Connes a notammment développé un calcul pseudo-différentiel longitudinal sur le feuilletage qui lui permet en particulier de généraliser aux feuilletages le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer [Co79, Co82, CS81, CS84]. Ce calcul pseudo-différentiel est un cas particulier du calcul pseudo-différentiel sur un groupoïde défini par Bertrand Monthubert [Mon98] (et simultanément par Nistor, Weinstein, Xu [NWX99]). Il sera l'un des objets principaux de cette étude et sera décrit, dans le cadre des C*-modules hilbertiens définis par Rieffel et Kasparov [Lan95]. Comme dans les travaux de Saad Baaj [BJ83, Baa88a, Baa88b], les opérateurs pseudo-différentiels seront vus comme des opérateurs entre des C*-modules hilbertiens.

Donnons à présent un plan plus détaillé des chapitres composant cette thèse et de leur contenu. Les trois premiers chapitres sont essentiellement des chapitres de rappel, tandis que les deux derniers présentent les résultats originaux. Ce texte comporte également deux appendices. Dans le premier, on donne la démonstration, fournie par G. Skandalis, d'une propriété C*-algébrique utilisée dans le chapitre 1. Dans le second on rappelle sans démonstration l'essentiel de la théorie des opérateurs sur les C*-modules hilbertiens sur la base d'un cours de DEA dispensé par G. Skandalis [Ska96]. Nous donnons également la preuve de deux lemmes sur les opérateurs réguliers utilisés dans le chapitre 4.

Chapitre 1 Ce premier chapitre introduit les notions essentielles sur les feuilletages qui seront utilisées par la suite.

Après avoir donné plusieurs définitions classiques et équivalentes d'un feuilletage, on rappelle la notion d'holonomie, et la définition du groupoïde d'holonomie d'un feuilletage.

On aborde ensuite l'aspect mesuré du feuilletage, en rappelant les notions de mesures longitudinales (appelées fonctions généralisées par Connes) et de mesures transverses. Comme nous aborderons le cas de mesures longitudinales de classe C^k, il sera utile d'avoir non seulement des mesures transverses, mais également des distributions transverses invariantes par holonomie. Nous relierons cette notion à une définition équivalente en termes de courants, celle de courant fermé feuilleté.

Pour finir on rappelle les définitions des C*-algèbres réduites et maximales pour le feuilletage, et la construction d'une trace sur la C*-algèbre réduite du feuilletage à partir de la donnée d'une mesure transverse invariante par holonomie.

Chapitre 2 Ce second chapitre présente la théorie classique du résidu de Wodzicki pour les opérateurs pseudo-différentiels sur une variété compacte. Après un rappel de la théorie usuelle des opérateurs pseudo-différentiels, nous explicitons les cinq caractérisations possibles du résidu de Wodzicki évoquées plus haut et nous les relions entre elles, en reprenant les travaux précédents sur le sujet [KV95, Kas89, Sch99, Pon96, Wod87]. Nous rappelons également la définition des puissances complexes d'un opérateur différentiel, dans le cadre des opérateurs pseudo-différentiels à paramètre construit par Shubin [Shu87].

Chapitre 3 Ce troisième chapitre revient sur la définition proposée par Connes pour le calcul pseudo-différentiel longitudinal sur un feuilletage $(M, \mathcal{F})$, avec M une variété compacte. On rappelle dans ce cadre la notion de famille de classe C^k ($k \geq 0$) d'opérateurs pseudo-différentiels sur une fibration triviale, et l'équivalence démontrée dans [Co79] entre les deux définitions possibles pour un opérateur pseudo-différentiel longitudinal à support compact : la formulation globale, comme G-opérateur pseudo-différentiel G-équivariant sur le groupoïde équivaut à la formulation locale, comme somme de familles d'opérateurs à support compact sur des ouverts trivialisants et d'opérateurs régularisants à support compact.

Après avoir montré, comme dans [Co79], l'existence de parametrix pour les opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux elliptiques à support compact, on étudie les propriétés de régularité des opérateurs pseudo-différentiels à support compact en utilisant la théorie des C*-modules hilbertiens. On rappelle notamment la généralisation de la proposition (VIII.1) de [Co79] formulée par Monthubert et Pierrot [MP97] : les opérateurs pseudo-différentiels à support compact d'ordre strictement négatif sur le feuilletage définissent des éléments de la C*-algèbre, tandis que les opérateurs d'ordre 0 définissent des multiplicateurs bornés.

On s'intéresse ensuite à la régularité des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques d'ordre positif à support compact et on montre que ces opérateurs définissent des opérateurs réguliers (au sens de Baaj) sur la C*-algèbre. L'image d'un opérateur régulier par une représentation non dégénérée étant un opérateur régulier, ceci implique toutes les propriétés classiques des opérateurs elliptiques considérés comme agissant sur les sections L^2 d'un fibré sur le feuilletage.

Chapitre 4 Grâce à l'approche du chapitre précédent en termes d'opérateurs non bornés sur des C*-modules, nous définissons les puissances complexes d'un opérateur A différentiel longitudinal à support compact strictement positif en utilisant le calcul fonctionnel pour les opérateurs réguliers et le calcul pseudo-différentiel à paramètre de Shubin vu au chapitre 2.

Nous montrons que A^s s'écrit comme somme

$$A^s = B(s) + R(s)$$

d'une famille holomorphe $B(s)$ d'opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux à support compact et d'une famille holomorphe $R(s)$ d'éléments de la C*-algèbre, telle que pour tout opérateur P pseudo-différentiel à support compact, $PR(s)$ et $R(s)P$ sont des familles holomorphes d'éléments de la C*-algèbre.

Ceci nous permet de définir, pour tout opérateur P pseudo-différentiel de classe C^k d'ordre $m > 0$ elliptique à support compact, et tout $s \in \mathbb{R}$, des modules de Sobolev tangentiels $H^s_\tau(P)$ comme des C*-modules hilbertiens sur la C*-algèbre du feuilletage. Le module $H^s_\tau(P)$ est défini comme complétion du domaine d'un opérateur régulier $(1 + P^*P)^{s/2m}$ dans le C*-module hilbertien E pour le produit scalaire donné par

$$\langle u, v\rangle_s = \langle (1 + P^*P)^{s/2m} u, (1 + P^*P)^{s/2m} v\rangle_E.$$

Nous retrouvons alors les analogues de plusieurs propriétés classiques pour les espaces de Sobolev.

1. Les modules de Sobolev $H^s_\tau(P)$ sont indépendants de l'opérateur elliptique P choisi pour les définir.
2. Les modules H^s_τ et H^{-s}_τ sont des C*-modules en dualité.
3. On a $H^s_\tau \subset H^{s'}_\tau$ lorsque $s \geq s'$. L'inclusion est un morphisme compact au sens des C*-modules pour $s > s'$.
4. Un opérateur pseudo-différentiel d'ordre de partie réelle m_0 définit pour tout $s \in \mathbb{R}$ un morphisme $H^s_\tau \to H^{s-m_0}_\tau$.

Nous terminons ce chapitre en donnant une définition plus générale pour un opérateur régularisant : il s'agit d'un opérateur qui est un morphisme borné de H^s_τ dans H^t_τ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$.

Ceci nous permet de définir une algèbre d'opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux sur le feuilletage qui contient l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux à support compact et qui est adaptée au calcul fonctionnel pour les opérateurs.

Remarques

1. Les modules de Sobolev précédemment définis généralisent les espaces de Sobolev définis par Connes dans [Co79]. Les espaces définis par Connes sont en effet les images par la représentation régulière des C*-modules de Sobolev réduits, définis sur la C*-algèbre réduite du feuilletage.
2. De même, ces résultats étendent partiellement des résultats antérieurs de Kordyukov [Kor85, Kor93, Kor95]. Les espaces de Sobolev $H^{0,s}(M, \mathcal{F})$ définis par Kordyukov sont, comme précédemment, les images, par une représentation de la C*-algèbre maximale, des modules de Sobolev H^s_τ. Kordyukov a également défini dans ce cadre, en utilisant les résultats de Seeley [See67], les puissances complexes pour des opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux elliptiques, alors que nous n'étudions ici le calcul fonctionnel dans le cadre des C*-modules hilbertiens que dans le cas des opérateurs différentiels longitudinaux positifs et à support compact.

Chapitre 5 Dans ce dernier chapitre, nous étudions dans le cadre d'un feuilletage mesuré de variété base compacte les cinq propriétés qui caractérisent le résidu non commutatif classique.

1. Nous commençons par définir localement le résidu de Wodzicki feuilleté pour une famille $(P_t)_{t\in T}$ de classe C^k d'opérateurs pseudo-différentiels à support compact dans un ouvert trivialisant pour le feuilletage de la forme $L \times T$. On pose
$$\mathrm{Res}\, P = \int \mathrm{Res}\,(P_t) d\mu(t)$$
en désignant par $\mathrm{Res}\,(P_t)$ le résidu de Wodzicki ordinaire pour l'opérateur pseudo-différentiel P_t, et par μ la mesure transverse invariante. Nous montrons ensuite, en utilisant les propriétés de la mesure μ que cette définition locale ne dépend pas de l'ouvert trivialisant considéré, et qu'elle peut ainsi être étendue à tous les opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux. Nous retrouvons également le fait que le résidu feuilleté définit une 1-densité sur le feuilletage.
2. Ce résidu non commutatif s'exprime, comme dans le cas classique, comme le coefficient logarithmique de l'expansion asymptotique du noyau de l'opérateur au voisinage de la diagonale.

3. Une définition globale peut également être retrouvée pour le résidu non commutatif feuilleté : c'est le résidu de la fonction méromorphe définie par $z \mapsto Tr(P(z))$, où $P(z)$ est une fonction holomorphe d'opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux vérifiant $P(0) = P$ et $ord(P(z)) = ord(P) - z$. D'après les résultats du chapitre précédent, on peut en particulier choisir $P(z) = \frac{1}{m}PA^{-z}$, avec un opérateur A différentiel longitudinal à support compact d'ordre m strictement positif (par exemple $A = 1 + \Delta$ avec Δ le laplacien positif).
4. Comme dans le cas classique, il est possible, à partir des propriétés du résidu non commutatif feuilleté, de définir et d'étudier les fonctions ζ d'opérateurs associées aux opérateurs différentiels elliptiques positifs. En utilisant la transformée de Mellin, nous retrouvons également le lien classique entre le résidu non commutatif et les coefficients du développement de la trace de l'opérateur de la chaleur associé à un opérateur différentiel elliptique positif.
5. Enfin, nous discutons des propriétés traciales du résidu non commutatif feuilleté. Comme précédemment, il définit une trace résiduelle sur l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre entier. Cette trace n'est pas nécessairement unique, et nous montrons que la donnée d'une trace sur l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre entier transversalement de classe C^k équivaut à la donnée d'une distribution transverse invariante par holonomie et s'étendant aux fonctions transverses de classe C^k. En particulier, il n'y a unicité que dans le cas $k = 0$ et si la variété feuilletée admet une unique mesure transverse. Ces résultats rejoignent des résultats récents de Moulay Benameur et Victor Nistor [BN01] sur l'homologie de Hochschild de l'algèbre des symboles longitudinaux à support compact transversalement lisses.

Nous relions également nos résultats à ceux très récents de Moulay Benameur et Thierry Fack [BF01] sur les triplets spectraux de von Neumann. Ils démontrent notamment un théorème analogue au théorème de Connes sur la coïncidence entre trace de Dixmier (définie dans ce cadre par R. Prinzis [Pri95] et par T. Guido et D. Isola [GI95]) et résidu non commutatif pour les opérateurs longitudinaux d'ordre $-p$ si p désigne la dimension du feuilletage. Nous terminons enfin en donnant dans le cadre des feuilletages mesurés un exemple de triplet spectral de Von Neumann de spectre de dimension simple qui est un analogue de l'objet défini par Alain Connes et Henri Moscovici [CM95] pour démontrer un théorème de l'indice local.

Ce travail ouvre la voie à plusieurs applications.

1. Développer le calcul fonctionnel pour les opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux dans le cadre des C*-modules hilbertiens.
2. Définir plus généralement la fonction ζ d'opérateur, et étudier ses propriétés, ainsi que celles de l'opérateur de la chaleur.
3. Etudier, comme dans le cas classique, les applications géométriques du résidu non commutatif feuilleté : propriétés des invariants eta du feuilletage, de l'invariant de Novikov-Shubin du feuilletage, ...
4. Etudier en détail le théorème de l'indice local pour les feuilletages mesurés.

Chapitre 1

Feuilletages

1.1 Variétés feuilletées

Les feuilletages, dont l'étude a été initiée par Ehresmann et Reeb dans les années 1940, peuvent être multiplement définis. Nous allons donner plusieurs définitions qui, bien qu'équivalentes entre elles, proposent chacune un éclairage particulier sur la nature des variétés feuilletées. Pour la démonstration de l'équivalence de ces différentes définitions, le lecteur pourra consulter les ouvrages de Godbillon [God91] ou de Camacho et Neto [CLN85].

Donnons-nous une variété M, de classe C^∞ et de dimension $p+q$.

Définition 1.1.1 — On appelle *feuilletage de dimension* p sur M une variété lisse $\mathcal{F}$ de dimension p ayant même ensemble sous-jacent que M et satisfaisant à la condition suivante.

Il existe un recouvrement de M par des ouverts $(U_i)_{i\in I}$ et des homéomorphismes $\varphi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ tels que la famille $(U_{i,y}, \varphi_{i,y})_{(i,y)\in I\times\mathbb{R}^q}$ forme un système de cartes pour la variété $\mathcal{F}$, avec

$$U_{i,y} = \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{y\}) \text{ et } \varphi_{i,y} = \varphi_{i|U_{i,y}} : U_{i,y} \to V_{i,y} \subset \mathbb{R}^p \times \{y\}.$$

On dit aussi que le couple $(M, \mathcal{F})$ est une *variété feuilletée*. La variété M est appelée *variété base*, et la variété $\mathcal{F}$ est appelée *variété feuille*.

Notons que la topologie définie par la variété feuille $\mathcal{F}$ est plus fine que la topologie définie par la variété base M, car sur U_i, la topologie de $\mathcal{F}$ correspond au produit de la topologie de $\mathbb{R}^p$ par la topologie discrète sur $\mathbb{R}^q$. On appelle *feuilles* les composantes connexes de la variété $\mathcal{F}$, et *plaques* de l'ouvert U_i les composantes connexes des ouverts de $\mathcal{F}$ de la forme $U_{i,y} = \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{y\})$ (les plaques sont les composantes connexes de l'intersection des feuilles avec un ouvert distingué). Notons que deux plaques dans un même ouvert U_i sont disjointes par construction. Il est clair par définition que chaque feuille est une variété lisse de dimension p immergée dans M mais pour laquelle la topologie induite n'est pas en général la topologie de la variété M. Remarquons que la partition en feuilles de la variété $\mathcal{F}$ définit sur l'ensemble sous-jacent à M une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Cette remarque nous fournit une autre définition possible pour un feuilletage :

Définition 1.1.2 — Un feuilletage est la donnée d'un couple $(M, \mathcal{R})$ formé d'une variété lisse de dimension $p+q$ et d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur M dont les classes d'équivalence sont

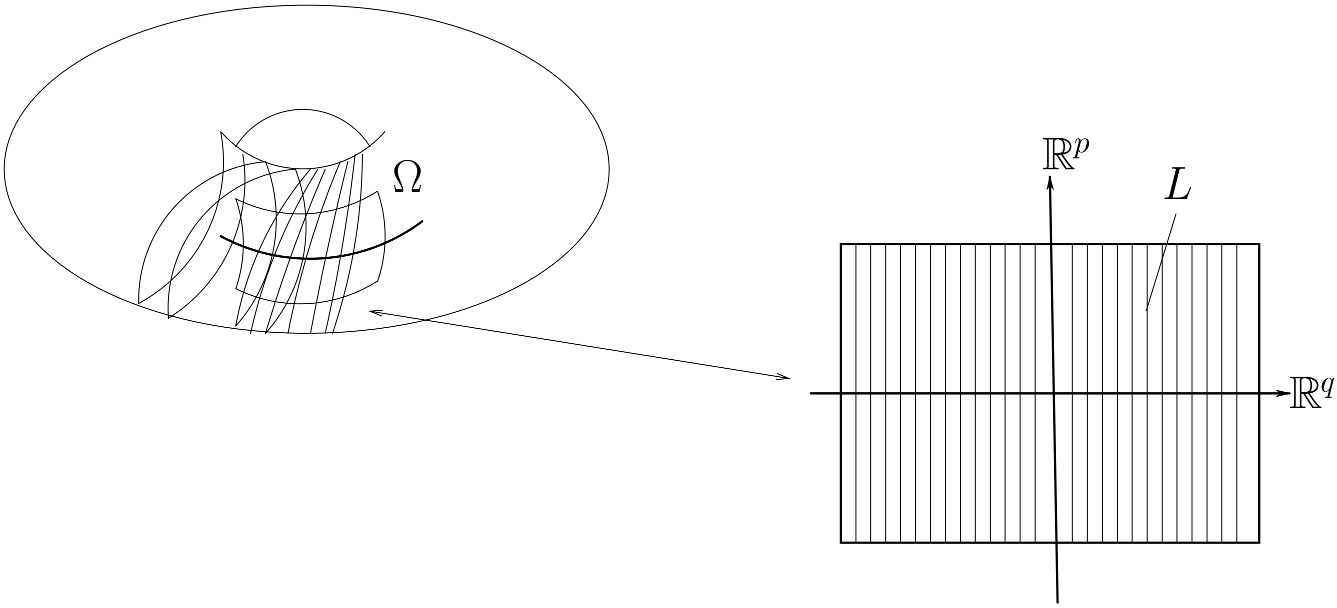


FIG. 1.1 – Un tore feuilleté

connexes, tel que M admet un recouvrement ouvert par des cartes

$$\varphi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$$

vérifiant la propriété que les plaques - i.e. les composantes connexes de l'intersection de toute feuille (classe d'équivalence) avec l'ouvert U_i - sont de la forme $\varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{y\})$.

Nous aurons besoin, dans la pratique, d'une définition plus maniable, faisant intervenir explicitement un atlas. On appelle *pavé ouvert* dans $\mathbb{R}^k$ tout ouvert qui s'écrit comme produit de k intervalles ouverts (éventuellement infinis).

DÉFINITION 1.1.3 — On appelle feuilletage, ou *variété feuilletée* $(M, \mathcal{F})$ par un feuilletage de dimension p (de classe $\mathcal{C}^\infty$), une variété lisse M munie d'un atlas formé d'*ouverts trivialisants*, c'est-à-dire d'ouverts de la forme $\Omega \simeq L \times T$, où L et T désignent respectivement des pavés ouverts de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^q$ vérifiant la condition suivante :

les changements de cartes sont de la forme

$$l' = \psi(l, t) \quad t' = \Gamma(t)$$

où ψ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et Γ un difféomorphisme lisse local.

Notons que pour toute donnée d'un tel atlas distingué, il existe un unique *atlas distingué maximal* le contenant. C'est l'ensemble des ouverts U de M trivialisants pour le feuilletage et tels que, si $\Omega \cap U \neq \emptyset$ pour un ouvert Ω de l'atlas distingué, le changement de cartes sur $\Omega \cap U$ est de la forme précédente

$$l' = \psi(l, t) \quad t' = \Gamma(t)$$

où ψ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et Γ un difféomorphisme lisse local.

Notons ici que nous pouvons définir des classes plus générales de feuilletages, en affaiblissant les conditions imposées à la variété M.

Définition 1.1.4 — Soient L et T des ouverts respectifs de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$. Une application ψ de $L \times T$ dans $\mathbb{R}^n$ est dite de classe $C^{j,k}$ avec $j, k \in \mathbb{N}$ si les dérivées partielles $\frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial l^\alpha \partial t^\beta}(l,t)$ existent et sont continues sur $L \times T$ pour tous les multi-indices (α, β) tels que $|\alpha| \leq j$ et $|\beta| \leq k$.

Pour $j \geq k$, on appelle *feuilletage de classe* $C^{j,k}$ une variété M de classe C^k munie d'un atlas comme ci-dessus, avec $\psi(l,t)$ une application de classe $C^{j,k}$ et Γ de classe C^k.

Cette définition d'un feuilletage peut aussi être réduite sous la forme suivante, qui met en avant la structure transverse au feuilletage.

Définition 1.1.5 — Un feuilletage $\mathcal{F}$ est donné par une famille maximale de paires $(U_i, f_i)_{i \in I}$ formées d'un ouvert U_i de M et d'une submersion $f_i : U_i \to \mathbb{R}^{n-p}$ vérifiant

1. $\cup_{i\in I} U_i = M$.
2. Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe $g_{i,j}$ un difféomorphisme local lisse de $\mathbb{R}^{n-p}$ tel que $f_i = g_{i,j} f_j$ sur $U_i \cap U_j$.

Les submersions f_i sont appelées *applications distinguées* de $\mathcal{F}$.

Evoquons enfin une dernière caractérisation d'un feuilletage par la donnée d'un sous-fibré de dimension p du fibré tangent. Notons tout d'abord que le fibré tangent au feuilletage $\mathcal{F}$ définit naturellement un sous-fibré F du fibré tangent à la variété. On dit qu'un sous-fibré F du fibré tangent est *intégrable* s'il existe un feuilletage $\mathcal{F}$ pour lequel $F = T\mathcal{F}$. Un tel feuilletage est unique et le théorème de Frobenius permet de caractériser les sous-fibrés intégrables.

Théorème 1.1 — Un sous-fibré F du fibré tangent TM est intégrable si et seulement s'il est involutif, i.e. tel que $C^\infty(F) = \{X \in C^\infty(M, TM), \forall x \in M,\ X_x \in F_x\}$ est une sous-algèbre de Lie de $C^\infty(M, TM)$.

Constructions de feuilletages et exemples

Exemples —

1. **Feuilletage grossier** L'exemple le plus simple de feuilletage est le feuilletage de codimension 0 défini par une variété M sur elle-même. Ce feuilletage est appelé *feuilletage grossier* de M.
2. **Feuilletage trivial de dimension 0** On peut également considérer le feuilletage de dimension 0 formé sur M par l'ensemble de ses points, considéré chacun comme une feuille.
3. **Feuilletage produit** On appelle *feuilletage produit* ou *feuilletage trivial* le feuilletage naturel défini sur le produit $M = L \times T$ de deux ouverts connexes respectifs de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ dont les feuilles sont les $L \times \{t\}$.

Feuilletage défini par une submersion Soit $p : M \to N$ une submersion entre deux variétés lisses. D'après la définition (1.1.5) et l'aspect local de la submersion, un atlas maximal formé d'ouverts dans lesquels la submersion est une projection définit une structure naturelle de feuilletage sur M, dont les feuilles sont les composantes connexes de $p^{-1}(x)$ pour $x \in N$.

Exemple — Feuilletage défini par une fibration. Soit $E \xrightarrow{\pi} B$ une fibration lisse de fibre L. Nous savons que pour tout point $b \in B$, il existe un voisinage U_b de b dans B et un difféomorphisme φ_b tel que $\varphi_b(\pi^{-1}(U_b)) = U_b \times L$ et $p_1 \circ \varphi(\pi^{-1}(b')) = b'$ pour tout $b' \in U_b$. On définit alors un feuilletage sur E en prenant pour feuilles les composantes connexes de $\pi^{-1}(b)$ pour $b \in B$.

Feuilletage quotient Soit Γ un groupe discret agissant par difféomorphismes, librement et proprement sur une variété M. L'ensemble M/Γ est muni d'une structure de variété. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage pour M et que Γ agit par difféomorphismes sur $\mathcal{F}$, son action est également libre et propre et la variété quotient $\mathcal{F}/\Gamma$ définit un feuilletage pour la variété M/Γ.

Donnons un exemple d'application. Soit Γ un groupe discret agissant par difféomorphismes sur une variété B. On sait qu'il existe $\tilde{V}$ une variété sur laquelle Γ opère librement et proprement. Notons B^δ l'ensemble B muni de la topologie discrète. La variété $\tilde{V} \times B^\delta$ définit un feuilletage $\tilde{F}$ sur la variété $\tilde{M} = \tilde{V} \times B$. Alors l'action diagonale de Γ sur la variété $\tilde{M}$ définie par

$$g.(x, y) = (g.x, g.y)$$

est propre et libre. De plus elle agit par difféomorphismes sur les variétés $\tilde{M}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$. On déduit de ce qui précède un feuilletage quotient $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}/\Gamma$ sur la variété $M = \tilde{M}/\Gamma$.

Exemple — Feuilletage de Kronecker du tore $\mathbb{T}^2$. Posons $\Gamma = \mathbb{Z}$, prenons $\tilde{V} = \mathbb{R}$, avec action de $\mathbb{Z}$ par translation : $n.t = t + n$. Posons $B = S^1$, avec une action de $\mathbb{Z}$ donnée par $n.s = e^{in\theta}s$. Considérons le feuilletage défini sur le cylindre $\tilde{M} = \mathbb{R} \times S^1$ plongé dans $\mathbb{R}^2$, dont les feuilles sont homéomorphes à $\mathbb{R}$ et qui sont invariantes par l'action que nous venons de décrire. Nous obtenons ainsi un feuilletage sur le tore $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R} \times S^1)/\mathbb{Z}$ dont les feuilles sont homéomorphes à $\mathbb{R}$ et forment un angle θ avec un méridien du tore.

Feuilletage obtenu par recollement Soient M et M' des variétés à bord feuilletées, telles que le feuilletage au voisinage du bord soit tangent au bord. Si les variétés M et M' se recollent sur leur bord, et que les feuilletages sur δM et $\delta M'$ coïncident dans ce recollement, alors on construit un feuilletage sur la variété $M \cup M'$ en recollant les feuilletages précédents.

Exemple — Feuilletage de Reeb. Nous allons décrire un exemple de feuilletage de la sphère S^3 défini par Reeb, et obtenu par recollement. Ce feuilletage est construit à partir de feuilletages sur $D \times S^1$, où D désigne le disque fermé de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$. Posons $r^2 = x^2 + y^2$, et donnons-nous une fonction lisse $\alpha(r^2) = \exp(-\exp(\frac{1}{1-r^2}))$ et une application de $D \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de la forme

$$f(x, y, z) = \alpha(r^2)e^z = \exp(z - \exp(\frac{1}{1 - r^2})).$$

Il est clair que l'application f est une submersion, et on peut donc définir naturellement un feuilletage de codimension 1 sur le cylindre solide $D \times \mathbb{R}$ dont les feuilles peuvent être paramétrées par $(x,y) \mapsto (x,y,b+\exp(\frac{1}{1-r^2}))$ où b est une constante. Notons que le bord du cylindre forme une feuille, et que ce feuilletage lisse sur $D \times \mathbb{R}$ peut être étendu à $\mathbb{R}^3$ en prenant pour feuilles les cylindres concentriques à l'extérieur de $D \times \mathbb{R}$. Remarquons que les translations le long de l'axe z laissent le feuilletage ainsi défini invariant : toute feuille est envoyée sur une autre feuille. Nous pouvons alors définir un *feuilletage quotient* sur la variété $D \times S^1$ considérée comme quotient de $D \times \mathbb{R}$ par le groupe $\mathbb{Z}$ agissant par translation le long de l'axe z. On définit ainsi un feuilletage lisse de dimension 2 sur le tore plein $D \times S^1$, dont les feuilles à l'intérieur du tore sont homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ et emboîtées les unes dans les autres et s'accumulent sur la feuille limite formée par le bord de la variété qui est le tore $\mathbb{T}^2$. En recollant deux tels tores pleins sur leurs bords (on identifie les méridiens de T_1 et les parallèles de T_2) on obtient la sphère S^3. En effet, la sphère S^3 est paramétrée par $\left\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1|^2+|z_2|^2=1\right\}$ et on peut l'écrire comme réunion de $M_{1,2}$ et de $M_{2,1}$ où ces ensembles sont des variétés à bord difféomorphes à $D \times S^1$, avec

$$M_{1,2} = \left\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1| \leq |z_2|, |z_1|^2+|z_2|^2=1\right\}$$

et

$$M_{2,1} = \left\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_2| \leq |z_1|, |z_1|^2+|z_2|^2=1\right\}.$$

1.2 Groupoïde d'holonomie

1.2.1 Atlas réguliers

Nous commençons par distinguer une classe particulière d'atlas, qui seront adaptés pour les calculs que nous ferons par la suite.

On appelle *transversale* ou *sous-variété transverse* une sous-variété (non nécessairement fermée) S telle que pour tout point $x \in S$, on ait $T_xM = T_xS \oplus F_x$. Une transversale complète est une transversale qui rencontre toutes les feuilles.

Définition 1.2.1 — Pour un ouvert distingué Ω, on appelle *transversale locale* de Ω l'espace-quotient $T_\Omega = \Omega/\mathcal{R}_\Omega$ de la relation d'équivalence $\mathcal{R}_\Omega$ qui a pour graphe les couples $(x,y) \in \Omega^2$ tels que x et y appartiennent à la même plaque du feuilletage.

Une transversale locale est donc un ensemble de plaques pour un ouvert distingué.

Définition 1.2.2 — On appelle *régulière* l'inclusion d'un ouvert trivialisant dans un autre, et on note $\Omega \triangleleft \Omega'$ lorsque l'application $i : \Omega \hookrightarrow \Omega'$ définit par passage au quotient une injection lisse de T_Ω dans $T_{\Omega'}$.

Définition 1.2.3 — On appelle *atlas régulier* un atlas distingué $(\Omega_i,\varphi_i)_{i\in I}$ qui vérifie les propriétés suivantes.

1. Le recouvrement Ω_i est localement fini.
2. $\forall i,j$, si $\overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j} \neq \emptyset$, alors il existe un ouvert Ω trivialisant tel que $\Omega_i \triangleleft \Omega$ et $\Omega_j \triangleleft \Omega$.

PROPOSITION 1.2.4 — Soit $(M,\mathcal{F})$ une variété feuilletée. Il existe un atlas feuilleté (Ω_i,φ_i) régulier pour $(M,\mathcal{F})$.

DÉMONSTRATION— Pour simplifier, nous ne considérerons que le cas où M est compacte. Donnons-nous une métrique sur M et un atlas feuilleté fini (Ω'_j,ϱ_j). Notons ε le nombre de Lebesgue de ce recouvrement, c'est-à-dire le plus grand nombre positif tel que tout sous-ensemble de M de diamètre $d<\varepsilon$ est contenu entièrement dans l'un des ouverts du recouvrement. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, fixons un $j\in I$ tel que $x\in\Omega'_j$, et un ouvert trivialisant (Ω_x,φ_x) vérifiant :

- $x\in\Omega_x\subset\overline{\Omega_x}\subset\Omega'_j$,
- $\varphi_x=\varrho_{j|\Omega_x}$,
- $\mathrm{diam}(\Omega_x)<\varepsilon/2$.

Supposons alors que $\Omega_x\subset\Omega'_k$ avec $k\neq j$. Ecrivons $\varrho_k=(\psi_k,\Gamma_k)$. Nous savons que Γ_k est une submersion

$$\Gamma_k:\Omega'_k\to\mathbb{R}^q$$

telle que l'image réciproque d'un point (une ligne de niveau) est une plaque de Ω'_k. La restriction de Γ_k à Ω_x définit donc sur Ω_x une submersion. Celle-ci est localement constante dans le sens longitudinal ; quitte à diminuer Ω_x, nous pouvons donc supposer que les lignes de niveau de $\Gamma_{k|\overline{\Omega_x}}$ sont les plaques de Ω_x, soit encore que toute plaque de Ω'_k rencontre (contient) au plus une plaque de $\overline{\Omega_x}$.

Comme le recouvrement par les Ω'_j est fini, nous pouvons choisir les Ω_x de sorte que si $\Omega_x\subset\Omega'_k$, alors des plaques distinctes de $\overline{\Omega_x}$ sont contenues dans des plaques distinctes de Ω'_k.

Extrayons à présent un sous-recouvrement fini (Ω_i,φ_i) du recouvrement de M par les $(\Omega_x,\varphi_x)_{x\in M}$. Si $\overline{\Omega_i}\cap\overline{\Omega_j}\neq\emptyset$, alors $\mathrm{diam}(\overline{\Omega_i}\cup\overline{\Omega_j})<\varepsilon$. Il existe donc un k tel que $\overline{\Omega_i}\cup\overline{\Omega_j}\subset\Omega'_k$. De ce qui précède, on déduit que $\Omega_i\lhd\Omega'_k$ et $\Omega_j\lhd\Omega'_k$.

■

Notons que l'on peut construire des atlas arbitrairement fins possédant cette propriété, et qu'un atlas régulier possède en particulier la propriété suivante :

COROLLAIRE 1.2.5 — Si (Ω_i,φ_i) et (Ω_j,φ_j) sont des éléments de l'atlas, l'intérieur d'une plaque fermée de $\overline{\Omega_i}$ rencontre au plus une plaque fermée de Ω_j.

1.2.2 Holonomies, Groupoïde maximal d'holonomie

Soit $(M,\mathcal{F})$ une variété feuilletée de classe C^∞, avec M compacte et de dimension $p+q$. Donnons-nous un atlas régulier pour $(M,\mathcal{F})$. Posons $F=T\mathcal{F}$.

Nous pouvons à présent introduire le concept d'holonomie.

DÉFINITION 1.2.6 — Une *holonomie* H est un difféomorphisme lisse d'une transversale locale T dans une autre T' tel que pour tout $t\in T$, t et $H(t)$ sont sur la même feuille.

La notion de transversale locale nous permet de définir naturellement un germe d'holonomie en un point. L'ensemble $H_{x,y}$ des holonomies d'une transversale locale en x vers une transversale locale en y telles que $H(p(x)) = p'(y)$ peut être muni d'une relation d'équivalence naturelle. Si $H_1 : T_{\Omega_1} \to T_{\Omega'_1}$ et $H_2 : T_{\Omega_2} \to T_{\Omega'_2}$ sont deux holonomies dans $H_{x,y}$, on pose $H_1 \sim H_2$ s'il existe deux ouverts trivialisants Ω et Ω', avec

$$\Omega \triangleleft \Omega_1 \text{ et } \Omega \triangleleft \Omega_2$$

et

$$\Omega' \triangleleft \Omega'_1 \text{ et } \Omega' \triangleleft \Omega'_2$$

contenant respectivement x et y, tels que les restrictions de H_1 et de H_2 définissent la même holonomie de T_Ω dans $T_{\Omega'}$.

Définition 1.2.7 — On appelle *germe d'holonomie* d'un point x vers un point y une classe d'équivalence de l'ensemble $H_{x,y}$ des holonomies d'une transversale locale en x vers une transversale locale en y pour la relation d'équivalence ci-dessus.

Définissons à présent un groupoïde associé naturellement à cette notion d'holonomie, le groupoïde maximal d'holonomie $\bar{G}$. Rappelons tout d'abord la notion de groupoïde.

Définition 1.2.8 — On appelle *groupoïde* G, d'espace des unités $G^{(0)}$, la donnée des ensembles G et $G^{(0)} = X$ et des applications suivantes :

- $\Delta : X \to G$, l'application diagonale,
- une involution $i : G \to G$ appelée inversion et notée $i(u) = u^{-1}$,
- des applications source (s) et but (r) de G dans X,
- une multiplication associative m à valeurs dans G, définie sur l'ensemble $G^{(2)} \subset G^2$ des couples (u,v) pour lesquels $r(v) = s(u)$,

qui vérifient les relations suivantes :

1. $r(\Delta(x)) = s(\Delta(x)) = x$, et $m(u, \Delta(s(u))) = m(\Delta(r(u)), u) = u$.
2. $r(u^{-1}) = s(u)$ et $m(u, u^{-1}) = \Delta(r(u))$.
3. $s(m(u,v)) = s(v)$ et $r(m(u,v)) = r(m(u))$.
4. $m(u, m(v,w)) = m(m(u,v), w)$ si $s(u) = r(v)$ et $s(v) = r(w)$.

De manière plus abstraite, on peut définir un groupoïde comme une petite catégorie dans laquelle toute flèche a une inverse. Un groupoïde est dit topologique (respectivement différentiable de classe C^k, $k \geq 1$) quand les ensembles X et G sont des espaces topologiques (respectivement des variétés $\mathcal{C}^k$), Δ est une application continue (respectivement $\mathcal{C}^k$), m, r et s sont des applications continues (respectivement des submersions de classe C^k) et i un homéomorphisme (respectivement un difféomorphisme de classe C^k).

Définition 1.2.9 — On appelle *groupoïde maximal d'holonomie* le groupoïde $\bar{G}$ de base $G^{(0)} = M$ formé des triplets (x,y,h) avec $x,y \in M^2$, $x\mathcal{R}y$ et h le germe d'une holonomie $H \in H_{y,x}$ (c'est-à-dire une holonomie de T_y, une transversale locale en y, dans T_x, une transversale locale en x, vérifiant $H(p'(y)) = p(x)$).
Les applications r et s sont les submersions évidentes

$$r : (x,y,h) \mapsto x \text{ et } s : (x,y,h) \mapsto y.$$

L'inversion est définie par $i((x,y,h)) = (y,x,h^{-1})$, et le produit est donné par $(x,y,h)\circ(y,z,h') = (x,z,h\circ h')$.

Nous pouvons définir une structure de variété lisse sur $\bar{G}$ compatible avec la structure de groupoïde.

Proposition 1.2.10 — Le groupoïde $\bar{G}$ est une variété lisse de dimension $2p+q$, avec des ouverts de la forme $W(\Omega,\Omega',H)$, pour toute donnée d'ouverts trivialisants Ω et Ω' et d'une holonomie H entre les transversales locales associées à ces ouverts. L'ouvert $W(\Omega,\Omega',H)$ est formé des triplets (x,y,h) avec $x\in\Omega$, $y\in\Omega'$, $x\mathcal{R}y$ et h un germe d'holonomie du point y vers le point x tel que $H\in h$. De plus, cet ouvert est difféomorphe à un ouvert de la forme $L\times L'\times T$ et les changements de cartes sont de la forme :

$$(l,l',t)\longmapsto(\psi(l,t),\psi'(l',t),\Gamma(t)).$$

Cette variété est munie d'un feuilletage lisse $\overline{\mathcal{G}}$ de dimension $2p$ pour lequel les ouverts précédents forment un atlas distingué.

Démonstration—
Donnons-nous deux ouverts trivialisants pour le feuilletage, $\Omega\overset{\theta}{\simeq}L\times T$ et $\Omega'\overset{\theta'}{\simeq}L'\times T'$ et une holonomie $H:T'\to T$.
Posons

$$\begin{array}{ccc} \iota:\Omega\to L & \text{et} & \kappa:\Omega\to T\\ \iota':\Omega'\to L' & \text{et} & \kappa':\Omega'\to T' \end{array}$$

avec ι (respectivement ι') la composée de la première projection et de θ (resp. θ'), et κ (resp. κ') la composée de la seconde projection et de θ (resp. θ'). Posons alors :

$$\begin{aligned} W(\Omega,\Omega',H) &= \big\{(x,y)\in\Omega\times\Omega',\, x\mathcal{R}y,\, \kappa(x)=H(\kappa'(y))\big\}\\ &= \big\{(x,y,h),\,(x,y)\in\Omega\times\Omega',\, x\mathcal{R}y,\\ &\qquad h \text{ le germe d'holonomie du point } y \text{ vers le point } x \text{ tel que } H\in h\big\}\cdot \end{aligned}$$

L'ensemble $W(\Omega,\Omega',H)$ est homéomorphe à l'ouvert $L\times L'\times T$ de $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$, par l'application

$$(x,y,h)\longmapsto\big(\iota(x),\iota'(y),\kappa(x)=H(\kappa'(y)\big)\,.$$

Il est clair que la réunion des $W(\Omega,\Omega',H)$ est un recouvrement de $\bar{G}$.

Donnons-nous deux ouverts $W_1=W(\Omega_1,\Omega'_1,H_1)$ et $W_2=W(\Omega_2,\Omega'_2,H_2)$ homéomorphes respectivement à $L_1\times L'_1\times T_1$ et à $L_2\times L'_2\times T_2$.

Le fait que l'intersection des deux ouverts soit non vide implique que les intersections $\Omega_1\cap\Omega_2$ et $\Omega'_1\cap\Omega'_2$ sont non vides. Etudions à présent les changements de cartes sur $W_1\cap W_2$ que nous supposons non vide, avec $W_1=W(\Omega_1,\Omega'_1,H_1)$ et $W_2=W(\Omega_2,\Omega'_2,H_2)$.

$$\begin{aligned} W_1\cap W_2 &= \big\{(x,y)\in(\Omega_1\cap\Omega_2)\times(\Omega'_1\cap\Omega'_2),\, x\mathcal{R}y,\\ &\quad H_1(\kappa_1(x))=\kappa'_1(y)=H_2(\Gamma(\kappa_2(x)))=\Gamma'(\kappa'_2(y))\big\}\,, \end{aligned}$$

où Γ et Γ' désignent les difféomorphismes locaux de changements de cartes par rapport à la deuxième variable de T_1 vers T_2 et de T'_1 vers T'_2. Alors, avec les notations précédentes, pour un point (l_1, l'_1, t_1) de $\Phi_1(W_1 \cap W_2)$, on a :

$$\begin{aligned}
&\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}(l_1, l'_1, t_1) \\
&= (\iota_2 \circ \theta_1^{-1}(l_1, t_1), \iota'_2 \circ \theta'^{-1}_1(l'_1, H_1(t_1)), \kappa_2 \circ \theta_1^{-1}(l_1, t_1)) \\
&= \left(\mathrm{pr}_1\left(\theta_2\theta_1^{-1}(l_1, t_1)\right),\ \mathrm{pr}_1\left(\theta'_2\theta'^{-1}_1(l'_1, H_1(t_1))\right),\ \mathrm{pr}_2\left(\theta_2\theta_1^{-1}(l_1, t_1)\right)\right).
\end{aligned}$$

On déduit des propriétés des changements de cartes $\theta_2\theta_1^{-1}$ et $\theta'_2\theta'^{-1}_1$ dans la variété feuilletée le fait que le changement de carte défini ci-dessus est un difféomorphisme, qui est de plus un difféomorphisme local par rapport à la dernière variable.

■

1.2.3 Holonomie d'un chemin et groupoïde d'holonomie

Nous avons introduit le groupoïde maximal d'holonomie dans le but de donner une structure de variété à un groupoïde différentiable contenant le graphe de la relation d'équivalence définissant le feuilletage. Nous allons à présent étudier une classe particulière d'holonomies, les holonomies associées à un chemin tracé dans une feuille. Nous verrons à cette occasion que nous pouvons définir un sous-groupoïde ouvert du groupoïde maximal d'holonomie, qui contient toujours le graphe de la relation d'équivalence, mais qui est le "plus petit groupoïde différentiable vérifiant cette propriété" (cf [Phi87, Deb00]).

Commençons par rappeler la notion d'*holonomie* d'un chemin tracé sur une feuille. Donnons-nous un chemin γ tracé sur une feuille et reliant a à b.

Définition 1.2.11 — On appelle *recouvrement régulier* d'un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathcal{F}$ un recouvrement fini de γ par des ouverts distingués appartenant à un atlas régulier. C'est un recouvrement par des ouverts $\Omega_{a_0} = \Omega_a, \Omega_{a_1}, \Omega_{a_2}, \cdots, \Omega_{a_k} = \Omega_b$ avec $a_0 = 0, a_1, \cdots, a_k$ tel que $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset \Omega_{a_j}$ et qui vérifie la propriété suivante : si π_j est une plaque dans le voisinage Ω_{a_j}, il existe au plus une plaque π_{j+1} dans le voisinage $\Omega_{a_{j+1}}$ qui intersecte π_j.

Nous savons que tout chemin admet un tel recouvrement régulier (il suffit de prendre un recouvrement régulier de la variété).

Donnons-nous à présent un chemin γ et un recouvrement régulier de γ et extrayons en un sous-recouvrement : on peut restreindre Ω_a à $\Omega_a^{(1)}$ de façon à ce que chaque plaque de $\Omega_{a_0}^{(1)}$ intersecte exactement une plaque de Ω_{a_1}, puis restreindre $\Omega_{a_0}^{(1)}$ à $\Omega_{a_0}^{(2)}$ de façon à ce que chaque plaque de $\Omega_{a_0}^{(2)}$ intersecte exactement une plaque de Ω_{a_1} qui intersecte exactement une plaque de Ω_{a_2}. On construit ainsi $\Omega_{a_0}^{(k)}$,dont chaque plaque intersecte exactement une plaque de Ω_{a_1} qui intersecte exactement une plaque de Ω_{a_2}, laquelle intersecte exactement une plaque de $\Omega_{a_3}, \cdots$, qui intersecte une unique plaque de $\Omega_{a_k} = \Omega_b$. On fait de cette manière correspondre à une plaque de $\Omega_{a_0}^{(k)}$ exactement une plaque de $\Omega_b^{(k)}$ (défini comme l'ouvert de Ω_b formé des plaques images de plaques de $\Omega_{a_0}^{(k)}$ par le procédé précédent). Nous venons ainsi de définir un difféomorphisme entre l'ensemble des plaques de $\Omega_a^{(k)}$ et l'ensemble des plaques de $\Omega_b^{(k)}$. On appelle holonomie du chemin γ ce difféomorphisme que l'on note $H_{a,b}^{\gamma}$ et $h(\gamma)$ son germe en a. Il est clair par construction que cette application d'holonomie ne dépend que du recouvrement régulier du chemin, et non du chemin lui-même. L'holonomie est ainsi définie non plus seulement pour le chemin, mais pour un voisinage tubulaire transverse du chemin. On a donc $h(\gamma) = h(\gamma')$ si γ' est l'image de γ par une homotopie à extrémités fixes.

Enonçons quelques propriétés sur l'holonomie d'un chemin démontrées dans [God91].

Propriétés 1.2.12 —

1. Un recouvrement régulier différent dans la construction précédente ne modifie pas $H^{\gamma}_{a,b}$ sur un voisinage assez petit. Ceci revient à dire que $h(\gamma)$ est indépendant de cette construction.
2. $h(\gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ.
3. Si deux chemins γ et γ' sont composables (i.e. si $r(\gamma) = s(\gamma')$) alors $h(\gamma' \circ \gamma) = h(\gamma') \circ h(\gamma)$.
4. En particulier, si l'on considère l'ensemble $\mathrm{Lac}(L, a)$ des lacets tracés à partir d'un point a dans une feuille L, l'ensemble $H(L, a) = \{h(\gamma), \gamma \in \mathrm{Lac}(L, a)\}$ est un groupe, appelé groupe d'holonomie de la feuille L au point a, et l'application naturelle : $\pi_1(L, a) \to H(L, a)$ est un homomorphisme de groupes surjectif.

Remarquons qu'il est clair que tout couple de points sur une feuille admet un voisinage ouvert $W(\Omega, \Omega', H)$: il suffit d'effectuer la construction précédente pour un chemin γ reliant les deux points. Notons qu'il est toujours possible de trouver un tel chemin, car les feuilles sont, par définition, connexes et localement connexes par arcs (les plaques le sont), et donc connexes par arcs.

Ceci nous incite également à regarder l'ouvert G de $\bar{G}$ qui est formé par la réunion des ouverts $W(\Omega, \Omega', H)$, avec H l'holonomie d'un chemin. Cet ouvert correspond exactement au groupoïde d'holonomie (ou graphe) d'un feuilletage, défini par Winkelnkemper [Win83].

Définition 1.2.13 — Le *groupoïde d'holonomie* G du feuilletage est le quotient du groupoïde fondamental de la variété feuille $\mathcal{F}$ (formé des classes de chemins tracés dans les feuilles, à homotopie à extrémités fixes près) par la relation qui identifie γ et γ' si $h(\gamma) = h(\gamma')$.

On déduit de ce qui précède la proposition suivante :

Proposition 1.2.14 — Le groupoïde G est un sous-groupoïde ouvert du groupoïde $\bar{G}$, et c'est la composante s-connexe de $\bar{G}$. En particulier, G est une variété pour la structure de variété décrite sur $\bar{G}$, si l'on se limite aux ouverts de l'atlas précédemment défini de la forme $W(\Omega, \Omega', H)$, avec H l'holonomie d'un chemin.

On note s et r les applications source et but d'un chemin sur $\mathcal{F}$, G^x l'ensemble des éléments de G dont le but est x et G_x l'ensemble des chemins dont la source est x. Remarquons qu'il existe γ tel que $s(\gamma) = x$ et $r(\gamma) = y$ si et seulement si x et y sont sur la même feuille (on note $x\mathcal{R}y$ cette relation d'équivalence) et que l'image de G dans $M \times M$ par l'application (r, s) est exactement le graphe de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$. On a de plus la propriété suivante.

Proposition 1.2.15 — Pour tout $x \in V$, l'application s de G^x sur la feuille de x est un revêtement associé au groupe d'holonomie $G^x_x = G^x \cap s^{-1}(x)$ du feuilletage au point x, appelé *revêtement d'holonomie*.

Remarque — Notons que le groupoïde d'holonomie ainsi défini n'est pas nécessairement un espace topologique séparé. Le cas du feuilletage de Reeb nous fournit un exemple d'un tel feuilletage (d'autres exemples sont donnés dans [Co79, Co82]). Nous supposerons cependant pour la suite que les feuilletages possédent cette propriété d'avoir un groupoïde d'holonomie séparé.

1.3 Mesures longitudinales

1.3.1 Définitions

Dans ce paragraphe, nous expliquons comment définir une notion de mesure naturelle sur le feuilletage, dans la direction des feuilles (cf [Co79, Co82, Co94, MS88]). Une mesure longitudinale peut-être définie par la donnée d'un ensemble de mesures (λ^x) sur les espaces G^x vérifiant certaines propriétés d'invariance et de régularité. Les mesures longitudinales (aussi appelées "fonctions transverses") sont une des données fondamentales de la théorie non commutative de l'intégration [Co79]. Elles permettent notamment de définir une notion de produit de convolution sur l'algèbre $C_c^\infty(G)$, comme nous le verrons plus tard. Commençons par énoncer la propriété d'invariance que ces mesures doivent vérifier.

Définition 1.3.1 — Soit $(\lambda^x)_{x\in G^{(0)}}$ un ensemble de mesures σ-finies sur les G^x. On dit qu'un tel système de mesures est G-*équivariant à gauche* si pour tous x et y dans $G^{(0)}$, $f \in C_c(G)$ et $\forall\delta \in G_x^y$, on a :

$$\int_{\gamma\in G^x} f(\delta\gamma)d\lambda^x(\gamma) = \int_{\gamma\in G^y} f(\gamma)d\lambda^y(\gamma).$$

Cela implique en particulier que la mesure λ^x est invariante par l'action à gauche du groupe G_x^x.

Remarque — Remarquons que la donnée d'un système de mesures G-équivariant à gauche est en fait équivalente à la donnée d'une mesure dans chaque feuille. En effet, si G est le groupoïde d'holonomie d'un feuilletage, le groupe G_x^x agit librement à gauche par multiplication sur l'ensemble G^x, et l'espace quotient $G_x^x\backslash G^x$ peut-être identifié, par s, à la feuille $L(x)$ contenant x. Si $x\mathcal{R}y$ (i.e. $L(x) = L(y)$), alors tout élément $\gamma \in G_x^y$ définit une bijection de G^x sur G^y, et G_x^y est muni d'une action libre à droite de G_x^x et d'une action libre à gauche de G_y^y. De plus, G_x^y entrelace l'action de G_x^x sur G^x et l'action de G_y^y sur G^y et identifie ainsi $G_x^x\backslash G^x$ et $G_y^y\backslash G^y$. Ainsi la donnée d'un système de mesures G-équivariant à gauche permet de définir une mesure dans chaque feuille. Réciproquement, la donnée d'une mesure λ dans chaque feuille permet de définir d'un système de mesures G-équivariant à gauche. Nous pouvons également voir cette équivalence entre donnée d'une mesure dans chaque feuille et donnée d'un système de mesures G-équivariant à gauche de manière plus synthétique, en disant que le passage de l'une à l'autre est équivalent au relèvement d'une mesure sur chaque feuille $L(x)$ en une mesure sur le revêtement d'holonomie G^x de la feuille donné par l'application s.

Nous allons décrire plusieurs types de mesures longitudinales, ayant des propriétés de régularité différentes, qui correspondent dans un cadre classique aux fonctions boréliennes, aux fonctions continues puis aux fonctions lisses.

Définition 1.3.2 — On appelle *mesure longitudinale* sur le feuilletage la donnée d'un système de mesures G-équivariant à gauche vérifiant :

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(G)$, l'application de $G^{(0)}$ dans $\mathbb{C}$ donnée par : $x \mapsto \lambda^x(f) = \int_{\gamma \in G^x} f(\gamma) d\lambda^x(\gamma)$ est borélienne.

Pour définir les "mesures longitudinales continues" la notion correcte est celle de système de Haar invariant sur un groupoïde localement compact G, qui est la généralisation de la mesure de Haar sur un groupe localement compact.

Définition 1.3.3 — [Ren80] On appelle *système de Haar* (invariant à gauche) sur G la donnée d'une famille $(\lambda^x)_{x \in G^{(0)}}$ de mesures positives sur G vérifiant que :

1. le support de la mesure λ^x est contenu dans G^x ;
2. $(\lambda^x)_{x \in G^{(0)}}$ est un système de mesures G-équivariant à gauche.
3. pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(G)$, l'application de $G^{(0)}$ dans $\mathbb{C}$ donnée par :
$$x \mapsto \int_{\gamma \in G^x} f(\gamma) d\lambda^x(\gamma)$$
est continue.

On peut définir de manière similaire la notion de système de Haar invariant à droite et, en utilisant l'involution, définir des systèmes équivalents de mesure sur les espaces G_x, avec la convention que $\int_{\gamma \in G_x} f(\gamma) d\lambda_x(\gamma) = \int_{\gamma \in G^x} f(\gamma^{-1}) d\lambda^x(\gamma)$.

On a enfin une notion naturelle de "mesures longitudinales de classe C^k, définie par la donnée d'un système de Haar C^k. Un tel sytème est défini en remplaçant la condition 2) de la proposition par la condition suivante :

"pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^k(G)$, l'application de $G^{(0)}$ dans $\mathbb{C}$ donnée par : $x \mapsto \int_{\gamma \in G^x} f(\gamma) d\lambda^x(\gamma)$ est C^k."

1.3.2 Mesures longitudinales et densités

Nous allons à présent nous servir de l'équivalence entre la donnée d'une mesure dans chaque feuille et celle d'un sytème de mesures G-équivariant à gauche pour construire de manière naturelle, à partir de densités, des systèmes de Haar C^∞ possédant la propriété supplémentaire d'être localement de Lebesgue.

Commençons par rappeler la notion de α-densité, $\alpha > 0$, sur un espace vectoriel E de dimension n.

Définition 1.3.4 — On appelle *α-densité* sur E toute application $f : \Lambda^n E \to \mathbb{R}$ telle que pour tout scalaire λ on ait
$$f(\lambda v) = |\lambda|^\alpha f(v).$$

L'ensemble de ces densités est un espace vectoriel noté $|\Lambda|^\alpha E^*$.

Cette notion peut être facilement généralisée au cas d'un fibré vectoriel E : on note alors $|\Lambda|^\alpha E^*$ le fibré vectoriel dont la fibre est $|\Lambda|^\alpha E^*_x$.

Définition 1.3.5 — Donnons-nous à présent un fibré vectoriel E de classe C^∞ au-dessus d'une variété M de classe C^∞. On appelle alors α-densité toute section $\mathcal{C}^\infty$ du fibré $|\Lambda|^\alpha E^*$.

Une α-densité positive Ψ^α sur TM peut être globalement représentée par une classe d'équivalence $f\nu^\alpha$ avec $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et ν une mesure qui est localement de Lebesgue (c'est-à-dire une mesure qui dans toute carte locale est le produit de la mesure de Lebesgue par une fonction C^∞) avec une relation d'équivalence donnée par :

$$f\nu^\alpha = g\mu^\alpha \text{ si } g = f\left(\frac{d\nu}{d\mu}(x)\right)^\alpha$$

où $\frac{d\nu}{d\mu}$ désigne la dérivée de Radon-Nikodym.
Dans un système de coordonnées locales $(x_1, \cdots, x_n)$ dans la carte (U, Φ), la section $f\nu^\alpha$ est définie pour $g\partial_{x_1} \wedge \partial_{x_2} \wedge \cdots \wedge \partial_{x_n} \in \Lambda^n T_x M$ par :

$$f\nu^\alpha(g\partial_{x_1} \wedge \partial_{x_2} \wedge \cdots \wedge \partial_{x_n}) = f(x)\left(|g|\frac{d\nu}{d\mu_L}(x)\right)^\alpha,$$

où $d\mu_L$ désigne l'image par Φ^* de la mesure de Lebesgue $dx_1dx_2\cdots dx_n$. Dans le cas où $\nu = \mu_L$, on obtient donc en particulier

$$f\mu_L^\alpha(g\partial_{x_1} \wedge \partial_{x_2} \wedge \cdots \wedge \partial_{x_n}) = f\,|g|^\alpha.$$

L'intérêt du fibré des 1-densités est de donner une classe d'objets intégrables directement sur M. En effet, si Ψ^1 est une densité sur M, on définit pour une partition de l'unité (ϕ_i) associée à un recouvrement par des ouverts de cartes U_i :

$$\int_M f\Psi^1 = \sum_i \int_M f\phi_i\Psi_1(\partial_{x_1} \wedge \partial_{x_2} \wedge \cdots \wedge \partial_{x_n})d\mu_L.$$

Par la formule de changement de variables, on montre que cette définition ne dépend ni des coordonnées locales, ni de l'atlas choisis. Cette définition est donc intrinsèque, même dans le cas où la variété n'est pas orientée.

Appliquons maintenant ces définitions à une variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$. Désignons par F le sous-fibré du fibré tangent TM des champs de vecteurs tangents aux feuilles du feuilletage, et donnons-nous une section lisse Ψ du fibré $|\Lambda|\,F$. Un tel élément est une application $x \mapsto \Psi(x)$ où $\Psi(x) : \Lambda^p F_x \to \mathbb{C}$ est une fonction vérifiant $\Psi(x)(\lambda v) = |\lambda|\,\Psi(x)(v)$. Or $\Lambda^p F_x \simeq \Lambda^p T_x L(x)$, avec $L(x)$ la feuille contenant le point x. On définit donc une mesure μ_Ψ dans $L(x)$ par : $\int_{y\in L(x)} f(y)d\mu_\Psi(y) = \int_{y\in L(x)} f(y)\Psi(y)$.

Nous disposons ainsi d'une mesure dans chaque feuille, et donc d'un système G-équivariant de mesures, qui est en fait un système de Haar $\mathcal{C}^\infty$ sur le groupoïde d'holonomie.

En fixant une 1-densité sur le fibré $T\mathcal{F}$, on définit ainsi un système de Haar $\mathcal{C}^\infty$ sur le groupoïde d'holonomie du feuilletage, vérifiant de plus les deux propriétés suivantes :

1. Chaque mesure λ^x est localement de Lebesgue ; plus précisément, si $\Omega \simeq L \times T$, alors il existe une fonction φ de classe C^∞ sur l'ouvert $L \times T$ et une fonction ψ de classe C^∞ sur l'ouvert L telles que l'on ait

$$\lambda^{(l_0,t_0)}(l_0, l, t_0) = \varphi(l_0, t_0)\psi(l)dl.$$

2. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, l'application de $G^{(0)}$ dans $\mathbb{C}$ donnée par :

$$x \mapsto \int_{\gamma \in G^x} f(\gamma) d\lambda^x(\gamma)$$

est $\mathcal{C}^\infty$.

1.4 La notion de mesure transverse

L'ensemble des bases d'un espace vectoriel réel est muni d'une relation d'équivalence qui identifie deux bases si le déterminant de la matrice de changement de base est positif. Rappelons que, pour tout fibré vectoriel lisse F de dimension p au-dessus d'une variété M, on appelle *fibré des orientations* sur le fibré F le fibré $Or(F)$ au-dessus de M défini par l'ensemble des couples (x, b_x) où $x \in M$ et b_x est la classe d'équivalence d'une base de F_x localement constante en x. Un feuilletage est *orientable* si le fibré $Or(F)$ des orientations sur le fibré des vecteurs tangents au feuilletage admet une trivialisation globale. Dans ce cas on choisit une orientation en choisissant une telle trivialisation. Dans le cas où le feuilletage n'est pas orientable, on peut se ramener au cas orienté en considérant le *revêtement d'orientation du feuilletage.* C'est le revêtement à deux feuillets au-dessus de F défini par l'application d'orientation, et c'est un sous-fibré intégrable du revêtement d'orientation de T^*M. Nous supposerons donc dorénavant que le feuilletage considéré est orienté.

La notion de mesure transverse pour un feuilletage, introduite par Plante dans [Pla75] et par Ruelle et Sullivan [RS75], a été développée et généralisée par Connes dans [Co79, Co82]. Comme nous l'avons vu dans l'introduction, si l'on cherche à donner une théorie de la mesure sur l'espace quotient $M/\mathcal{F}$ satisfaisante, pour une variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$, il apparaît très vite que, muni de sa structure d'espace de Borel quotient, cet espace est singulier. Dans l'exemple très simple du feuilletage de Kronecker sur le tore T^2, les fonctions mesurables sur l'espace quotient au sens usuel sont uniquement des fonctions constantes presque partout. En effet, le flot défini par le feuilletage étant ergodique, les fonctions mesurables constantes sur les feuilles doivent être constantes presque partout. L'un des intérêts des mesures transverses est de fournir un "bon candidat" à l'intégration d'une mesure longitudinale. Si l'on tient compte du fait que cette dernière est la donnée "borélienne" d'une mesure dans chaque feuille, une mesure transverse devrait donc être une "mesure sur l'espace des feuilles". Ainsi, nous verrons que toute mesure longitudinale (positive) peut être intégrée par une mesure transverse, le résultat étant éventuellement infini, pour donner une mesure sur l'espace M de départ.

Nous parlerons seulement ici des mesures transverses invariantes par holonomie, car c'est l'outil dont nous avons besoin ; il existe cependant une théorie modulaire plus générale des mesures transverses quasi-invariantes (cf, par exemple, [Co82, Co79, MS88]). Nous généraliserons un peu la théorie usuelle dans une autre direction, en parlant de distributions transverses invariantes par holonomie.

1.4.1 Distributions transverses et courants feuilletés fermés

Nous allons à présent définir les distributions transverses invariantes par holonomie et introduire une notion de courant fermé feuilleté, dont nous montrerons ensuite l'équivalence.

Définition 1.4.1 — Une *distribution transverse invariante par holonomie* est la donnée pour toute transversale T d'une forme linéaire δ_T sur les fonctions lisses à support compact sur T telle que si $\psi : T_1 \mapsto T_2$ est une holonomie dont le germe se trouve dans le groupoïde d'holonomie alors pour toute fonction $f \in C_c^\infty(T_2)$, on a

$$\langle \delta_{T_1},\, f\rangle = \langle \delta_{T_2},\, f \circ \psi\rangle.$$

Rappelons à présent la notion de courant (cf [RS75]).

Définition 1.4.2 — Un *courant* de dimension d sur une variété M est une forme linéaire continue sur l'espace de Frechet $\mathcal{C}^\infty(\Lambda^d T^*_{\mathbb{C}} M)$ des formes différentielles de degré d à valeurs complexes sur M.

Les notions de dérivée de Lie par rapport à un champ de vecteurs ∂_X, de contraction par un champ de vecteurs i_X ou de morphisme de bord d, sont définies naturellement sur les courants par dualité.

La restriction d'une forme différentielle $\omega \mapsto \omega_{|F}$ à un sous-fibré F du fibré tangent est définie par la restriction de la forme linéaire ω aux p-vecteurs appartenant à $\Lambda^p F \subset \lambda^p TM$.

Définition 1.4.3 — On appelle *courant feuilleté* un courant C de dimension p invariant par l'opération de restriction, i.e. tel que pour toute p-forme différentielle ω on ait

$$\langle C,\, \omega\rangle = 0 \text{ si } \omega_{|F} = 0.$$

Remarquons qu'un courant feuilleté de dimension p est fermé si et seulement si il vérifie :

$$\forall\, Y \in C^\infty(F^+) \qquad \partial_Y C = 0.$$

Proposition 1.4.4 — Les deux notions définies précédemment sont équivalentes : pour un feuilletage orienté sur une variété lisse M il est équivalent de se donner

1. une distribution transverse invariante par holonomie,
2. un courant feuilleté fermé.

Démonstration— Dans ce qui suit, nous fixons un recouvrement régulier $(\Omega_i, i \in I)$ de la variété feuilletée. Une distribution transverse relative à ce recouvrement est la donnée d'une distribution T_Ω sur chaque transversale locale associée à un ouvert du recouvrement. Nous allons considérer l'invariance par holonomie relativement à ce recouvrement, ce qui signifie simplement que la distribution définie sur la transversale locale $T_{\Omega\cap\Omega'}$ de l'intersection de deux ouverts trivialisants du recouvrement est égale à la restriction des distributions définies sur T_Ω et $T_{\Omega'}$. La notion de courant étant indépendante du choix d'un recouvrement, il est clair que si une distribution transverse définie sur un recouvrement permet de définir un courant feuilleté fermé, alors on définit bien ainsi une distribution transverse invariante par holonomie indépendamment du recouvrement.

1. Donnons-nous un courant C fermé et de dimension p et associons-lui une distribution transverse. Donnons-nous pour chaque i une p-forme différentielle ω_i à support compact

dans un voisinage compact de $\Omega_i \simeq L_i \times T_i$ et telle que pour tout $t \in T_i$,

$$\int_{L(t)} \omega_i = 1$$

où $L(t)$ désigne la feuille de t. Définissons à présent une distribution transverse invariante δ_i sur la transversale locale T_i en posant, pour une fonction $f \in C_c^\infty(T_i)$,

$$\langle \delta_i,\, f\rangle = \langle C,\, f\omega_i\rangle.$$

Il est clair d'après la définition d'un courant fermé feuilleté qu'une telle distribution est indépendante du choix des formes ω_i. En effet, si $\int_{L(t)} \omega_i = \int_{L(t)} \omega_i' = 1$, alors $(\omega_i - \omega_i')_{|F} = 0$ et donc $\langle C,\, f(\omega_i - \omega_i')\rangle = 0$. De plus, nous voyons immédiatement que la distribution transverse ainsi définie est invariante par holonomie car, en prenant une p-forme $\omega_{i,j}$ à support dans un voisinage compact de $\Omega_i \cup \Omega_j$ et telle que

$$\int_{L(t)} \omega_{i,j} = 1$$

pour $t \in T_i$ ou $t \in T_j$, alors on obtient

$$\delta_i = \delta_j$$

sur $T_{i,j}$.

2. Montrons que la donnée d'une distribution transverse invariante par holonomie subordonnée au recouvrement permet de définir, dans tout ouvert trivialisant du recouvrement $\Omega \simeq L \times T$, un courant C_Ω fermé feuilleté sur Ω.
   On pose pour ω une $p-$forme différentielle à support compact dans Ω

$$\langle C_\Omega,\, \omega\rangle = \langle \delta,\, \int_L \omega_{|F}\rangle,$$

   avec $t \mapsto \int_L \omega_{|F}(l,t)$ la fonction lisse à support compact obtenue sur T en intégrant la $p-$forme différentielle $\omega_{|F}$ restreinte au feuilletage dans le sens des feuilles. Mais il est facile d'étendre la définition de ce courant à M, car l'invariance par holonomie implique que $C_{|\Omega} = C_{|\Omega'}$ sur $\Omega \cap \Omega'$. Il suffit en effet de poser

$$\langle C,\, \omega\rangle = \sum_{i\in I} \langle C_{\Omega_i},\, \varphi_i\omega\rangle$$

   avec φ_i une partition de l'unité adaptée au recouvrement $(\Omega_i)_{i\in I}$.

■

Remarque — Dans [Co82], Connes a montré que, dans le cadre des mesures, ces deux notions étaient équivalentes à une troisième, celle de mesure sur la variété invariante dans la direction du feuilletage, i.e. de mesure invariante par le flot de tous les champs de vecteurs tangents au feuilletage. Une notion de distribution invariante dans la direction du feuilletage, équivalente aux deux notions précédentes, peut également être définie de la même manière.

1.4.2 Mesures transverses

Nous allons appliquer cette équivalence au cas particulier des mesures.

Définition 1.4.5 — Une *mesure transverse* pour le feuilletage est une application $\sigma-$additive $B \mapsto \mu(B)$ de l'ensemble des boréliens transverses (c'est-à-dire les boréliens dans M dont l'intersection avec toute feuille du feuilletage est dénombrable) dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant que :

1. si $\psi : B_1 \to B_2$ est une bijection borélienne entre deux boréliens transverses telle que $\psi(x)$ est sur la feuille de x pour tout $x \in B_1$, alors $\mu(B_1) = \mu(B_2)$;
2. $\mu(K) < \infty$ si K est un compact dans une transversale.

Une telle mesure transverse est donc une distribution admettant une extension aux fonctions boréliennes sur une transversale. Il lui correspond une notion particulière de courant feuilleté fermé : les courants fermés positifs dans la direction des feuilles.

Définition 1.4.6 — On dit qu'un courant fermé de dimension p est *positif* dans la direction des feuilles lorsque $\langle C, \omega\rangle \geq 0$ pour toute $p-$forme différentielle dont la restriction au feuilletage est positive.

Ces deux notions sont équivalentes. Il suffit d'utiliser la proposition précédente et de montrer que la positivité du courant équivaut au fait que la distribution transverse définie est une mesure positive. On retrouve alors une proposition de[Co82].

Proposition 1.4.7 — Pour un feuilletage orienté sur une variété lisse M, il est équivalent de se donner

1. une mesure transverse invariante par holonomie,
2. une mesure invariante dans la direction du feuilletage,
3. un courant feuilleté fermé, positif dans la direction des feuilles.

1.4.3 Définition d'une mesure sur M

Maintenant que nous avons convenablement défini une mesure transverse, il convient de préciser quels sont exactement les objets intégrables pour une telle mesure. Comme nous l'avons évoqué au paragraphe précédent, les "fonctions transverses" (Connes parle de *fonctions généralisées*) mesurables par rapport à la mesure transverse sont les mesures longitudinales, car elles assurent un procédé borélien d'attribution d'une valeur à chaque feuille.
Nous pouvons alors former ainsi une mesure ν sur la variété de départ M, en posant $\nu = \int \lambda d\mu$. Pour cela, on se donne un borélien transverse complet (i.e. qui rencontre toutes les feuilles) T, ainsi qu'une fonction borélienne de M dans T qui associe à chaque point x de la variété un point situé dans l'intersection de la feuille de x et de T. On intègre ainsi la mesure λ par rapport à μ pour tout borélien E de M en posant

$$\nu(E) = \int_T \left(\int_{x \in f^{-1}(t)} \chi_E(x) d\lambda'^t(x) \right) d\mu(t),$$

avec $\lambda'^t(x)$ la mesure définie sur $f^{-1}(t) \subset L(t)$ par restriction de la mesure $\lambda^{L(t)}$ sur la feuille de t.
Donnons comme exemple fondamental d'une fonction transverse la fonction transverse caractéristique d'une transversale T. Il s'agit de la mesure longitudinale λ_T telle que pour $x \in G^{(0)}$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, on ait :

$$\lambda_T^x(f) = \int f(\gamma) d\lambda_T^x(\gamma) = \sum_{\substack{r(\gamma)=x \\ s(\gamma)\in T}} f(\gamma).$$

Notons que la définition précédente est correcte car le support de f est compact et que l'intersection de la feuille de x et de T est dénombrable. De plus, si nous regardons le processus d'intégration décrit précédemment, pour une transversale T mesurable nous obtenons

$$\nu_t(M) = \int \lambda_T d\mu = \mu(T)\cdot$$

Remarquons enfin que la mesure définie sur une feuille L par la mesure longitudinale λ_T est exactement la mesure de comptage :

$$\lambda_T^L(1) = \text{ Card}(L \cap T).$$

1.4.4 Définition d'une mesure sur G

Nous avons vu que la donnée d'une mesure transverse μ sur la variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ et d'une fonction transverse intégrable λ nous permettent de définir une mesure ν sur M. Montrons à présent que nous pouvons alors définir une mesure $(\nu \circ \lambda)$ sur G qui vérifie la propriété $\widetilde{(\nu \circ \lambda)} = (\nu \circ \lambda)$, avec $\tilde{f}(\gamma) = f(\gamma^{-1})$.

Proposition 1.4.8 — On a $\widetilde{(\nu \circ \lambda)} = (\nu \circ \lambda)$, soit

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(G), \qquad \int \varphi(\gamma) d\lambda^x(\gamma) d\nu(x) = \int \varphi(\gamma^{-1}) d\lambda^x(\gamma) d\nu(x).$$

Commençons par remarquer que $\int \varphi(\gamma) d\lambda^x(\gamma) d\nu(x) = B_\varphi(\lambda, \lambda)$, où $B_\varphi(\lambda, \lambda')$ désigne la forme bilinéaire sur les fonctions transverses continues

$$B_\varphi(\lambda, \lambda') = \mu\left\{\lambda[\lambda'(\varphi) \circ s]\right\}.$$

Le résultat que nous voulons montrer est en fait un corollaire de la proposition qui suit.

Proposition 1.4.9 — Pour φ, λ et λ' comme précédemment, on a

$$B_\varphi(\lambda, \lambda') = B_{\tilde{\varphi}}(\lambda', \lambda).$$

Démonstration— Par linéarité de B par rapport à φ, il nous suffit de démontrer la propriété recherchée pour φ positive. Nous pouvons voir dans ce cas qu'il suffit de se limiter, pour λ et λ' aux fonctions transverses caractéristiques. En effet, toute fonction transverse positive mesurable est limite croissante pour la mesure μ de combinaisons linéaires positives de telles fonctions. De plus, la forme bilinéaire B_φ commute, dans chacune de ses composantes, avec de telles limites croissantes. Contentons-nous donc d'étudier $B_\varphi(\lambda_T, \lambda_{T'})$ où T et T' désignent deux transversales compactes contenues dans des ouverts trivialisants, et telles que chacune rencontre au plus une fois tout élément $\gamma \in \mathrm{Supp}(\varphi)$. Les éléments de $\mathrm{Supp}(\varphi) \cap G_{T'}^T$ définissent alors une bijection continue ψ suivant les feuilles, entre une partie compacte de T', $T_1' = T' \cap s(\mathrm{Supp}(\varphi) \cap G_{T'}^T)$, et une partie compacte de T : $T_1 = T \cap r(\mathrm{Supp}(\varphi) \cap G_{T'}^T)$. On a alors :

$$B_\varphi(\lambda_T, \lambda_{T'}) = \mu[(\lambda_{T'}(\varphi) \circ s)\lambda_T] = \int_{t\in T} \sum_{\substack{r(\gamma)=t \\ s(\gamma)\in T'}} \varphi(\gamma) d\mu(t).$$

Or, d'après notre hypothèse sur T et T', pour $t \in T_1$, il existe exactement un seul chemin $\gamma(t)$ tel que $\varphi(\gamma(t)) \neq 0$. Si $t \in T - T_1$, alors $\varphi(\gamma) = 0$ si $r(\gamma) = t$. On a donc

$$B_\varphi(\lambda_T, \lambda_{T'}) = \int_{t\in T_1} \varphi(\gamma(t)) d\mu(t).$$

De même on a

$$B_{\tilde\varphi}(\lambda_{T'}, \lambda_T) = \int_{t'\in T_1'} \tilde\varphi(\gamma'(t')) d\mu(t'),$$

où $\gamma'(t') = \gamma(\psi(t'))^{-1}$. Or, par définition d'une mesure transverse, nous savons que

$$\int_{t\in T_1} \varphi(\gamma(t)) d\mu(t) = \int_{t'\in T_1'} \varphi(\gamma(\psi(t')) d\mu(\psi(t')) = \int_{t'\in T_1'} \varphi(\gamma(\psi(t')) d\mu(t').$$

Or $\varphi\,[\gamma(\psi(t')] = \tilde\varphi\,\left[\gamma(\psi(t')^{-1}\right] = \varphi\,[\gamma'(t')]$, on a donc bien

$$B_\varphi(\lambda_T, \lambda_{T'}) = B_{\tilde\varphi}(\lambda_{T'}, \lambda_T).$$

∎

Remarquons encore que grâce aux propositions (1.4.7) et (1.4.8) on peut déduire le théorème suivant ([Co82] p 43) pour une fonction transverse fidèle (i.e. le support de λ^x est égal à G^x).

Théorème 1.2 — Soit λ une fonction transverse fidèle intégrable. Désignons par $\nu(\mu, \lambda)$ la mesure sur M déduite de ces mesures par le procédé précédent. L'application $\mu \mapsto \nu(\mu, \lambda)$ est une bijection de l'ensemble des mesures transverses invariantes dans l'ensemble des mesures m sur M vérifiant

$$\widetilde{(m \circ \lambda)} = m \circ \lambda.$$

1.5 C*-algèbres du feuilletage

1.5.1 Définition à l'aide d'une 1-densité

La C*-algèbre réduite du feuilletage, qui remplit le rôle "d'algèbre des fonctions continues sur l'espace des feuilles" est l'élément central de la connection établie par Connes à la fin des années 70 entre la théorie géométrique des feuilletages et la théorie des algèbres d'opérateurs ([Co82, Co94, MS88]). Cette C*-algèbre est également, avec les actions de groupes, l'un des premiers exemples de la notion largement développée par la suite de C*-algèbre d'un groupoïde. Celle-ci est définie, par analogie avec la théorie des C*-algèbres de groupes, comme la complétion de l'algèbre involutive des fonctions lisses à support compact $C_c(G)$, par rapport à une norme dépendant des représentations de cette algèbre (cf [Ren80, Ren82]). Nous allons définir deux C*-algèbres pour le feuilletage, car il existe au moins deux manières classiques de compléter l'algèbre $C_c(G)$; la première ne tient compte que de la représentation régulière gauche de l'algèbre et permet de définir la *C*-algèbre réduite* du feuilletage $C_r^*(G)$, tandis que la seconde prend en compte toutes les $*$-représentations de $C_c(G)$ et permet de définir la *C*-algèbre maximale* (ou *pleine*) du feuilletage $C^*_{\max}(G)$, dont $C_r^*(G)$ est un quotient. Nous utiliserons par la suite largement cette propriété que $C_r^*(G)$ est un quotient de $C^*_{\max}(G)$. En effet, les calculs que nous effectuerons finalement auront pour cadre la C*-algèbre réduite du feuilletage, car nous verrons qu'elle a la propriété importante que l'on peut associer une trace sur cette algèbre à une mesure transverse invariante. Nous noterons $C_r^*(M,\mathcal{F})$ la C*-algèbre réduite du feuilletage et $C^*(M,\mathcal{F})$ la C*-algèbre maximale du feuilletage.

Rappelons les lois qui font de $C_c(G)$, l'algèbre des fonctions continues à support compact dans un groupoïde localement compact séparé muni d'un système de Haar λ, une algèbre involutive :

– la multiplication est définie par

$$(f * g)(u) = \int f(v)g(v^{-1}u)d\lambda^{r(u)}(v) \ ;$$

– l'involution est définie par

$$f^*(u) = \overline{f(u^{-1})} \ ;$$

– la topologie sur $C_c(G)$ est donnée par la famille de semi-normes

$$\|f\|_K = \sup_{x\in K} \|f\| \text{, pour } K \text{ un compact dans } G.$$

Définition 1.5.1 — On appelle *$*$-représentation* de $C_c(G)$ dans un espace de Hilbert H un $*$-homomorphisme $\pi : C_c(G) \mapsto \mathcal{B}(H)$ continu pour la topologie faible sur $\mathcal{B}(H)$ et tel que le sous-espace vectoriel engendré par $\{\pi(f)\xi, f \in C_c(G), \xi \in H\}$ est dense dans H.

Une telle représentation est *bornée* lorsque l'on a $\pi(f) \leq \|f\|_1$ pour $f \in C_c(G)$ avec

$$\|f\|_1 = \sup_{x\in G^{(0)}} \{\int |f(\gamma)|\, d\lambda^x(\gamma), \int \left|f(\gamma^{-1})\right| d\lambda^x(\gamma)\}$$

la norme définie sur l'algèbre involutive - c'est en fait un champ d'algèbres - $L^1(G,\lambda) = \left(L^1(G^x,\lambda^x)\right)_{x\in G^{(0)}}$ des fonctions intégrables sur le groupoïde qui contient $C_c(G)$. L'ensemble des $*$-représentations bornées $R(G)$ permet alors de définir une C*-norme sur $C_c(G)$: on pose

$$\|f\|_* = \sup_{\pi\in R(G)} \|\pi(f)\| \, .$$

Nous pouvons à présent définir la C*-algèbre maximale du feuilletage.

Définition 1.5.2 — Soit $(M,\mathcal{F})$, une variété feuilletée, de groupoïde d'holonomie G séparé.

On définit la *C^*-algèbre maximale du feuilletage* par $C^*(M,\mathcal{F}) = C^*(G)$, la C*-algèbre du groupoïde, définie par la complétion de $C_c^\infty(G)$ pour la norme $\| \ \|_*$ que nous venons de définir.

La C*-algèbre réduite est construite en ne prenant la complétion que parmi certaines $*$-représentations. On définit pour tout $x \in G^{(0)}$ une $*$-représentation

$$\pi_x : C_c^\infty(G) \to \mathcal{L}(L^2(G^x, \lambda^x))$$

en posant :

$$(\pi_x(f)g)(u) = \int f(v)g(v^{-1}u)d\lambda^x(v) = f * g(u).$$

Cette intégrale, bien définie pour $g \in L^2(G^x, \lambda^x)$ et $f \in C_c^\infty(G)$, définit naturellement un opérateur borné $\pi_x(f)$ sur $L^2(G^x, \lambda^x)$. On définit alors une norme sur $C_c^\infty(G)$ en posant

$$\|f\|_r = \sup_x \|\pi_x(f)\|.$$

Définition 1.5.3 — Soit $(M,\mathcal{F})$, une variété feuilletée, de groupoïde d'holonomie G séparé. On définit la *C^*-algèbre réduite du feuilletage* par $C_r^*(M,\mathcal{F}) = C_r^*(G)$, la C*-algèbre réduite du groupoïde, définie par la complétion de $C_c^\infty(G)$ pour la norme $\| \ \|_r$ ci-dessus.

Remarques

1. Pour montrer que ces normes existent, il faut montrer que ces représentations sont uniformément bornées par rapport à la norme $\| \ \|_1$. Le lecteur est renvoyé à [Ren82] pour une démonstration de ce résultat.
2. Dans le cas d'une variété feuilletée, nous allons montrer, en utilisant le fibré des demi-densités, que la C*-algèbre réduite ainsi définie est indépendante du système de Haar λ utilisé, si ce système de Haar est construit à partir d'une section lisse strictement positive du fibré des 1-densités sur le feuilletage.
3. La norme $\| \ \|_r$ est dominée par la norme $\| \ \|$, et l'identité sur $C_c(G)$ s'étend naturellement en un $*$-homomorphisme surjectif de $C^*(M,\mathcal{F})$ dans $C_r^*(M,\mathcal{F})$.

1.5.2 Définition de $C_r^*(M,\mathcal{F})$ à l'aide du fibré des demi-densités

Nous avons vu dans la section sur les mesures longitudinales comment construire sur le feuilletage le fibré des $\frac{1}{2}$-densités $|\Lambda|^{\frac{1}{2}} F$. Ceci nous permet de définir un fibré naturel au-dessus de G :

$$\Omega^{\frac{1}{2}} = s^*(|\Lambda|^{\frac{1}{2}} F) \otimes r^*(|\Lambda|^{\frac{1}{2}} F)$$

dont la fibre en γ est donnée par :

$$\Omega_\gamma^{\frac{1}{2}} = |\Lambda|^{\frac{1}{2}} F_{s(\gamma)} \otimes |\Lambda|^{\frac{1}{2}} F_{r(\gamma)}.$$

Nous pouvons alors définir une structure d'$*$-algèbre involutive sur l'ensemble des sections continues à support compact $C_c(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$. Le *produit de convolution* de deux telles sections est défini par la formule suivante

$$(f * g)(\gamma) = \int_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} f(\gamma_1)g(\gamma_2).$$

Rappelons que l'ensemble
$$\left\{(\gamma_1,\gamma_2)\in G^{(2)}\ ,\ \gamma_1\gamma_2=\gamma\right\}$$
peut être identifié naturellement à $G^{r(\gamma)}$ par l'application s appliquée à γ_1 ou à $G_{s(\gamma)}$ par l'application r appliquée à γ_2. L'égalité précédente a alors le sens suivant : pour tous vecteurs $v_1\in\Lambda^n F_{r(\gamma)},\ v_2\in\Lambda^n F_{s(\gamma)}$, nous pouvons évaluer cette section $(f*g)(\gamma)(v_1,v_2)$. Rappelons que $f(\gamma_1)\in|\Lambda|^{\frac12}F_{r(\gamma)}\otimes|\Lambda|^{\frac12}F_{s(\gamma_1)}$ et que $g(\gamma_2)\in|\Lambda|^{\frac12}F_{r(\gamma_2)}\otimes|\Lambda|^{\frac12}F_{s(\gamma)}$; nous pouvons alors évaluer $f(\gamma_1)$ en v_1 et $g(\gamma_2)$ en v_2. On obtient donc en considérant $f(\gamma_1)(v_1)g(\gamma_2)(v_2)$ le produit de deux demi-densités sur $|\Lambda|^{\frac12}F_{s(\gamma_1)}=|\Lambda|^{\frac12}F_{r(\gamma_2)}$, c'est-à-dire une 1-densité lisse et à support compact sur la variété $G^{r(\gamma)}\simeq G_{s(\gamma)}$. Le produit de convolution évalué en (v_1,v_2), $[f*g(\gamma)](v_1,v_2)$ est donc donné par l'intégrale de cette 1-densité sur cette variété. L'involution sur cette variété est donnée par $f^*(\gamma)=\overline{f(\gamma^{-1})}$, ce qui signifie que la demi-densité $f^*(\gamma)$ évaluée en $(v_{s(\gamma)},v_{r(\gamma)})$ est définie par l'évaluation en $(v_{r(\gamma)},v_{s(\gamma)})$ de la demi-densité donnée par $\overline{f(\gamma^{-1})}$, soit
$$f^*(\gamma)(v_1,v_2)=\overline{f(\gamma^{-1})(v_2,v_1)}.$$

Définissons alors l'espace $L^2(G^x)$ des demi-densités de carré intégrable sur G^x comme l'ensemble des sections du fibré $|\Lambda|^{\frac12}$ au-dessus de G^x complété pour la norme définie par
$$\|f\|^2=\int_{G^x}\overline{f(\gamma)}f(\gamma).$$
Il existe pour tout x une représentation naturelle π_x de l'algèbre $C_c(G,\Omega^{\frac12})$ dans l'espace $L^2(G^x)$ donnée par :
$$\pi_x(f)(g)=\int_{\gamma_1\gamma_2=\gamma}f(\gamma_1)\xi(\gamma_2)\ ,\ \text{avec}\ \xi\in L^2(G^x).$$
Notons que, si $x\mathcal{R}y$ sont sur la même feuille, il existe une isométrie naturelle de $L^2(G^x)$ dans $L^2(G^y)$ qui entrelace π_x et π_y. On peut alors définir, comme précédemment, la C*-algèbre réduite du feuilletage.

Définition 1.5.4 — La C*-algèbre réduite du feuilletage $C^*_r(M,\mathcal{F})$ est la complétion de $C_c(G,\Omega^{\frac12})$ pour la norme donnée par
$$\|f\|_r=\sup_{x\in M}\|\pi_x(f)\|\,.$$

Pour voir l'équivalence entre les deux définitions que nous avons données pour cette C*-algèbre, il suffit de voir que toute donnée d'une 1-densité lisse et strictement positive en tout point sur le fibré F fournit une trivialisation globale du fibré $\Omega^{\frac12}$, et permet donc d'identifier les algèbres involutives $C_c(G,\Omega^{\frac12})$ et $C_c(G)$, ainsi que les espaces L^2 et les représentations π_x définies précédemment. La C*-algèbre que nous venons de définir est donc isomorphe à la C*-algèbre définie à l'aide de la donnée d'une 1-densité lisse et strictement positive en tout point sur le fibré F.

1.5.3 C*-algèbre réduite locale pour un feuilletage

Dans le cas particulier d'un feuilletage trivial, la structure de la C*-algèbre réduite est plus simple. Ceci nous permet de mieux comprendre l'aspect local d'un feuilletage quelconque, qui est par définition localement trivial.

Proposition 1.5.5 — Soit $\Omega \overset{\theta}{\simeq} L\times T$ un ouvert trivialisant. On a alors, pour $G(\Omega) \simeq L\times L\times T$ le sous-groupoïde ouvert de G associé au feuilletage restreint à Ω,

1. $C_r^*(G(\Omega)) \simeq C_0(T)\otimes\mathcal{K}$, où $\mathcal{K}$ désigne la C*-algèbre des opérateurs compacts sur $L^2(L)$;
2. l'inclusion $C_c^{\infty,0}(G(\Omega)) \hookrightarrow C_c^{\infty,0}(G)$ se prolonge en un homorphisme isométrique de C*-algèbres :
$$C_r^*(G(\Omega)) \hookrightarrow C_r^*(G) = C_r^*(M,\mathcal{F}).$$

Démonstration—

1. Commençons par montrer l'inclusion $C_r^*(G(\Omega)) \subset C_0(T)\otimes\mathcal{K}$. Identifions $G(\Omega)$ et $L\times L\times T$. Un élément $f\in C_c^{\infty,0}(G)$ peut donc être regardé comme une application continue à support compact de T dans l'ensemble $C_c^\infty(L\times L)$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Or les éléments de $C_c^\infty(L\times L)$ correspondent à des noyaux d'opérateurs compacts sur $L^2(L)$. On a donc une inclusion continue $i : C_c^{\infty,0}(G(\Omega)) \subset C_0(T)\otimes\mathcal{K}$ où cette algèbre est munie de la norme $|\psi| = \sup_{t\in T}\|\psi(x,y,t)\|_{\mathcal{K}}$. De plus, si $f\in C_c^{\infty,0}(L\times L\times T)$ est de la forme $f(l,l',t) = \phi(t)k(l,l')$ avec $\phi\in C_c(T)$ et $k\in C_c^\infty(L\times L)$ alors on a $i(f) = \phi\otimes k$. L'injection i est un homorphisme d'algèbres involutives.

   De plus, on a
$$\|f\|_{C_r^*(G(\Omega))} = \sup_{t\in T}\|(f(.,.,t)\|_{\mathcal{K}} = \|i(f)\|_{C_0(T)\otimes\mathcal{K}}\,.$$
   i se prolonge donc en un homorphisme injectif isométrique de C*-algèbres.

   Pour montrer que cet homomorphisme est surjectif, il suffit de montrer que tout élément $\phi\otimes k\in C_0(T)\otimes\mathcal{K}$ est dans son image. Or c'est vrai pour tout élément $\phi\otimes k$, avec $\phi\in C_c(T)$ et $k\in C_c^\infty(L\times L)$, qui est un sous-ensemble dense dans $C_0(T)\otimes\mathcal{K}$.
2. Soit ι l'homomorphisme injectif d'algèbres involutives de $C_c^{\infty,0}(G(\Omega))$ dans $C_c^{\infty,0}(G)$. On souhaite montrer que cet homomorphisme se prolonge en un homomorphisme isométrique de C*-algèbres. Il suffit pour cela de montrer que
$$\sup_{x\in\Omega}\left\|\pi_x^{G(\Omega)}(f)\right\| = \|f\|_{C_r^*(G(\Omega))} = \|\iota(f)\|_{C_r^*(G)} = \sup_{x\in M}\left\|\pi_x^G(\iota(f))\right\|.$$
   Or $\pi_x^G(\iota(f))$ est la représentation sur l'espace $L^2(G_x,\lambda_x)$ donnée par
$$\left[\pi_x^G(\iota(f))\right](g)(\gamma) = \int_{\gamma'\in G_x} f(\gamma\gamma'^{-1})g(\gamma')d\lambda_x(\gamma').$$
   Soit $x\in M$, et U_x l'application de $L^2(L)$ dans $L^2(G_x)$. On va montrer que cette représentation peut être décomposée en une somme directe de la représentation nulle et de représentations de la forme $\pi_y^{G(\Omega)}(f)$ sur les espaces $L^2(G_y\cap G(\Omega),\lambda_y)$, avec $y\in\Omega$.

   Nous pouvons commencer par regarder la décomposition
$$L^2(G_x,\lambda_x) = L^2(G_x\cap r^{-1}(\Omega),\lambda_x)\oplus L^2(G_x\cap\left(r^{-1}(\Omega)\right)^c,\lambda_x).$$
   Il est clair que si $\gamma'\in G_x\cap\left(r^{-1}(\Omega)\right)^c$, alors $\gamma\gamma'^{-1}\notin G(\Omega)$, et donc $\left[\pi_x^G(\iota(f))\right](g)(\gamma) = 0$. La représentation $\pi_x^G(\iota(f))$ est donc somme directe de la représentation sur $G_x\cap r^{-1}(\Omega)$ et de la représentation nulle.

Etudions sur cet ensemble $G_x \cap r^{-1}(\Omega)$ la relation d'équivalence $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si $\gamma_1\gamma_2^{-1} \in G(\Omega)$. La partition de $G_x \cap r^{-1}(\Omega)$ en classes d'équivalences $C \in \mathcal{C}_x(\Omega)$ est la partition de l'ensemble en composantes connexes. En effet, chacune de ces classes est ouverte, car $\gamma \mapsto \gamma\gamma_1^{-1}$ est continue et $G(\Omega)$ ouvert, et connexe, car si $\theta \circ r(\gamma_1) = (l,t) \in L \times T$ alors les éléments de la classe d'équivalence C_{γ_1} de γ_1 sont tels que $s(\gamma_2) = x$ et $\theta \circ r(\gamma_2) = (l', t)$ (t est fixé par γ_1 et $h(\gamma_1\gamma_2^{-1}) = Id$). La restriction de $\theta \circ r$ à la classe C_{γ_1} est donc un difféomorphisme entre C_{γ_1} et la plaque $\pi_t = r(C) \simeq L \times \{t\}$ de Ω et C_{γ_1} est connexe car L l'est. On peut donc indexer les éléments de $\mathcal{C}$ par la variable $t \in T_x = \{t \in T,\ \exists\ l \in L,\ \theta^{-1}(l,t)\mathcal{R}x\}$, avec la convention que $\theta \circ r(C_t) = L \times \{t\}$. On sait que f est nulle hors de $G(\Omega)$, cela implique donc que $f(\gamma\gamma'^{-1})$ est nul si $\gamma \not\sim \gamma'$. Désignons par r_x la restriction de r à $G_x \cap r^{-1}(\Omega)$, et $r_{x,t}$ celle de r_x à C_t. La représentation $\pi_x^G(\iota(f))$ sur $G_x \cap r^{-1}(\Omega)$ est donc la somme directe des représentations de $C_c^{\infty,0}(G(\Omega))$ sur les $L^2(C_t) \simeq L^2(L \times \{t\})$ définies par

$$\left[\pi_{x,t}^{G(\Omega)}(f)\right](g)(\gamma) = \int_{\gamma' \in C_t} f(\gamma\gamma'^{-1}) g(\gamma') d\lambda_x(\gamma').$$

Or $\theta \circ r_{x,t}$ est un difféomorphisme de C_t sur $L \times \{t\}$, ce qui montre que la représentation précédente $\pi_{x,t}^{G(\Omega)}(f)$ est équivalente à la représentation $\pi_{\theta^{-1}(l,t)}^{G(\Omega)}$ pour tout $l \in L$, ce qui achève la démonstration.

■

1.6 Trace associée à une mesure transverse invariante

Montrons à présent qu'une mesure transverse invariante nous permet de définir une trace naturelle sur la C*-algèbre réduite du feuilletage.
Commençons par rappeler la notion de trace (on utilise la convention habituelle $0 \times \infty = 0$).

Définition 1.6.1 — Une *trace* sur une C*-algèbre A est une application $\tau : A^+ \to [0, +\infty]$ vérifiant :

1. τ est un *poids*, i.e. pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ et pour $u, v \in A^+$, $\tau(\lambda u + \mu v) = \lambda\tau(u) + \mu\tau(v)$;
2. $\forall u \in A, \quad \tau(uu^*) = \tau(u^*u)$.

On définit alors $A_\tau = \mathrm{Vect}\{u \in A^+, \tau(u) < +\infty\}$.

Si τ vérifie de plus la propriété

$$\tau(u) = \sup\{\tau(v), v \leq u,\ \tau(v) < +\infty\}$$

la trace est dite semi-finie.

On a alors les propriétés suivantes (cf e.g. [Dix69]).

Proposition 1.6.2 — Soit A une C*-algèbre, et τ une trace sur A.

1. L'ensemble A_τ est un idéal bilatère de A.
2. Il existe une unique forme linéaire sur A_τ prolongeant τ.

Donnons-nous à présent une mesure transverse invariante μ et une 1-densité lisse strictement positive sur le feuilletage λ, dont l'accouplement forme une mesure ν sur $G^{(0)} = M$. Nous avons vu que nous pouvions en déduire une mesure $\nu \circ \lambda$ sur G. Désignons par $\mathcal{L}^2(G) = \mathcal{L}^2(G, \nu \circ \lambda)$ les fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure $\nu \circ \lambda$. Définissons alors, pour $f \in C_c(G)$, la trace de l'élément $f^* * f$ par

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(f^* * f) &= \int_{\gamma \in G^{(0)}} f^* * f(\gamma) d\nu(\gamma) \\ &= \int_{x \in M} f^* * f(x) d\nu(x) \\ &= \int_M \int_G \bar{f}(\gamma) f(\gamma) d\lambda^x(\gamma) d\nu(x) = \|f\|^2_{\mathcal{L}^2(G)} . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Proposition 1.6.3 — L'application Tr décrite précédemmment définit une trace semi-finie et semi-continue inférieurement (s.c.i.) sur la C*-algèbre réduite du feuilletage $C^*_r(M, \mathcal{F})$.

Démonstration— Nous allons démontrer ce résultat en deux étapes. La première consiste à montrer, grâce aux propriétés d'invariance de la mesure transverse, que $\mathrm{Tr}(f^* * f) = \mathrm{Tr}(f * f^*)$. La seconde est de montrer que Tr est un poids semi-fini et s.c.i. grâce à la théorie générale des poids.

1. Il nous faut montrer que $\mathrm{Tr}(f^* * f) = \mathrm{Tr}(f * f^*)$. Or, en reprenant les notations de la section précédente sur les mesures transverses, nous voyons que $\mathrm{Tr}(f^* * f) = \nu \circ \lambda(|f|^2)$.

   D'après la proposition (1.4.9), on a $\nu \circ \lambda = \widetilde{\nu \circ \lambda}$, donc

   $$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(f^* * f) = \nu \circ \lambda(|f|^2) &= \widetilde{\nu \circ \lambda}(|f|^2) \\ &= \nu \circ \lambda(\left|\tilde{f}\right|^2) = \mathrm{Tr}(f * f^*). \end{aligned}$$

2. Nous allons nous appuyer sur le résultat suivant, dont une démonstration est donnée en annexe.

   Proposition A.0.1 — Soit A une C*-algèbre, et q une application semi-continue inférieurement (s.c.i.) $q : A \to [0, +\infty]$ vérifiant pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $a, b \in A$

   1) $q(\lambda a) = |\lambda|^2 q(a)$;
   2) $q(a - b) + q(a + b) = 2(q(a) + q(b))$;
   3) $q(ab) \leq \|a\|^2 q(b)$.

   Alors l'application de A^+ dans $[0, +\infty]$ donnée par $x \mapsto q(x^{\frac{1}{2}})$ définit un poids s.c.i. sur A.

   Remarquons qu'il suffit de définir la fonction q s.c.i. vérifiant les conditions 1), 2), 3) précédentes sur une sous-algèbre involutive dense $B \subset A$. En effet le prolongement s.c.i. de q à A vérifie alors sur A les mêmes conditions. On applique ceci à la fonction $q(x) = \|x\|_2^2$ définie sur la sous-algèbre dense $C_c(G)$ de l'algèbre $C^*_r(M, \mathcal{F})$. Les conditions 1), 2), 3) sur q sont immédiatement vérifiées, et q est finie sur une sous-algèbre dense de

$C_r^*(M,\mathcal{F})$, et donc semi-finie. Il ne nous reste qu'à montrer que q est s.c.i. sur $C_c(G)$. Nous allons dans ce but introduire une unité approchée pour la convolution dans $C_c(G)$. Supposons G muni d'une métrique et donnons-nous une suite (ε_n) de fonctions à support compact, lisses et positives, vérifiant :

(a) $\forall x \in G^{(0)},\ n \in \mathbb{N},\ \ \int \varepsilon_n(\gamma)d\lambda^x(\gamma) = 1$;

(b) $\mathrm{Supp}(\varepsilon_n) \subset B(G^{(0)}, 1/n) = \left\{x \in G, d(x, G^{(0)}) \leq 1/n\right\}$.

On voit facilement qu'une telle suite de fonctions existe ($G^{(0)}$ est compact), et qu'elle définit une unité approchée à gauche et à droite pour $C_c(G)$. C'est donc également une unité approchée pour la C*-algèbre. De plus, une telle suite de fonction possède la propriété que, pour $f \in \mathcal{L}^2(G)$:

$$\|f * \varepsilon_n - f\|_{\mathcal{L}^2} \to 0.$$

En effet, remarquons tout d'abord que cette propriété définit un sous-ensemble fermé dans $\mathcal{L}^2(G)$. Il suffit donc de la vérifier pour toute fonction $f \in C_c(G)$. Or, pour la norme de la convergence uniforme sur tout compact, la norme de cette suite de fonctions $f * \varepsilon_n - f$ tend vers 0 puisque ε_n est une unité approchée. Or cette fonction est une fonction continue à support dans un compact indépendant de n. On en déduit donc bien que :

$$\|f * \varepsilon_n - f\|_{\mathcal{L}^2(G)} \to 0.$$

Pour montrer que q est s.c.i., nous allons écrire $q(f)$ comme le supremum d'une suite de fonctions continues. Désignons par C la mesure totale de la variété M pour la mesure ν, par $\|f\|_{2,x}$ la norme de f dans $L^2(G^x, \lambda^x)$ et par $\|f\|_2$ la borne supérieure, pour $x \in M$ des normes $\|f\|_{2,x}$.

– Les fonctions $f \mapsto q(f * \varepsilon_n)$ sont continues pour $f \in C_c(G)$, car

$$\|f * \varepsilon_n\|_{\mathcal{L}^2(G)} \leq C \sup_{x \in M} \|f * \varepsilon\|_{2,x} \leq C\, \|\varepsilon_n\|_2 \sup_{\substack{x \in M \\ g \in L^2(G^x) - \{0\}}} \frac{\|f * g\|_{2,x}}{\|g\|_{2,x}} = C\, \|\varepsilon_n\|_2\, \|f\|.$$

– On a $\sup q(f * \varepsilon_n) \leq q(f)$ par l'inégalité usuelle pour la convolution $\|f * g\|_{2,x} \leq \|f\|_{2,x}\, \|g\|_{1,x}$ $(f, g \in C_c(G))$. Par ailleurs, nous venons de voir que, pour $f \in \mathcal{L}^2(G)$, $\|f * \varepsilon_n - f\|_2 \to 0$, ce qui permet de conclure que

$$q(f) = \sup q(f * \varepsilon_n).$$

■

Remarque — Nous avons vu dans la section précédente une définition de la C*-algèbre réduite du feuilletage indépendante de la 1-densité λ donnée sur le fibré F. Nous pouvons ici de même définir la trace indépendamment du choix d'une 1-densité sur la C*-algèbre réduite du feuilletage à partir de la donnée d'une mesure transverse invariante. Commençons par définir l'espace des sections de carré intégrable sur G, $L^2(G, \Omega^{\frac{1}{2}}, \mu)$. C'est la complétion de $C_c(G, \Omega^{\frac{1}{2}})$ pour la norme donnée par

$$\|f\|_2^2 = \int_{x \in G^{(0)}} \int_G \overline{f(\gamma)} f(\gamma) d\mu(x).$$

Pour expliciter cette formule, remarquons tout d'abord que l'intégrale $\int_{G^x} \overline{f(\gamma)} f(\gamma)$ est égale au produit de convolution $f^* * f(x)$. Or la convolution $f^* * f$ calculée sur un élément x de la diagonale $G^{(0)}$ est un élément de $|\Lambda|^{\frac{1}{2}} F_x \otimes |\Lambda|^{\frac{1}{2}} F_x$. Par l'évaluation, $a \otimes b \mapsto ab$, on définit ainsi naturellement une 1-densité sur F. D'après ce qui précède, une telle densité peut être accouplée à la mesure transverse μ pour former une mesure sur M.

On définit alors la trace de $f^* * f$ par l'intégration de cette mesure sur M.

$$\mathrm{Tr}(f^* * f) = \|f\|_2^2 = \int_M (f^* * f)(x) d\mu(x).$$

Comme dans la section précédente, il suffit de fixer une 1-densité lisse sur F strictement positive pour identifier les deux traces que nous venons de définir.

Chapitre 2

Résidu de Wodzicki d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété compacte

2.1 Opérateurs pseudo-différentiels classiques

Nous rappelons dans cette section les éléments de base de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Pour les démonstrations des propositions que nous utilisons, le lecteur est renvoyé aux nombreux ouvrages sur cette théorie désormais classique, parmi lesquels [Shu87, Tay81, Trè80, AG91].

2.1.1 Espaces de symboles $\mathcal{S}^{m_0}(U)$

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, l un entier et m_0 un réel, appelons $\mathcal{S}^{m_0}(U,\ \mathbb{R}^l)$ l'ensemble des fonctions $p(x,\xi) \in \mathcal{C}^\infty(U \times \mathbb{R}^l)$ vérifiant la propriété suivante :
pour tout compact $K \subset U$, pour tous multi-indices α, β, il existe une constante $C_{K,\alpha,\beta}$ telle que pour tout $(x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^n$, on ait :

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x,\xi)| \leq C_{K,\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m_0-|\alpha|}.$$

L'inégalité précédente permet de définir, en prenant, pour K, α, β fixés, la borne inférieure des constantes $C_{K,\alpha,\beta}$, une famille de semi-normes qui font de $\mathcal{S}^{m_0}(U,\ \mathbb{R}^l)$ un espace de Fréchet. Notons aussi que si $m_0' < m_0$, alors $\mathcal{S}^{m_0'}(U,\ \mathbb{R}^l) \subset \mathcal{S}^{m_0}(U,\ \mathbb{R}^l)$, et définissons $\mathcal{S}^{-\infty}(U,\ \mathbb{R}^l)$ comme l'intersection des $\mathcal{S}^{m_0}(U,\ \mathbb{R}^l)$ pour $m_0 \in \mathbb{R}$. Nous noterons enfin $\mathcal{S}^{m_0}(U) = \mathcal{S}^{m_0}(U,\ \mathbb{R}^n)$, lorsque $l = n$.

Définition 2.1.1 — Soient $(m_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels tendant vers $-\infty$, $\overline{m_r} = \max_{k\geq r} m_k$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathcal{S}^{m_k}(U)$. On dira que $a \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^n)$ admet une expansion asymptotique par rapport à la suite a_k, et on écrira

$$a(x,\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,\xi)$$

lorsque pour tout entier $r \geq 1$ la propriété suivante est vérifiée :

$$a(x,\xi) - \sum_{k=0}^{r-1} a_k(x,\xi) \in \mathcal{S}^{\overline{m_r}}(U).$$

On a alors la proposition suivante.

Proposition 2.1.2 — Soit une suite $a_k \in \mathcal{S}^{m_k}(U)$ telle que $m_k \to -\infty$. Il existe $p \in \mathcal{S}^{m_0}$, unique à un élément de $\mathcal{S}^{-\infty}(U)$ près, tel que

$$p \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Etudions à présent une classe de symboles généralisant les symboles polynomiaux en ξ (nous verrons plus loin que les symboles polynomiaux en ξ correspondent aux opérateurs différentiels) : les symboles polyhomogènes.

Définition 2.1.3 —

1. On dit qu'une fonction $p \in \mathcal{C}^\infty(U \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$ est *positivement homogène* de degré $l \in \mathbb{C}$ en la seconde variable si l'on a :
$$\forall (x, \xi, \lambda) \in U \times (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}_+^*, \;\; p(x, \lambda\xi) = \lambda^l p(x, \xi).$$
2. Soit $m \in \mathbb{C}$ et $m_0 = \Re e\, m$. On désigne par $\mathcal{S}^m_{hom}(U)$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}^{m_0}(U)$ formé par les éléments p polyhomogènes, c'est-à-dire les éléments qui admettent une expansion asymptotique polyhomogène :
il existe une suite $(a_{m-k})_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(U \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$ dont les termes sont respectivement positivement homogènes de degré $m-k$ en ξ et une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty$ de ξ valant 0 au voisinage de $\xi = 0$ et 1 si $|\xi| \geq 1$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$p - \chi \sum_{k=0}^{n-1} a_{m-k} \in \mathcal{S}^{m_0-n}(U).$$

Notons que pour tout k, on a $\chi a_{m-k} \in \mathcal{S}^{m_0-k}(U)$. De plus, la famille a_{m-k} est alors uniquement déterminée pour $|\xi| > 1$: en effet la formule suivante permet de calculer chacun de ces termes par récurrence.

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{(p - \sum_{k=0}^{n-1} a_{m-k})(x, \lambda\xi)}{\lambda^{m-n}} = a_{m-n}(x, \xi).$$

Notons que pour tout $m \in \mathbb{C}$, on a $\mathcal{S}^{-\infty}(U) \subset \mathcal{S}^m_{hom}(U)$. De plus, l'intersection de $\mathcal{S}^m_{hom}(U)$ et de $\mathcal{S}^{m'}_{hom}(U)$ pour $m - m' \notin \mathbb{Z}$ est égale à $\mathcal{S}^{-\infty}(U)$.

2.1.2 Opérateurs pseudo-différentiels classiques

A chaque élément p de $\mathcal{S}^{m_0}(U)$ on peut associer un opérateur $P = \mathrm{OP}(p) : \mathcal{C}_c^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(U)$ en posant :

$$(Pu)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) e^{i<x,\xi>} d\xi$$

où $\hat{u}$ désigne la transformée de Fourier de u.
En utilisant l'expression de la transformée de Fourier, on peut donner une expression de $P = \mathrm{OP}(p)$ sous la forme d'un opérateur de noyau k. On peut en effet écrire

$$(Pu)(x) = (2\pi)^{-n} \int\int p(x, \xi) u(y) e^{i<x-y,\xi>} d\xi dy.$$

On en déduit :

$$(Pu)(x) = \int_U k(x,y)u(y)dy \text{ avec } k(x,y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} p(x,\xi)e^{i<x-y,\xi>}d\xi.$$

Le noyau k est une distribution $\mathcal{C}^\infty$ hors de la diagonale.

Définition 2.1.4 —

1. On dit qu'un opérateur à noyau est *proprement supporté* si les projections de $\mathrm{Supp}(k)$ sur U par rapport à la première et à la seconde coordonnées sont des applications propres.
2. Un opérateur linéaire P de $C_c^\infty(U)$ dans $C^\infty(U)$ est dit *régularisant* lorsque le noyau de Schwartz k de P est une fonction $\mathcal{C}^\infty(U \times U)$.

On a la propriété suivante pour les opérateurs régularisants proprement supportés.

Proposition 2.1.5 — Un opérateur régularisant proprement supporté peut toujours s'écrire sous la forme $\mathrm{OP}(p)$, avec $p \in \mathcal{S}^{-\infty}(U)$. Réciproquement, tout opérateur de cette forme est régularisant.

Définition 2.1.6 —

1. Un *opérateur pseudo-différentiel* (classique) est un opérateur de la forme $P = OP(p)$, $p \in \mathcal{S}^m_{hom}(U)$. Cette fonction $p \in \mathcal{S}^m_{hom}(U)$ est appelée *le symbole total* de l'opérateur P. Le symbole total possède une expansion asymptotique de la forme :

$$p(x,\xi) \sim \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{m-k}(x,\xi)$$

   où a_{m-k} est une fonction positivement homogène de degré $m-k$ en ξ appartenant à $\mathcal{C}^\infty(U \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$. La donnée de cette expansion asymptotique permet de retrouver le symbole total à une fonction $\mathcal{S}^{-\infty}$ près.
2. On appelle *ordre* d'un opérateur pseudo-différentiel le nombre complexe $m-k$ tel que dans le développement asymptotique des symboles $p \in \mathcal{S}^m_{hom}(U)$, le premier terme non identiquement nul est positivement homogène en ξ d'ordre $m-k$.
3. On appelle *symbole principal* d'un opérateur P d'ordre m la fonction

$$\sigma_m(P) \in C^\infty(U \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$$

   positivement homogène de degré m en la seconde variable donnée par

$$\sigma_m(P)(x,\xi) = \sigma(p)(x,\xi) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{p(x,\lambda\xi)}{\lambda^m}.$$

   Le symbole principal est le premier terme du développement asymptotique précédent.
4. On notera $\mathcal{P}^m(U)$ la classe des opérateurs pseudo-différentiels proprement supportés d'ordre m et $\mathcal{P}^{-\infty}(U) = \bigcap_{m\in\mathbb{C}} \mathcal{P}^m(U)$ l'ensemble des opérateurs régularisants proprement supportés. On désigne par $\mathcal{P}^m_c(U)$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}^m(U)$ formé des opérateurs pseudo-différentiels à support compact, c'est à dire ceux pour lesquels le support de $k(x,y)$ dans $U \times U$ est compact.

On peut donner une définition équivalente en disant qu'un opérateur pseudo-différentiel proprement supporté P est un opérateur continu de $\mathcal{C}^\infty(U)$ vers $\mathcal{C}^\infty(U)$ pour lequel :

$$p(x,\xi) = e^{-i<x,\xi>}P(e^{i<x,\xi>}) \in \mathcal{S}^m_{hom}(U).$$

On munit l'ensemble $\mathcal{P}^m(U)$ des opérateurs pseudo-différentiels proprement supportés de la topologie des semi-normes définies sur son symbole total.

La propriété suivante nous permet de ramener les problèmes de support d'un opérateur pseudo-différentiel à des problèmes de support pour un opérateur régularisant. Ceci ramène, dans de nombreux cas, l'étude des opérateurs pseudo-différentiels à celle des opérateurs pseudo-différentiels proprement supportés.

Proposition 2.1.7 — Tout opérateur pseudo-différentiel s'écrit comme la somme d'un opérateur pseudo-différentiel proprement supporté et d'un opérateur régularisant.

2.1.3 Structure d'algèbre de l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels

Poursuivons nos rappels sur les opérateurs pseudo-différentiels en énonçant quelques propriétés sur la structure d'algèbre involutive de ces opérateurs. Désignons par $\mathcal{P}(U)$ l'espace vectoriel engendré par les combinaisons linéaires d'opérateurs pseudo-différentiels proprement supportés dans l'ouvert U. Remarquons tout d'abord que si la somme d'opérateurs pseudo-différentiels proprement supportés d'ordres ne différant pas d'un entier n'est plus un opérateur pseudo-différentiel, on peut néanmoins l'écrire sous la forme $\mathrm{OP}(a)$, avec un $a \in \mathcal{S}^{m_0}(U)$, grâce à la proposition (2.1.2). Notons ensuite que l'on peut composer naturellement deux éléments de $\mathcal{P}(U)$. Le noyau $k_{P\circ Q}$ de l'opérateur $P\circ Q$ est donné par : $k_{P\circ Q}(x,y) = \int k_P(x,z)k_Q(z,y)dz$; c'est le noyau d'un opérateur pseudo-différentiel proprement supporté. D'autre part, définissons l'adjoint P^* de P comme l'unique application linéaire de $\mathcal{C}^\infty_c(U)$ sur lui-même définie par :

$$\forall u,v \in \mathcal{C}^\infty_c(U), (P^*u,v) = (u,Pv) = \int u(x)\overline{(Pv)x}dx.$$

On peut alors montrer que l'application $*$ est une involution de $\mathcal{P}^m(U)$ dans lui-même qui transforme le symbole de la manière suivante :

$$a^*(x,\xi) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha_x\partial^\alpha_\xi\overline{a(x,\xi)}.$$

Proposition 2.1.8 —

1. Pour tous $m,n \in \mathbb{C}\cup\{-\infty\}$ on a : $\mathcal{P}^m\circ\mathcal{P}^n \subset \mathcal{P}^{m+n}$. De plus $\sigma_{m+n}(P\circ Q) = \sigma_m(P)\sigma_n(Q)$ si P et Q sont respectivement des éléments de ces ensembles.
2. $\mathcal{P}$ est une algèbre involutive filtrée par $\mathbb{R}$ et graduée par $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. La propriété précédente fait de $\mathcal{P}^{-\infty}$ un idéal bilatère de cette algèbre involutive.
3. L'ensemble $\mathcal{P}^{\mathbb{Z}}$ des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre entier est une sous-algèbre involutive de $\mathcal{P}$.
4. On a, pour les symboles totaux, la formule de composition suivante :

$$\sigma(PQ)(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{[\partial^\alpha_\xi\sigma(P)](x,\xi)[\partial^\alpha_x\sigma(Q)](x,\xi)}{\alpha!}\ .$$

2.1.4 Opérateurs elliptiques, parametrix

Nous pouvons à présent parler de la classe des opérateurs “presque inversibles” dans cette algèbre involutive : les opérateurs elliptiques.

Définition 2.1.9 — Un opérateur $P \in \mathcal{P}^m$ est elliptique si son symbole principal ne s'annule pas.

La propriété essentielle des opérateurs elliptiques est de posséder un quasi-inverse.

Proposition 2.1.10 — Soit $P \in \mathcal{P}^m$ un opérateur elliptique. Il existe alors un opérateur pseudo-différentiel $Q \in \mathcal{P}^{-m}$ appelé parametrix tel que :

$$PQ - I \in \mathcal{P}^{-\infty}(U) \text{ et } QP - I \in \mathcal{P}^{-\infty}(U)\cdot$$

Démonstration— Supposons que cet opérateur Q existe. Alors Q admet un symbole polyhomogène $q(x,\xi) = \chi(\xi)\sum_{l=0}^{\infty} q_{-m-l}(x,\xi)$ tel que la composition du symbole p de P avec q soit égal à 1, le symbole de l'identité. Ecrivons cette égalité pour $|\xi| \geq 1$:

$$\begin{aligned} 1 = (p \circ q)(x,\xi) &\sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha p \partial_x^\alpha q \\ &\sim p_m q_{-m} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(p_m q_{-m-l} + \sum_{\substack{k+j+|\alpha| = l \\ j<l}} \partial_\xi^\alpha p_{m-k}\partial_x^\alpha q_{-m-j}\right). \end{aligned}$$

En isolant chaque degré d'homogénéité, nous avons donc :

$$\begin{aligned} p_m q_{-m} &= 1 \qquad \text{et , } \forall l > 0 \\ p_m q_{-m-l} + \sum_{\substack{j<l \\ j+k+|\alpha|=l}} \frac{[\partial_x^\alpha p_{m-k}][\partial_x^\alpha q_{-m-j}]}{\alpha!} &= 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une formule permettant de déterminer q_{-m} et chacun des termes q_{-m-l} en fonction des p_{m-k} et des q_{-m-j} avec $j < l$. On peut donc construire par récurrence cette suite de fonctions positivement homogènes. Ainsi, si réciproquement nous nous donnons un opérateur proprement supporté $Q = \mathrm{OP}(q)$ dont le symbole total est un élément de $\mathcal{S}^m_{hom}(U)$ vérifiant

$$q(x,\xi) \sim \sum q_{-m-l}(x,\xi)$$

avec $q_{-m-l}(x,\xi)$ les symboles homogènes calculés grâce aux formules de récurrence précédentes, alors Q est bien dans $\mathcal{P}^{-m}$ et il vérifie

$$PQ - I = R \in \mathcal{P}^{-\infty}.$$

De même, on peut trouver Q' vérifiant

$$Q'P - I = R' \in \mathcal{P}^{-\infty}.$$

Alors, on a $Q'PQ = Q' + Q'R = Q + R'Q$. Or $Q'R \in \mathcal{P}^{-\infty}$ et $R'Q \in \mathcal{P}^{-\infty}$. Donc Q et Q' ne diffèrent que d'un opérateur régularisant. La proposition est ainsi démontrée. ∎

2.1.5 Opérateurs pseudo-différentiels sur une variété

Action de difféomorphismes

Les classes d'opérateurs $\mathcal{P}^m(U), \mathcal{P}_c^m(U)$ et $\mathcal{P}^{-\infty}(U)$ sont invariantes sous l'action de difféomorphismes. En effet, donnons-nous un difféomorphisme Φ entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\Phi : U \to V$, Φ^* le difféomorphisme induit de $\mathcal{C}^\infty(V)$ sur $\mathcal{C}^\infty(U)$ et un opérateur pseudo-différentiel P sur U. On peut alors définir un nouvel opérateur linéaire $\Phi^\sharp P$ de $\mathcal{C}_c^\infty(V)$ vers $\mathcal{C}^\infty(V)$, qui soit l'opérateur rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_c^\infty(V) \arrow[r, "\Phi^\sharp P"] \arrow[d, "\Phi^*"'] & \mathcal{C}^\infty(V) \arrow[d, "\Phi^*"] \\
\mathcal{C}_c^\infty(U) \arrow[r, "P"'] & \mathcal{C}^\infty(U)
\end{tikzcd}$$

$\Phi^\sharp P = (\Phi^*)^{-1} \circ P \circ \Phi^*$ est alors un opérateur pseudo-différentiel de même ordre que P. On a de plus, pour les symboles totaux, la formule de transformation suivante : si $a(x,\xi)$ désigne le symbole total de P et $a^\Phi(x,\xi)$ celui de $\Phi^\sharp P$, on a :

$$a^\Phi(\Phi(x),\xi) \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\psi_\alpha(x,\xi)}{\alpha!} a^{(\alpha)}(x, {}^t\Phi'(x)\xi),$$

où $a^{(\alpha)}(x,\xi) = \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)$ et $\psi_\alpha(x,\xi) = \partial_y^\alpha e^{i<\rho_x(y),\xi>}|_{y=x}$, avec $\rho_x(y) = \Phi(y) - \Phi(x) - \Phi'(x)(y - x)$ (Φ' désigne la différentielle de Φ). Notons que la différentielle $(d\rho_x)$ évaluée en $y = x$ est nulle. Ainsi $\psi_\alpha(x,\xi)$ est polynomial en ξ de degré plus petit que $\frac{|\alpha|}{2}$, et chacun des termes de la somme précédente est de degré au plus $m - \frac{|\alpha|}{2}\cdot$ La somme précédente est donc bien définie.

Remarquons également que si le symbole total est modifié par l'action d'un difféomorphisme, le symbole principal est lui indépendant des coordonnées choisies pour l'exprimer. En effet, en notant $\eta = {}^t\Phi'^{-1}\xi$ et $y = \Phi(x)$, on a :

$$\sigma_m(\Phi^\sharp P)(y,\eta) = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{a^\Phi(y,\eta)}{\lambda^m} = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{a(x,\xi)}{\lambda^m} = \sigma_m(P)(x,\xi).$$

Opérateurs pseudo-différentiels sur une variété

Ainsi, la notion d'opérateur pseudo-différentiel peut être étendue aux opérateurs agissant sur une variété. Un opérateur linéaire $P : C_c^\infty(M) \to C^\infty(M)$ sur une variété M est appelé pseudo-différentiel si dans tout atlas il est localement un opérateur pseudo-différentiel de $\mathcal{P}^m(U)$. Cela signifie que pour toute carte de M,

$$M \supset \tilde{U} \underset{\Phi}{\simeq} U \subset \mathbb{R}^n$$

l'opérateur linéaire défini par $\Phi^\sharp P : \mathcal{C}_c^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(U)$ et

$$(\Phi^\sharp P) = (\Phi^*)^{-1} \circ P_{|\tilde{U}} \circ \Phi^*$$

est dans $\mathcal{P}^m(U)$ (on désigne par $P_{|\tilde{U}}$ l'opérateur de $C_c^\infty(\tilde{U})$ dans $\mathcal{C}^\infty(\tilde{U})$ qui à $f \in C_c^\infty(\tilde{U})$ associe $(Pf)_{|\tilde{U}}$). On notera $\mathcal{P}^m$ l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels proprement supportés. Comme nous avons vu que le symbole principal d'un opérateur ne dépendait pas de la carte choisie pour l'exprimer, nous pouvons définir une notion globale de symbole principal en utilisant le fibré cotangent à la variété.

Définition 2.1.11 — Le symbole principal d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m sur une variété M est une fonction lisse σ_m sur le fibré cotangent privé de la section nulle : $T^*M - \{0\}$, homogène de degré m en la seconde variable.

On peut alternativement, en divisant par $|\xi|^m$ définir le symbole principal comme une fonction lisse σ_m sur le fibré cotangent en sphère S^*M.

Opérateurs elliptiques et parametrix

On peut dans cette situation appeler elliptiques les opérateurs dont le symbole principal ne s'annule pas.

Commençons par énoncer un lemme.

Lemme 2.1.12 — Soit P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m sur une variété M, et $U \subset M$ un ouvert de carte. On suppose que le symbole principal de P est non nul sur U. Pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(U)$, il existe alors un opérateur pseudo-différentiel Q d'ordre $-m$ à support compact dans U, tel que l'opérateur $PQ - \varphi$ est un opérateur régularisant proprement supporté dans U.

Démonstration du lemme Nous avons vu que l'opérateur P restreint à l'ouvert U admet une parametrix proprement supportée $\hat{Q}$:

$$P\hat{Q} = I_U - R$$

avec R un élément de $\mathcal{P}^{-\infty}(U)$. Soit $\psi \in C_c^\infty(U)$ valant 1 sur un voisinage du support de φ et posons $Q = \psi\hat{Q}\varphi$. L'opérateur Q est à support compact dans U, et les opérateurs $(1-\psi)\hat{Q}\varphi$ et $R\varphi$ sont régularisants et proprement supportés dans U. L'opérateur $PQ - \varphi$ est donc régularisant et proprement supporté. ⊟

On a alors la proposition suivante.

Proposition 2.1.13 — Soit $P \in \mathcal{P}^m(M)$ un opérateur elliptique. Il existe un opérateur proprement supporté Q, appelé parametrix, tel que les opérateurs $PQ - I$ et $QP - I$ sont des opérateurs régularisants proprement supportés.

Démonstration— Donnons-nous un atlas $(U_i)_{i\in I}$ pour la variété M et $(\varphi_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité C^∞ adaptée au recouvrement.

Nous avons vu qu'il existe un opérateur Q_i à support compact dans U_i et tel que l'opérateur P restreint à U_i vérifie :

$$PQ_i = \varphi_i - R_i$$

avec R_i un élément de $\mathcal{P}^{-\infty}(U_i)$. L'opérateur $Q = \sum Q_i$ est par construction un opérateur pseudo-différentiel proprement supporté d'ordre $-m$ sur la variété M, et c'est bien une parametrix à gauche pour P. Par un lemme analogue au précédent, nous pouvons construire une parametrix à droite Q' pour P. En étudiant QPQ', on en déduit que la différence entre Q et Q' est un opérateur régularisant. ■

Topologie pour les opérateurs classiques

Nous pouvons munir l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels classiques d'une topologie. Commençons par décrire la topologie sur $\mathcal{S}^m_{hom}(U)$. Posons $m_0 = \Re e\, m$ et remarquons tout d'abord que la topologie définie par les semi-normes sur $\mathcal{S}^{m_0}(U)$ n'est pas adaptée car $\mathcal{S}^m_{hom}(U)$ n'est pas fermé pour cette topologie. Nous avons besoin d'une topologie plus compliquée. Le symbole principal de ce symbole peut être considéré comme une fonction C^∞ sur le fibré en sphère S^*U. La topologie naturelle pour les symboles principaux est donc celle de la convergence uniforme sur tout compact de la fonction et de toutes ses dérivées. Or nous voulons ce type de convergence, non seulement pour le symbole principal, mais pour les symboles de tous ordres. Donnons-nous une fonction $\chi(\xi)$ nulle au voisinage de 0 et valant 1 si $|\xi| \geq 1$. La topologie sur les symboles polyhomogènes est la moins fine rendant continues les applications $y \mapsto \sigma_{m-j}(y)$ et $y \mapsto \sigma(y) - \chi(\xi) \sum_{j=0}^N \sigma_{m-j}(y)$, à valeurs respectivement dans $C^\infty(S^*U)$ et dans $\mathcal{S}^{m_0-N-1}(U)$. C'est une limite projective de toplogies métrisables, et elle est métrisable. Pour cette topologie, une suite $\sigma(n)$ de symboles totaux dans $\mathcal{S}^m_{hom}(U)$ tend vers 0 lorsque pour tout entier N, on a :

1. pour $0 \leq j \leq N$, la suite $\sigma_{m-k}(n)$ tend vers 0 pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de la fonction et de toutes ses dérivées ;
2. la suite $\sigma(n) - \chi(\xi) \sum_{j=0}^N \sigma_{m-j}(n)$ tend vers 0 pour la topologie définie par les seminormes sur $\mathcal{S}^{m_0-N}(U)$.

De plus, cette topologie est invariante par difféomorphismes et peut donc être étendue aux opérateurs pseudo-différentiels classiques sur les variétés.

2.1.6 Opérateurs agissant sur des fibrés

On peut également étendre les définitions et les propriétés que nous avons détaillées aux opérateurs agissant sur des fibrés. Donnons-nous ainsi deux fibrés vectoriels $\mathcal{C}^\infty$, E et F, de rang k et l au-dessus d'une variété lisse M, notons π la projection naturelle $\pi : T^*M \to M$ et π^*E, π^*F les fibrés vectoriels au-dessus de T^*M correspondants. On désigne alors par $\mathcal{P}^m(M, E, F)$ la classe des opérateurs linéaires continus $P : \mathcal{C}^\infty(M, E) \to \mathcal{C}^\infty(M, F)$, tels que pour tout couple de sections C^∞, s et t^* de E et F^* respectivement, l'opérateur

$$f \mapsto \langle t^*, P(fs) \rangle$$

de $\mathcal{C}^\infty(M)$ dans lui-même est un opérateur pseudo-différentiel proprement supporté d'ordre m. Dans toute carte locale (ϕ, U), ces opérateurs s'écrivent comme des matrices $l \times k$ d'opérateurs pseudo-différentiels $(p_{i,j})$ d'ordre m. Le symbole total est alors un élément de $\mathcal{C}^\infty(T^*U) \otimes M_{lk}(\mathbb{C})$ qui possède un développement asymptotique analogue à celui défini précédemment. Le symbole principal peut lui être globalement défini comme un homomorphisme lisse :

$$\sigma_m(P)(x, \xi) : E_x \to F_x$$

homogène de degré m sur toute fibre de T^*M. On dit dans ce cas qu'un opérateur pseudo-différentiel P est *elliptique* lorsque son symbole principal est inversible. Un tel opérateur possède une parametrix.

Pour faciliter l'écriture des formules et des démonstrations, nous n'avons retenu dans la suite que le cas $E = F = \mathbb{C}$, mais le passage au cas général peut se faire pour tous les objets étudiés.

2.2 Espaces de Sobolev

Remarquons qu'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre > 0 ne peut pas, en général, être étendu en un opérateur continu de L^2 dans L^2. Les espaces de Sobolev constituent alors un cadre naturel d'espaces de Hilbert sur lesquels les opérateurs pseudo-différentiels agissent. Commençons par rappeler la définition de tels espaces dans $\mathbb{R}^n$ avant de nous intéresser au cas des variétés compactes.

Définition 2.2.1 — Soit $s \in \mathbb{R}$, on dit qu'une distribution tempérée u sur $\mathbb{R}^n$ appartient à H^s, le s-ième espace de Sobolev, si sa transformée de Fourier $\hat{u}$ est une fonction localement sommable et si on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi < +\infty.$$

Notons qu'une définition équivalente est de demander

$$< \xi >^s \hat{u} = [(1 + |\xi|^2)^{1/2}]^s \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

et que pour $s \in \mathbb{N}$, cela équivaut à imposer : $\forall\, |\alpha| \leq s,\ \partial^\alpha u \in L^2$. Rappelons brièvement les principales propriétés de ces espaces :

Théorème 2.1 —

1. **Structure Hilbertienne** Les espaces H^s sont des espaces de Hilbert pour la norme $\|u\|_s$ provenant du produit scalaire :
$$(u, v)_s = \int (1 + |\xi|^2)^s \overline{\hat{u}(\xi)} \hat{v}(\xi) d\xi.$$
2. **Densité** L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans les espaces H^s.
3. **Dualité** Soient $s \in \mathbb{R}$ et $u \in H^{-s}$. L'application de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{C}$: $\phi \mapsto < u, \phi >$ se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur H^s. Ce procédé identifie canoniquement H^{-s} au dual de H^s : pour toute forme linéaire continue L donnée sur H^s, il existe un unique $u \in H^{-s}$ tel que $L(v) =< u, v >$ pour $v \in H^s$.

Dans le cas d'une variété M compacte, il est possible, à l'aide d'un atlas, de transposer cette définition et ces propriétés.

Définition 2.2.2 — Soit M une variété compacte de dimension n, et $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ un atlas fini. Soit $(\psi_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité $\mathcal{C}^\infty$ adaptée au recouvrement par les ouverts U_i. On dit alors qu'une distribution tempérée u appartient à l'espace de Sobolev $H^s(M)$ si pour tout $i \in I$, on a :

$$(\psi_i u) \circ \phi_i^{-1} \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Les propriétés énoncées dans le théorème précédent sont toujours vraies, et notamment le fait que H^s est un espace de Hilbert pour la norme issue du produit scalaire :

$$(u,v)_s = \sum_{i\in I} \left((\psi_i u) \circ \phi_i^{-1}, (\psi_i v) \circ \phi_i^{-1}\right)_s.$$

Notons que les normes définies en prenant des atlas ou des partitions de l'unité différents sont équivalentes entre elles. On peut donner une définition des espaces de Sobolev ne faisant pas directement appel aux recouvrements. Il faut en premier lieu étendre par dualité l'action des opérateurs pseudo-différentiels aux distributions sur la variété. On dit alors qu'une distribution tempérée u est dans $H^s(M)$ si $P_s u \in L^2(M)$, où P_s est un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre s dont le symbole principal est positif.

On a de plus les propriétés suivantes :

Proposition 2.2.3 —

1. **Inclusions** L'opérateur naturel d'inclusion, $i_s^{s'} : H^s \to H^{s'}$, est compact pour $s > s'$.
2. **Régularité** Si $s > n/2 + p$, alors $H^s(M)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}^p(M)$. De plus $\cup_s H^s(M) = \mathcal{D}'(M)$, l'ensemble des distributions tempérées, et $\cap_s H^s(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$.

Enonçons à présent le théorème de régularité pour les opérateurs pseudo-différentiels sur une variété compacte :

Théorème 2.2 — Soit $P \in \mathcal{P}^m(M)$ un opérateur pseudo-différentiel d'ordre complexe m, alors P s'étend pour tout s en un opérateur linéaire continu

$$P : H^s(M) \longrightarrow H^{s-m_0}(M)$$

où $m_0 = \Re e\, m$.

On notera $\|P\|_{t,s}$ la norme d'un opérateur linéaire continu de H^s dans H^t.

Corollaire 2.2.4 — Appliquons le théorème précédent au cas $s = m_0 = 0$. L'opérateur P est alors une application linéaire continue de $L^2(M)$ dans lui-même.

Dans le cas d'un opérateur d'ordre de partie réelle $m_0 < 0$, on obtient en combinant le théorème et la proposition précédente le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.5 — Un opérateur P d'ordre m avec $m_0 < 0$ est un opérateur compact de tout espace de Sobolev $H^s(M)$ dans lui-même (en particulier de $L^2(M)$ dans lui-même).

Nous pouvons également énoncer un résultat reliant l'ordre d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété M de dimension n à son appartenance à la classe de Hilbert-Schmidt.

Proposition 2.2.6 — Un opérateur pseudo-différentiel d'ordre de partie réelle strictement inférieure à $-\frac{n}{2}$ est de Hilbert-Schmidt. En particulier, un opérateur d'ordre strictement inférieur à $-n$ est à trace.

2.3 Résidu de Wodzicki

Les premiers travaux sur le résidu non commutatif proviennent de l'étude d'un résidu dans le cadre de la géométrie symplectique par Guillemin, et de l'introduction par Adler et Manin du résidu non commutatif en dimension 1. Mariusz Wodzicki a repris et étendu ces travaux dans sa thèse et les a reliés à une notion analytique de résidu pour un opérateur pseudo-différentiel classique P sur une variété compacte M de dimension n. Il montre ainsi que le résidu

$$\mathrm{Res}(P) = 2\mathrm{res}_{s=0}\mathrm{Tr}(A\Delta^{-s})$$

où Δ désigne un laplacien de M, est une trace sur l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels d'ordres entiers, qui est l'unique trace sur cette algèbre si M est connexe de dimension > 1. La géométrie des cônes symplectiques permet également à Wodzicki de donner une forme locale de ce résidu, c'est-à-dire de construire une densité $\mathrm{res}_x(P)$ sur M telle que, si $f \in C_c^\infty(M)$, $\mathrm{Res}(fP) = \int_M f\mathrm{res}_x(P)$, et telle que, si (U, ϕ) est une carte locale, alors

$$\phi^*\mathrm{res}_{\phi(u)}(P) = \mathrm{res}_u(\phi^\sharp P).$$

Cette propriété implique en particulier l'invariance par difféomorphisme du résidu non commutatif.
De plus, cette densité est donnée par la formule locale :

$$\mathrm{res}_u(P) = \frac{1}{(2\pi)^n}\left(\int_{S^{n-1}} p_{-n}(u,\xi)\,|d\xi|\right) du$$

où p_{-n} désigne la partie homogène d'ordre $-n$ en ξ du symbole de l'opérateur P dans la carte considérée, $|d\xi|$ une densité sur S^{n-1} et du une forme volume locale sur U.

Il existe au moins cinq propriétés différentes du résidu de Wodzicki d'un opérateur pseudo-différentiel P d'ordre r qui le caractérisent.

1. C'est un objet local, défini comme densité sur la variété M, donnée par
$$\mathrm{res}_u(P) = \frac{1}{(2\pi)^n}\left(\int_{S^{n-1}} p_{-n}(u,\xi)\,|d\xi|\right) du.$$
2. Il est donné par le coefficient logarithmique du développement asymptotique du noyau de Schwartz de l'opérateur P au voisinage de la diagonale.
3. C'est un objet globalement défini : il est donné par le résidu en 0 d'une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto Tr(P(z))$ avec $z \mapsto P(z)$ une famille holomorphe d'opérateurs pseudo-différentiels telle que $P(0) = P$ et $P(z)$ est d'ordre $z + r$.
4. Il s'exprime en termes des coefficients du développement asymptotique au voisinage de $t = 0$ du noyau de Schwartz de l'opérateur de la chaleur e^{-tP} associé à P.
5. Enfin il définit une trace résiduelle sur l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre entier ; si la variété est connexe et de dimension > 1, c'est l'unique trace sur cette algèbre.

La première et la cinquème méthodes sont développées dans [FGLS96]. Nous allons étudier la deuxième et montrer son équivalence avec la troisième, en utilisant une méthode initiée dans [CM95] et [KV95] et expliquée en grand détail par Raphaël Ponge dans [Pon96]. Nous donnerons ensuite quelques indications pour y relier la quatrième définition, étudiée notamment par Schrohe [Sch99]. Nous utiliserons pour alléger les formules dans nos calculs la convention que $đ\xi$ désigne la forme volume $(2\pi)^{-n}d\xi$.

2.3.1 Familles holomorphes d'opérateurs pseudo-différentiels

Notons que la définition en termes de résidu n'a d'intérêt que si l'on peut exhiber des familles holomorphes d'opérateurs vérifiant les conditions précitées. Un exemple fondamental est fourni par la famille des puissances complexes d'un opérateur pseudo-différentiel. Nous donnons dans la section suivante une description complète en termes d'opérateurs pseudo-différentiels de la famille $(A^s)_{s\in\mathbb{C}}$ lorsque A est un opérateur différentiel elliptique et inversible, pour lequel il existe un angle fermé du plan dont l'intersection avec le spectre de A est vide (par exemple A positif). Notons que, plus généralement, l'opérateur différentiel elliptique A, dont on prend les puissances complexes, peut être remplacé par un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre > 0 qui admet des puissances complexes au sens de Seeley [See67, GS95].

Nous allons donner ici un exemple dans un sens plus simple d'une famille holomorphe d'opérateurs.

Commençons par définir la notion de famille holomorphe de symboles polyhomogènes à support compact.

Définition 2.3.1 — Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}$ un domaine du plan complexe, et $z \mapsto m(z)$ une fonction holomorphe de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$. On dit qu'une famille $z \mapsto a(x,\xi,z) \in \mathcal{C}_c^\infty(U\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{D})$ est une famille holomorphe de symboles classiques d'ordre m sur $\mathcal{D}$, et on note $a(x,\xi,z) \in \mathbb{S}^m_{hom}(U,\mathcal{D})$ si :

1. l'application $z \mapsto a(x,\xi,z)$ est holomorphe pour tous (x,ξ) fixés ;
2. il existe pour tout j des fonctions $a_{m(z)-j}(x,\xi,z)$ positivement homogènes en ξ de degré $m(z)-j$ telles que :
   (a) l'application $z \mapsto a_{m(z)-j}(x,\xi,z)$ est holomorphe de $\mathcal{D}$ dans l'ensemble $C^\infty(S^*U)$ muni de la topologie de la convergence uniforme de la fonction et de toutes ses dérivées sur tout compact ;
   (b) pour tout $N\in\mathbb{N}$, pour tous multi-indices α,β, pour tous compacts $K\subset U$ et $K'\subset\mathcal{D}$, il existe une constante $C = C(N,\alpha,\beta,K,K')$ telle que :

$$\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta[a(x,\xi,z)-\chi(\xi)\sum_{j=0}^{N-1}a_{m(z)-j}(x,\xi,z)]\right| \leq C <\xi>^{m-N-|\alpha|},$$

pour $(x,\xi,z)\in K\times\mathbb{R}^n\times K'$ et $m\geq|m(z)|$ sur K'.

A présent que nous avons défini les familles holomorphes de symboles, nous pouvons définir les familles holomorphes d'opérateurs pseudo-différentiels.

Définition 2.3.2 — Soit $m : z\mapsto m(z)$ une fonction holomorphe de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$.

1. On dit qu'une famille $z \mapsto A(z)$ est une famille holomorphe d'ordre m sur $\mathcal{D}$, et on note $A \in \mathbb{P}^m(U, \mathcal{D})$, si la famille $A(z) \in \mathcal{P}_c^{m(z)}(U)$ est une famille d'opérateurs pseudo-différentiels à support compact dans l'ouvert U telle que le symbole de l'opérateur $A(z)$ est donné par un élément $a(x, \xi, z) \in \mathbb{S}^m_{hom}(U, \mathcal{D})$.
2. Soit M une variété compacte. On dit qu'une famille $A(z) \in \mathcal{P}(M)$ est holomorphe d'ordre m si dans tout système de coordonnées locales U, et toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(U)$, on peut écrire $A(z)\varphi = A_\varphi(z) + R_\varphi(z)$, avec $A_\varphi \in \mathbb{P}^m(U, \mathcal{D})$ et $z \mapsto R_\varphi(z)$ une famille holomorphe d'opérateurs régularisants, dont le noyau k_φ appartient à $C^\infty(M \times M \times \mathcal{D})$. On note $\mathbb{P}^m(M, \mathcal{D})$ la classe de ces opérateurs.

On peut prouver, en utilisant des raisonnements analogues à ceux de la théorie classique des opérateurs pseudo-différentiels, que cette classe des familles d'opérateurs pseudo-différentiels holomorphes sur un domaine est stable pour les opérations suivantes : la composition, l'adjonction et la détermination d'une parametrix.

Donnons à présent un exemple d'une telle famille holomorphe.

Exemple — Donnons-nous une variété compacte M de dimension n, munie d'un recouvrement par des ouverts U_i et d'une partition de l'unité $(\varphi_i^2)_{i \in I}$ adaptée à ce recouvrement. Posons alors $E(z) = \sum_i \varphi_i E_i(z) \varphi_i$ avec $E_i(z) \in \mathcal{P}(U_i)$ l'opérateur dont le symbole est donné par

$$a_i(x, \xi, z) = \psi_i(x) \left(\sqrt{1 + |\xi|^2} \right)^z,$$

avec ψ_i une fonction C^∞ à support compact dans U_i. La famille $z \mapsto P(z)$ est alors une famille holomorphe d'ordre z sur $\mathbb{C}$.

2.3.2 Le coefficient logarithmique dans le développement asymptotique du noyau

Nous voulons écrire un développement asymptotique du noyau de Schwartz d'un opérateur pseudo-différentiel P d'ordre l au voisinage de la diagonale. Or nous savons que le noyau est donné par la transformée de Fourier du symbole total de l'opérateur :

$$k(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x, \xi) e^{i\langle x-y, \xi \rangle} d\xi.$$

Le symbole $p(x, \xi)$ est polyhomogène et admet un développement asymptotique $p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^\infty p_{l-j}(x, \xi)$, avec p_k positivement homogène de degré k en ξ. Pour effectuer un développement asymptotique du noyau, il faut donc commencer par étudier les propriétés de ces fonctions homogènes. Rappelons que $\mathbb{R}_+^*$ agit sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par dilatation de la façon suivante :

$$(\lambda.f)(x) = f_\lambda(x) = f(\lambda x).$$

Cette action s'étend par dualité à l'espace $\mathcal{S}'$ et $\lambda.\tau = \tau_\lambda$ est définie par l'égalité

$$\langle \tau_\lambda, f \rangle = \lambda^{-n} \langle \tau, f_{\lambda^{-1}} \rangle.$$

Définition 2.3.3 — On appelle *distribution homogène* de degré $m \in \mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}^n$ une distribution τ telle que $\tau_\lambda = \lambda^m \tau$ pour $\lambda > 0$.

Lemme 2.3.4 — [Pon96] Soit $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ une fonction positivement homogène de degré $m \in \mathbb{C}$.

1. Si $m \in \mathbb{Z}$ et $m > -n$, il existe une unique distribution homogène τ de degré m prolongeant σ.
2. Si $m \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, il existe une unique distribution homogène τ de degré m prolongeant σ.
3. Si $m = -n$, il existe une distribution homogène étendant σ si et seulement si le nombre
$$c_\sigma = \int_{S^{n-1}} \sigma(\xi)\,|d\xi|$$
est nul. Plus généralement, on peut étendre σ en une distribution tempérée τ vérifiant, pour tout $\lambda > 0$,
$$\tau_\lambda = \lambda^{-n}\tau + \lambda^{-n}\log(\lambda) c_\sigma \delta_0.$$

Démonstration du lemme

1. La fonction σ est intégrable au voisinage de l'origine car $m > -n$, et C^∞ à croissance polynomiale à l'infini. Elle définit donc naturellement une distribution tempérée, qui est homogène de degré k.
2. Fixons un entier positif l tel que $l > \Re e\, m + n + 1$. Nous pouvons, comme dans [Pon96], définir une fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ valant 1 au voisinage de 0 vérifiant la propriété suivante
$$\int_0^\infty t^a \psi'(t)dt = 0 \text{ pour } a = m+n, \cdots, m+n+l.$$
Le fait que $m \notin \mathbb{Z}$ intervient ici directement dans la définition de la fonction ψ. En effet, on peut alors prendre une solution ψ' de la forme :
$$\psi'(e^s) = e^{-s}\left(\prod_{a=m+n}^{m+n+l}(a^{-1} + \frac{d}{dt})\right) g(s),$$
avec $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\int g = 1$.
Définissons à présent, à l'aide de cette fonction ψ une distribution tempérée τ en posant, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:
$$\langle \tau, f\rangle = \int \left[f(\xi) - \psi(|\xi|)\sum_{|\alpha|\leq l} \frac{f^{(\alpha)}(0)\xi^\alpha}{\alpha!}\right]\sigma(\xi)d\xi.$$
Pour $\lambda > 0$, on a alors
$$\begin{aligned}
\langle \tau_\lambda, f\rangle - \lambda^m\langle \tau, f\rangle &= \lambda^{-n}\int \left[f(\lambda^{-1}\xi) - \psi(|\xi|)\sum_{|\alpha|\leq l} \frac{f^{(\alpha)}(0)(\lambda^{-1}\xi)^\alpha}{\alpha!}\right]\sigma(\xi)d\xi \\
&- \lambda^m \int \left[f(\xi) - \psi(|\xi|)\sum_{|\alpha|\leq l} \frac{f^{(\alpha)}(0)\xi^\alpha}{\alpha!}\right]\sigma(\xi)d\xi \\
&= \lambda^m \sum_{|\alpha|\leq l} \frac{f^{(\alpha)}(0)}{\alpha!}\int \left[\psi(|\xi|) - \psi(\lambda\,|\xi|)\right]\xi^\alpha\sigma(\xi)d\xi \\
&= \lambda^m \sum_{|\alpha|\leq l} \frac{f^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} c_{\xi^\alpha\sigma}\rho_\alpha(\lambda)
\end{aligned}$$

avec

$$c_{\xi^\alpha\sigma} = \int_{S^{n-1}} \xi^\alpha \sigma(\xi)\,|d\xi| \text{ et } \rho_\alpha = \int_0^\infty t^{m+n+|\alpha|}(\psi(t) - \psi(\lambda t))\frac{dt}{t}\cdot$$

On a $\rho_\alpha(1) = 0$ et

$$\frac{d}{d\lambda}\rho_\alpha(\lambda) = \lambda^{m+n+|\alpha|-1}\int t^{m+n+|\alpha|}\psi'(t)dt.$$

Finalement, τ est donc homogène de degré m si et seulement si

$$\int_0^\infty t^a\psi'(t)dt = 0 \text{ pour } a = m+n, \cdots, m+n+l,$$

ce qui est vérifié. L'unicité provient de l'observation suivante. La fonction σ définit naturellement une forme linéaire continue sur le sous-espace $\mathcal{S}_0^m(\mathbb{R}^n)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ formé par les fonctions f telles que $f^{(\alpha)}(0) = 0$ pour $|\alpha| + \Re e\, m + n \le 0$. La différence entre deux distributions tempérées homogènes τ et τ' de degré m étendant σ est donc une distribution homogène de degré m nulle sur $\mathcal{S}_0^m$. Cette différence s'écrit donc comme une combinaison linéaire de la forme

$$\tau - \tau' = \sum_{|\alpha|+\Re e\, m+n\le 0} a_\alpha \delta_0^{(\alpha)}$$

avec δ_0 la distribution de Dirac en 0. C'est impossible, car une telle distribution ne peut être homogène de degré m si m n'est pas un entier négatif.

3. Dans le cas $m = -n$, la fonction σ définit naturellement une forme linéaire continue sur le sous-espace $\mathcal{S}_0^{-n}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions de Schwartz s'annulant en 0, $L(f) = \int f(\xi)\sigma(\xi)d\xi$. Cette forme linéaire s'étend par le théorème de Hahn-Banach en une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}$, soit en une distribution tempérée. Une telle distribution étendant σ appartient à la droite affine de direction δ_0

$$D = \left\{\tau \in \mathcal{S}', \quad \tau_{|\mathcal{S}_0^{-n}(\mathbb{R}^n)} = L\right\}.$$

Soit $\lambda > 0$; si $f \in \mathcal{S}_0^{-n}(\mathbb{R}^n)$, alors $f_{\lambda^{-1}}$ aussi et $L(f_{\lambda^{-1}}) = L(f)$, par homogénéité de σ. Comme δ_0 est une distribution homogène de degré $-n$, on en déduit qu'il existe $c(\lambda)$ tel que pour tout $\tau \in D$, on a :

$$\tau_\lambda = \lambda^{-n}\tau + c(\lambda)\lambda^{-n}\delta_0.$$

Ainsi, toute distribution $\tau \in D$ est une extension homogène de σ si et seulement si cette fonction $c(\lambda)$ est identiquement nulle. Il ne nous reste qu'à calculer cette fonction $c(\lambda)$ sur un exemple. Donnons-nous une fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ valant 1 au voisinage de 0 et définissons la distribution tempérée τ par :

$$\langle\tau, f\rangle = \int (f(\xi) - \psi(|\xi|)f(0))\sigma(\xi)d\xi.$$

Il est clair que $\tau \in D$ et on a alors, pour $f \in \mathcal{S}$, avec $f(0) = 1$:

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \langle\tau, f_{\lambda^{-1}}\rangle - \langle\tau, f\rangle \\ &= \int (f(\lambda^{-1}\xi) - \psi(|\xi|))\sigma(\xi)d\xi - \int (f(\xi) - \psi(|\xi|))\sigma(\xi)d\xi \\ &= \int (\psi(\lambda\,|\xi|) - \psi(|\xi|))\sigma(\xi)d\xi \\ &= c_\sigma\rho(\lambda) \end{aligned}$$

avec

$$c_\sigma = \int_{S^{n-1}} \sigma(\xi)\,|d\xi| \ \text{ et } \rho(\lambda) = \int_0^\infty (\psi(\lambda t) - \psi(t))\frac{dt}{t}\cdot$$

Or on a

$$\lambda \frac{d}{d\lambda}\rho(\lambda) = \lambda \int_0^\infty \psi'(\lambda t) dt = \psi(0) = 1,$$

d'où l'on tire $\rho_\lambda = \ln(\lambda)$. On a donc bien finalement

$$c(\lambda) = c_\sigma \ln(\lambda).$$

$\boxminus$

Proposition 2.3.5 — Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $P \in \mathcal{P}^m(U)$ un opérateur pseudo-différentiel d'ordre complexe $m = m_0 + im_1$ et de symbole $p(x,\xi)$. Posons $l = [m_0] + n$. Le noyau de Schwartz de P a alors un comportement asymptotique au voisinage de la diagonale Δ donné par :

$$k(x,y) = \sum_{j=0}^{l} a_{j-m-n}(x, x-y) - c_P(x) \log|x-y| + O(1).$$

Plus précisément, on a

$$k(x,y) = \sum_{j=0}^{l} a_{j-m-n}(x, x-y) - c_P(x) \log|x-y| + R(x,y),$$

où les fonctions a_{j-m-n} sont des fonctions $C^\infty(U \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$ positivement homogènes de degré $j-m-n$ en la seconde variable. La fonction $c_P(x)$ est une fonction C^∞ sur U donnée par :

$$c_P(x) = \int_{S^{n-1}} p_{-n}(x,\xi)\,|d\xi|\,,$$

avec p_{-n} le symbole d'ordre $-n$ de P et $R(x,y)$ une fonction C^∞ sur $U \times U - \Delta$ et continue sur Δ.

Notons que dans le cas où m n'est pas un entier supérieur à $-n$, la partie logarithmique du développement précédent est nulle, puisque P a un symbole d'ordre $-n$ nul.

Démonstration— On sait que le noyau de P s'écrit

$$k(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x,\xi) e^{i\langle x-y,\xi\rangle} d\!\!{}^-\xi.$$

Nous savons également que les l premiers termes du développement asymptotique de p sont des fonctions $p_{m-j}(x,\xi) \in C^\infty(U \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$ homogènes de degré $m-j$, avec $m_0 - j \geq -n$. Dans le cas où cette inégalité est stricte, nous savons par le lemme précédent que, pour tout x, il existe une unique distribution tempérée homogène $\tau_{m-j}(x)$ de degré $m-j$ étendant $p_{m-j}(x,\xi)$. Notons de plus que, d'après la formule définissant τ_{m-j}, l'application $x \mapsto \tau_{m-j}(x)$ est lisse de U dans $\mathcal{S}'$ car $p_{m-j}(x,\xi) \in C^\infty(U \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$. Dans le cas $m - j = -n$, nous avons vu dans le lemme précédent que la donnée d'une fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ valant 1 au voisinage de 0 permet de définir pour tout $x \in U$ une distribution tempérée τ_{-n} par :

$$\langle \tau_{-n}(x),\, f\rangle = \int (f(\xi) - \psi(|\xi|)f(0))p_{-n}(x,\xi)d\xi \text{ pour } f \in \mathcal{S}.$$

L'expression de cette distribution montre également que l'application $x \mapsto \tau_{-n}(x)$ est lisse de U dans $\mathcal{S}'$ car $p_{-n}(x,\xi) \in C^\infty(U \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$. Posons alors

$$r(x,y) = \int \left(p(x,\xi) - \chi(\xi) \sum_{j=0}^{l} p_{m-j}(x,\xi) \right) e^{i\langle x-y,\,\xi\rangle} d\!\!\bar{}\xi.$$

Cette fonction est C^∞ sur $U \times U - \Delta$ et continue sur Δ car le symbole

$$p(x,\xi) - \chi(\xi) \sum_{j=0}^{l} p_{m-j}(x,\xi)$$

est une fonction absolument intégrable et C^∞ sur $U \times \mathbb{R}^n$. Or nous savons par construction que si e_v désigne la fonction $v \mapsto (2\pi)^{-n} e^{i\langle v,\,\xi\rangle}$, la différence

$$\int \chi(\xi) p_{m-j}(x,\xi) e^{i\langle x-y,\,\xi\rangle} d\!\!\bar{}\xi - \langle \tau_{m-j}(x),\, e_{(x-y)}\rangle$$

est une fonction C^∞ sur $U \times U - \Delta$ et continue sur Δ pour tout j. Ainsi

$$R(x,y) = k(x,y) - \sum_{j=0}^{l} \langle \tau_{m-j}(x),\, e_{(x-y)}\rangle$$

est une fonction C^∞ sur $U \times U - \Delta$, et continue sur Δ.

Il nous reste donc à calculer pour tout entier j entre 0 et l l'expression

$$\alpha_{m-j}(x,v) = \langle \tau_{m-j}(x),\, e_v\rangle.$$

- Dans le cas où $m_0 - j > -n$, nous savons que $\tau_{m-j}(x)$ est homogène de degré $m - j$. Donc on a

  $$\langle \tau_{m-j}(x),\, e_{\lambda v}\rangle = \langle \tau_{m-j}(x),\, (e_v)_\lambda\rangle = \lambda^{-n}\langle (\tau_{m-j}(x))_{\lambda^{-1}},\, e_v\rangle = \lambda^{j-m-n}\langle \tau_{m-j}(x),\, e_v\rangle.$$

  Ainsi cette fonction $\alpha_{m-j}(x,v) = a_{j-m-n}(x,v)$ est bien une fonction C^∞ sur $U \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$ positivement homogène de degré $j - m - n$ en la seconde variable.
- Dans le cas $j = m + n$, on a alors

  $$\begin{aligned} \alpha_{-n}(x,\lambda v) &= \langle \tau_{-n}(x),\, (e_v)_\lambda\rangle \\ &= \lambda^{-n}\langle (\tau_{-n}(x))_{\lambda^{-1}},\, e_v\rangle \\ &= \lambda^{-n}\langle \lambda^n(\tau_{-n}(x) + c_P(x)\log(\lambda^{-1})\delta_0),\, e_v\rangle \\ &= \alpha_{-n}(x,v) + c_P(x)\log(\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

  En prenant $\lambda = |v|^{-1}$, on obtient, en posant $a_{-n}(x,v) = \alpha_{-n}(x, \frac{v}{|v|})$,

  $$\alpha_{-n}(x,v) = a_{-n}(x,v) - c_P(x)\log|v|$$

  ce qui permet de conclure.

■

2.3.3 Définition du résidu de Wodzicki

Revenons à présent au cas d'une variété compacte sans bord M de dimension n. Démontrons que le coefficient $c_P(x)$ de la proposition précédente que nous pouvons définir dans tout système de coordonnées locales pour la variété M définit en fait une densité sur M.

Proposition 2.3.6 — Soit P un opérateur pseudo-différentiel de degré m sur M. Le coefficient logarithmique $c_P(x)$ de l'expansion asymptotique du noyau de Schwartz $k_P(x,y)$ de P au voisinage de la diagonale

$$k_P(x,y) = \sum_{j=0}^{l} a_{j-m-n}(x, x-y) - c_P(x) \log|x-y| + O(1)$$

est invariant sous l'action d'un difféomorphisme ϕ, i.e. on a

$$c_{\phi^\sharp P}(x) = |J_\phi(x)|\, c_P(\phi(x))$$

avec J_ϕ le jacobien associé à ϕ. En particulier, ce coefficient définit une densité $\mathrm{res}_x(P)$ sur M qui s'exprime localement sous la forme

$$\mathrm{res}_x(P) = c_P(x)dx = \int_{S^{n-1}} p_{-n}(x,\xi)\, |đ\xi|\, dx$$

avec dx une forme volume locale.

Démonstration— Donnons-nous un changement de carte locale $x = \phi^{-1}(x')$. Le noyau $k_{\phi^\sharp P}(x,y)$ est celui de $\phi^\sharp P$. Il est donc égal, par changement de variable à $|J_\phi(y)|\, k_P(\phi(x),\phi(y))$. On a donc

$$k_{\phi^\sharp P}(x,y) = \sum_{j=0}^{l} |J_\phi(y)|\, a_{j-m-n}(\phi(x), \phi(x)-\phi(y)) - |J_\phi(y)|\, c_P(\phi(x)) \log|\phi(x)-\phi(y)| + O(1).$$

Nous pouvons pour tout $N \in \mathbb{N}$ écrire un développement de Taylor pour ϕ à l'ordre N au voisinage de la diagonale :

$$\phi(x) - \phi(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{[(d\phi(x)(x-y))]^{(k)}}{k!} + o(|x-y|^N).$$

Nous savons d'autre part, par homogénéité de a_{j-m-n}, que l'on a :

$$a_{j-m-n}(\phi(x), \phi(x)-\phi(y)) = |\phi(x)-\phi(y)|^{j-m-n}\, a_{j-m-n}(\phi(x), \frac{\phi(x)-\phi(y)}{|\phi(x)-\phi(y)|}).$$

Ainsi nous pouvons écrire

$$a_{j-m-n}(\phi(x)-\phi(y)) = |x-y|^{j-n-m}\, P_j(x,y),$$

avec P_j une expression polynomiale en $|x-y|$ au voisinage d'un point x.

La seule contribution possible au terme logarithmique provient donc nécessairement du terme

$$|J_\phi(y)|\, c_P(\phi(x)) \log|\phi(x)-\phi(y)| = |J_\phi(x)|\, c_P(\phi(x)) \log|x-y| + O(1)$$

et on obtient bien finalement

$$c_{\phi^\sharp P}(x) = |J_\phi(x)|\, c_P(\phi(x)).$$

Ceci montre que $\mathrm{res}_x(P) = c_P(x)dx$ définit bien une densité sur M. ■

Définition 2.3.7 — On appelle alors *résidu non commutatif* ou *résidu de Wodzicki* le nombre

$$\mathrm{Res}\,(P) = \int_M \mathrm{res}_x(P) = \int_M \int_{S^{n-1}} p_{-n}(x,\xi)\,|d\xi|\,dx.$$

2.3.4 Le résidu de Wodzicki est un résidu !

Notons $\mathcal{P}^{tr}$ l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre de partie réelle inférieure strictement à $-n$, c'est-à-dire ceux qui sont traçables.

Démontrons à présent le théorème principal.

Théorème 2.3 — Soit M une variété compacte sans bord.

1. La fonctionnelle $P \mapsto \mathrm{Tr}(P)$ holomorphe sur $\mathcal{P}^{tr}(M)$ admet un unique prolongement holomorphe TR sur $\mathcal{P}^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(M)$.
2. Soit $z \mapsto P(z)$ une fonction holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{P}(M)$ telle que l'ordre de $P(z)$ vaut z. La fonction $z \mapsto \mathrm{TR}(P(z))$ est alors méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec au plus des pôles simples sur $\mathbb{Z}$. En ces points k, le résidu est donné par l'opposé du résidu de Wodzicki de l'opérateur $P(k)$:
$$\mathrm{res}_{z=k}\,\mathrm{TR}(P(z)) = -\,\mathrm{Res}\,(P(k)).$$

Démonstration— Notons qu'il suffit de montrer ces propriétés pour les opérateurs pseudo-différentiels à support compact dans un ouvert de carte U, puisque Tr est holomorphe sur l'ensemble des opérateurs régularisants.

1. Si un tel prolongement holomorphe existe, il est nécessairement unique puisque l'application $s \mapsto PE(-s)$ (avec E l'opérateur défini au paragraphe 2.3.1) est holomorphe et connecte dans $\mathcal{P}^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}$ tout élément $P \in \mathcal{P}^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}$ à $\mathcal{P}^{tr}$. Nous savons que si $P \in \mathcal{P}^{tr}(U)$ est de symbole p et de noyau k, on a alors
$$\mathrm{Tr}(P) = \int_U k(x,x)dx = \int_U \int_{\mathbb{R}^n} p(x,\xi)d\xi dx.$$
Soit maintenant $P \in \mathcal{P}^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}$ de symbole p et d'ordre m. Posons $l = [\Re e\, m] + n$. Nous avons vu dans la démonstration de la proposition (2.3.5) que nous pouvions définir des distributions $\tau_{m-j}(x)$ positivement homogènes de degré $m-j$ en ξ prolongeant les parties p_{m-j} homogènes de même degré du symbole p, et telles que les applications $x \mapsto \tau_{m-j}(x)$ soient lisses de U dans $\mathcal{S}'$. Nous pouvons alors définir la trace de P en posant
$$\mathrm{TR}(P) = (2\pi)^{-n} \int_U \langle \tau(x),\, 1\rangle dx \text{ avec } \tau(x) = p(x,\xi) - \sum_{j=0}^{l} \tau_{m-j}(x).$$

Notons que la distribution τ coïncide sur $|\xi| > 1$ avec le symbole d'ordre $m-l-1$ de partie réelle $\Re e\, m - l - 1 < -n$ donné par $p(x,\xi) - \sum_{j=0}^{l+1} p_{m-j}(x,\xi)$.
Donnons-nous à présent une fonction holomorphe $z \mapsto m(z)$ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ telle qu'il existe un entier k pour lequel $\Re e\, m(z) < k$ sur Ω, et une famille holomorphe $z \mapsto P(z)$ d'ordre $m(z)$ de Ω dans $\mathcal{P}^{\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}}$. La construction dans le lemme 2.3.4 de τ_{m-j} permet de montrer que, $z \mapsto m(z)$ et $z \mapsto p_{m(z)-j}(z)(x,\xi)$ étant des fonctions holomorphes, l'application $z \mapsto \tau^{(z)}_{m(z)-j}(x)$ est holomorphe de Ω dans $C^\infty(U, \mathcal{S}')$. De plus, si $j > \Re e\, m(z) + n$, alors on sait que $\tau^{(z)}_{m(z)-j}(x)(\xi)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et, par homogénéité, que $\int \tau^{(z)}_{m(z)-j}(x)(\xi) đ\xi = 0$. Pour tout $z \in \Omega$, on a alors

$$\langle \tau^{(z)}(x),\, 1\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \left(p_{m(z)}(z)(x,\xi) - \sum_{j=0}^{k+n} \tau^{(z)}_{m(z)-j}(x)(\xi) \right) đ\xi.$$

Ainsi l'application

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \tau^{(z)}(x)(\xi) đ\xi$$

est holomorphe sur Ω, uniformément par rapport à x, ce qui donne le résultat.

2. Etudions à présent la singularité de $\mathrm{TR}(P(z))$ au voisinage de $z = k$ pour une fonction $z \mapsto P(z)$ avec $P(z)$ d'ordre z. Plaçons-nous sur le demi-plan $k < \Re e\, z$. Nous devons intégrer la distribution $\tau(x)(z)(\xi)$ sur $\mathbb{R}^n$. Nous savons que l'intégrale sur $|\xi| > 1$ coïncide avec l'intégrale du symbole d'ordre $z - k - n - 1$ de partie réelle $\Re e(z) - k - n - 1 < -n$ donné par $p(z)(x,\xi) - \sum_{j=0}^{k+n} p_{z-j}(z)(x,\xi)$. Cette partie de l'intégrale est donc holomorphe au voisinage de $z = k$. De même, le symbole de l'opérateur $P(z)$ est intégrable au voisinage de $\xi = 0$ uniformément par rapport à x et holomorphe par rapport à z. Il reste donc seulement à calculer les intégrales :

$$\int_U \int_{|\xi|\le 1} \tau^{(z)}_{z-j}(x)(\xi) đ\xi dx$$

pour $0 \le j \le k+n$. Or, dans ce cas on a $\Re e(z) - j > -n$, et donc les distributions homogènes $\tau^{(z)}_{z-j}(x)(\xi)$ sont simplement données par les symboles $p_{z-j}(z)(x,\xi)$, qui sont intégrables au voisinage de l'origine.
Calculons, pour $0 \le j \le k+n$, l'intégrale $I_j(x,z) = -\int_{|\xi|\le 1} p_{z-j}(z)(x,\xi) đ\xi$. On a :

$$I_j(x,z) = -\int_0^1 t^{z-j+n-1} dt \int_{S^{n-1}} p_{z-j}(z)(x,\xi)\, |đ\xi| = -\frac{1}{z-j+n} \int_{S^{n-1}} p_{z-j}(z)(x,\xi)\, |đ\xi|\,.$$

Ces fonctions sont donc toutes holomorphes au voisinage de $z = k$, sauf si $j = k+n$. Dans ce dernier cas, le résidu est donné par

$$-\int_{S^{n-1}} p_{-n}(k)(x,\xi) đ\xi = -\operatorname{Res}(P(k)).$$

■

Remarquons qu'un exemple d'une telle famille $P(z)$ est fourni par $P(z) = PE(z)$ où $E(z)$ est l'exemple de famille holomorphe d'opérateurs introduit au paragraphe 2.3.1.

2.3.5 Le résidu de Wodzicki est une trace

Nous pouvons à présent montrer que le résidu de Wodzicki permet de définir une trace sur l'algèbre des opérateurs d'ordre entier.

Proposition 2.3.8 — Soit P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre r sur une variété compacte M de dimension n.

1. Le résidu de Wodzicki est invariant par difféomorphisme. Si $\varphi : M \mapsto M'$ est un difféomorphisme, on a pour tout $P \in \mathcal{P}^{\mathbb{Z}}(M)$
$$\mathrm{Res}_{M'}(\varphi^\sharp P) = \mathrm{Res}_M(P).$$
2. Le résidu de Wodzicki définit une trace sur l'algèbre $\mathcal{P}^{\mathbb{Z}}(M)$.

Démonstration—

1. Découle directement de la propriété (2.3.6).
2. Pour démontrer 2) on se donne deux opérateurs P_1 et P_2 dont la somme des ordres est un entier r (on montre ainsi un résultat un peu plus général). Comme pour $s \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$ on a $\mathrm{TR}(P_1 P_2 E(-s)) = \mathrm{TR}(P_2 E(-s) P_1)$, les résidus en 0 de ces fonctions sont égaux, et donc $\mathrm{Res}\,(P_1P_2) = \mathrm{Res}\,(P_2P_1)$.

■

Nous pouvons maintenant discuter de l'existence d'autres traces sur $\mathcal{P}^{\mathbb{Z}}(M)$.

Théorème 2.4 — Si la variété est connexe de dimension > 1 toute trace sur $\mathcal{P}^{\mathbb{Z}}(M)/\mathcal{P}^{-\infty}$ est un multiple de Res.

Ce théorème a été démontré de diverses manières. Brylinski et Getzler [BG87] ont utilisé des méthodes homologiques. On trouve une démonstration directe et assez simple de ce résultat dans [FGLS96], que nous allons reprendre ici et qui s'appuie sur deux lemmes pour un opérateur pseudo-différentiel P d'ordre entier à support compact dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$.

Démonstration— Appelons p le symbole de l'opérateur P. Ce symbole p est à support compact en $x \in U$. Désignons alors, pour $1 \leq i \leq n$, par σ_{x_i} et σ_{ξ_i} des symboles d'opérateurs pseudo-différentiels à support compact sur U tels que sur le support de P, on ait :
$$\sigma_{x_i} = x_i \text{ et } \sigma_{\xi_i} = \xi_i.$$
Un calcul immédiat utilisant la formule de composition des symboles nous donne alors :
$$[p, \sigma_{x_i}] = \frac{\partial p}{\partial_{\xi_i}} \text{ et } [p, \sigma_{\xi_i}] = -\frac{\partial p}{\partial_{x_i}}.$$

Ceci nous permet de montrer le lemme suivant.

Lemme 2.3.9 — Si le symbole d'ordre $-n$ de l'opérateur P est nul, alors son symbole total s'exprime comme une somme finie de commutateurs (modulo le symbole d'un opérateur régularisant).

Démonstration du lemme La formule d'Euler appliquée à une composante p_{m-j} positivement homogène de degré $m-j$ en la variable ξ du symbole total $p \sim \sum p_{m-j}$ s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial p_{m-j}}{\partial_{\xi_i}} = (m-j) p_{m-j}.$$

(On obtient cette formule en prenant la dérivée en $t=1$ de l'égalité $p_{m-j}(t\xi) = t^{m-j} p_{m-j}(\xi)$.)

On a alors

$$\sum_{i=1}^{n} [x_i, \xi_i p_{m-j}] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i p_{m-j}}{\partial_{\xi_i}} = (m-j+n) p_{m-j}.$$

Appelons p' le symbole polyhomogène donné par $p' \sim \sum \frac{1}{m-j+n} p_{m-j}$. Le symbole p s'écrit alors

$$p = \sum_{i=1}^{n} [\xi_i p', x_i].$$

$\boxminus$

Nous savons ainsi que nous pouvons nous limiter à regarder pour la trace la partie homogène d'ordre $-n$. On peut de plus montrer que la trace de ce symbole est nulle si son intégrale en ξ sur la sphère S^{n-1} pour la densité usuelle $|d\xi|$ est nulle.

Lemme 2.3.10 — Si $c_P(x) = \int_{S^{n-1}} p_{-n}(x,\xi) \left| \bar{d\xi} \right| = 0$, alors $p_{-n}(x,\xi)$ est une somme de commutateurs.

Démonstration du lemme Pour montrer cela, on utilise, comme dans le cas précédent, le fait qu'une dérivée partielle est un commutateur. Nous ne pouvons ici utiliser l'identité d'Euler précédente, car le cas $m-j=-n$ est précisément le cas dans lequel $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i p_{m-j}}{\partial_{\xi_i}} = 0$. Le fait que l'intégrale $\int_{S^{n-1}} p_{-n}(x,\xi) \left| \bar{d\xi} \right| = 0$ soit nulle montre que le symbole p_{-n} est orthogonal aux fonctions constantes sur la sphère qui constituent le noyau du Laplacien Δ_S de la sphère $S = S^{n-1}$. Ainsi, l'équation $\Delta_S q = p_{-n|S}$ admet une solution q sur la sphère. Posons $r = |\xi|$. Le Laplacien de l'espace, $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial_{\xi_i^2}}$ s'écrit, en utilisant les coordonnées sphériques, en fonction du Laplacien sphérique :

$$\Delta = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_S.$$

Ainsi si l'on applique Δ à la fonction $\frac{q}{r^{n-2}}$, on obtient

$$\Delta \frac{q}{r^{n-2}} = \frac{1}{r^n} \Delta_S q = \frac{1}{r^n} p_{-n|S} = p_{-n}.$$

La fonction $\frac{q}{r^{n-2}}$ définit un symbole à support compact homogène de degré $n-2$, et ses dérivées partielles par rapport à ξ_i définissent aussi des symboles q_i d'ordre $n-1$. Le symbole p_{-n} s'écrit donc

$$p_{-n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial_{\xi_i}} = \sum_{i=1}^{n} [q_i, \sigma_{x_i}].$$

$\boxminus$

Supposons alors à présent donnée une trace τ sur l'algèbre des symboles complets dans U. On obtient alors, en posant $\overline{p_{-n}(x)} = (\frac{1}{\mathrm{vol}\ S^{n-1}}) \int_{S^{n-1}} p_{-n}(x,\xi)\,|d\xi|$,

$$\tau(p) = \tau(p_{-n}(x,\xi)) = \tau(\overline{p_{-n}(x)}\,|\xi|^{-n}).$$

L'application $f \mapsto \mu(f) = \tau(f\,|\xi|^{-n})$ définit donc une forme linéaire continue sur l'espace $C_0^\infty(U)$. On sait que $\mu(\partial_{x_j} f) = 0$ car $\partial_{x_j} f\,|\xi|^{-n}$ est un commutateur si f est à support compact. Comme U est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, la forme linéaire μ est un multiple de l'intégrale de Lebesgue $\mu(f) = c\int_U f(x)dx$. ■

Remarques

1. Notons que dans les démonstrations précédemment citées, les traces étudiées le sont sur l'algèbre des symboles totaux, c'est-à-dire sur l'algèbre $\mathcal{P}^{\mathbb{Z}}(M)/\mathcal{P}^{-\infty}(M)$. Dans le cas d'une variété compacte, on peut identifier l'ensemble des opérateurs régularisants à une algèbre de matrices de taille infinie à décroissance rapide. Ceci permet de prouver que toute trace sur l'ensemble des opérateurs régularisants est un multiple de la trace ordinaire. Ainsi, une trace non nulle définie sur toute l'algèbre $\mathcal{P}^{\mathbb{Z}}(M)$ est nécessairement nulle pour les opérateurs régularisants, et il est équivalent d'étudier les traces sur l'algèbre $\mathcal{P}^{\mathbb{Z}}(M)$ ou sur le quotient $\mathcal{P}^{\mathbb{Z}}(M)/\mathcal{P}^{-\infty}(M)$.
2. Alain Connes a fait du résidu de Wodzicki un élément important de la géométrie non commutative en reliant celui-ci à la trace de Dixmier (pour la définition et les propriétés de la trace de Dixmier, voir [CM95, Pon96, Vas97]).

Théorème 2.5 — Connes, 1988
Soit P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre r, avec $\Re e\, r \leq -n$, sur une variété compacte M de dimension n. L'opérateur P est alors dans l'idéal de définition de la trace de Dixmier Tr_ω, et on a l'égalité suivante :

$$\mathrm{Tr}_\omega(P) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Res}\,(P).$$

3. Notons pour finir que nous pouvons généraliser ces notions aux opérateurs agissant dans un fibré $\mathcal{E}$ au-dessus de la variété M en remplaçant $p_{-n}(x,\xi)$ par $\mathrm{tr}_{\mathcal{E}}(p_{-n}(x,\xi))$.

2.4 Familles d'opérateurs pseudo-différentiels

2.4.1 Familles-produit d'opérateurs pseudo-différentiels

Dans [AS71], Atiyah et Singer ont défini la notion de famille d'opérateurs pseudo-différentiels sur un fibré vectoriel au-dessus d'un espace topologique. Nous donnons ici, dans le même esprit, une définition de la notion de famille d'opérateurs pseudo-différentiels indicée par une submersion $\mathcal{C}^\infty$ $s : Y \to X$, où X et Y sont des variétés lisses.

Commençons par rappeler la notion de famille-produit d'opérateurs pseudo-différentiels.

Définition 2.4.1 — Soient U et V deux ouverts respectifs de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, on appelle alors *famille-produit de classe $\mathcal{C}^k$* indicée par V d'opérateurs pseudo-différentiels (d'ordre m) une application de classe $\mathcal{C}^k$ $P \ : \ V \to \mathcal{P}^m(U)$, l'ensemble $\mathcal{P}^m(U)$ étant muni de la topologie définie dans la section (2.1.5). Une telle famille est déterminée par la donnée d'une fonction :

$$\sigma : V \to \mathcal{S}^m_{hom}(U)$$

vérifiant

$\forall \alpha, |\alpha| \leq k,\, v \mapsto \dfrac{\partial^\alpha \sigma}{\partial v^\alpha}$ est continue de V dans l'espace $\mathcal{S}^m_{hom}(U)$ muni de la topologie définie dans la section (2.1.5).

L'ensemble de ces opérateurs est désigné par $\mathcal{P}^m_k(U \times V \to V)$.

Notons qu'une telle famille P_v peut également être vue de manière globale comme un opérateur

$$\begin{array}{rcl} P : C^{\infty,k}_c(U \times V) & \longrightarrow & C^{\infty,k}(U \times V) \\ f & \longmapsto & Pf \ : \ (u,v) \mapsto (P_v f(.,v))(u). \end{array}$$

Etudions à présent le cas d'une submersion $s \ : \ Y^{n+p} \ \to \ X^p$. On sait que pour tout élément x de X, il existe un ouvert $\tilde{V}$ de X contenant x, un ouvert $\tilde{U}$ de Y, des ouverts U et V, respectivement de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^p$, et des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, ψ et Φ, tels que $\tilde{V} \overset{\psi}{\simeq} V$ et $\tilde{U} \overset{\Phi}{\simeq} U \times V$ et tels qu'on a alors :

$$s|_{\tilde{U}} = \psi^{-1} \circ \mathrm{pr}_2 \circ \Phi$$

où $\mathrm{pr}_2 : U \times V \to V$ désigne la seconde projection. L'application Φ établit un difféomorphisme

$$s^{-1}(\psi^{-1}(v)) \cap \tilde{U} \simeq U \times \{v\}.$$

Définition 2.4.2 — Une *famille de classe $\mathcal{C}^k$ d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m indicée par la submersion $Y \overset{s}{\to} X$* est une famille $(P_x)_{x \in X}$ d'opérateurs appartenant respectivement à $\mathcal{P}^m(s^{-1}\{x\})$, telle que pour toute donnée d'une trivialisation locale de la submersion comme précédemment, on ait, en conservant les notations précédentes, la propriété que l'application $V \to \mathcal{P}^m(U)$ qui est décrite par :

$$v \longmapsto P_{\psi^{-1}(v)}$$

est une famille-produit de classe $\mathcal{C}^k$ indicée par V. On note $\mathcal{P}^m_k(Y \overset{s}{\to} X)$ l'ensemble de ces opérateurs.

2.4.2 Opérateurs pseudo-différentiels à paramètre

Afin d'étudier de manière détaillée la résolvante d'un opérateur elliptique, il nous faut introduire la notion d'opérateurs pseudo-différentiels à paramètre. Nous proposons ici une très légère généralisation du travail de Shubin [Shu87], dont nous aurons besoin pour les feuilletages, en faisant varier le paramètre non plus dans un cône du plan complexe, mais plus généralement dans un espace de la forme $\Lambda \times Y$, où Y désigne un espace compact.

Définition 2.4.3 — Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Y un espace compact, $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un cône, et $m, d \in \mathbb{R}$.

1. On appelle $\mathcal{S}_d^m(U,\Lambda,Y)$ l'ensemble des fonctions $p(x,\xi,\lambda,y)$ vérifiant :
   - pour tout $\lambda_0 \in \Lambda$ fixé, $p(x,\xi,\lambda_0,y) \in \mathcal{C}^{\infty,0}(U \times \mathbb{R}^n \times Y)$;
   - pour tout compact $K \subset U$, pour tous multi-indices α,β, il existe une constante $C_{K,\alpha,\beta}$ telle que pour $(x,\xi,\lambda,y) \in K \times \mathbb{R}^n \times \Lambda \times Y$, on ait

$$\left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x,\xi,\lambda,y)\right| \leq C_{K,\alpha,\beta}(1+|\xi|+|\lambda|^{1/d})^{m-|\alpha|}. \tag{2.1}$$

2. Soit $m \in \mathbb{C}$, avec $\Re e\, m = m_0$. Par analogie avec le cas ordinaire, on peut définir la classe $\mathcal{S}_{d,hom}^m(U,\Lambda,Y)$ des symboles polyhomogènes d'ordre complexe. Ce sont des symboles $a(x,\xi,\lambda,y) \in \mathcal{S}_d^{m_0}(U,\Lambda,Y)$ vérifiant la propriété suivante.

   Il existe pour tout $j \in \mathbb{N}$ une fonction $a_{m-j}(x,\xi,\lambda,y)$ positivement homogène de degré $m-j$ en $(\xi,\lambda^{1/d})$, i.e. telle que

$$a_{m-j}(x,t\xi,t^d\lambda,y) = t^{m-j}a_{m-j}(x,\xi,\lambda,y),$$

   avec $t>0,\ (\lambda,t^d\lambda) \in \Lambda^2$, et vérifiant
   (a) pour tout j l'application

$$y \mapsto a_{m-j}(x,t\xi,t^d\lambda,y)$$

   est continue pour la topologie de la convergence uniforme de la fonction et de toutes ses dérivées en x et ξ sur tout compact $W \subset U \times (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \Lambda$;
   (b) il existe pour tout compact $K \subset U$, tout $N \in \mathbb{N}$, et tous multi-indices α et β une constante $C_{\alpha,\beta,K,N}$ telle que pour $x \in K$ et $y \in Y$, on ait

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \left(a(x,\xi,\lambda,y) - \sum_{j=0}^{N} a_{m-j}(x,\xi,\lambda,y)\right)\right| \leq C_{\alpha,\beta,K,N}(|\xi|+|\lambda|^{1/d})^{m_0-N-|\alpha|-1}.$$

De la même façon que dans le cas usuel, nous pouvons définir, à l'aide d'éléments de $\mathcal{S}_{d,hom}^m(U,Y\times\Lambda)$ et de la formule :

$$(P_\lambda(y)u)(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} p(x,\xi,\lambda,y)e^{i<x,\xi>}\hat{u}(\xi)d\xi,$$

la notion d'opérateurs pseudo-différentiels à paramètre, d'opérateurs régularisants, d'opérateurs proprement supportés, etc ...

Définition 2.4.4 —
- Un opérateur à paramètre est dit *proprement supporté* s'il est proprement supporté uniformément par rapport à $\Lambda \times Y$, c'est-à-dire s'il existe un fermé $F \subset U \times U$ dont les projections sur les composantes $U \times \{0\}$ et $\{0\} \times U$ sont propres, et tel que pour tout $(\lambda,y) \in \Lambda \times Y,\ \mathrm{Supp}(K_\lambda(y)) \subset F$.
- Un opérateur à paramètre proprement supporté $P_\lambda(y)$ de la forme précédente est dit *régularisant* (on notera $(P_\lambda(y))_{(y,\lambda)\in Y\times\Lambda} \in \mathcal{P}^{-\infty}(U,\Lambda,Y)$) si son symbole appartient à

$$\mathcal{S}_d^{-\infty}(U,\Lambda,Y) = \bigcap_m \mathcal{S}_d^m(U,\Lambda,Y).$$

  Cela revient à imposer la condition suivante sur le noyau $K_\lambda(y)(x,x')$ de cet opérateur.

Pour tout $\lambda \in \Lambda$ fixé, le noyau $K_\lambda(y)(x,x')$ est une fonction $\mathcal{C}^{\infty,0}$ telle qu'il existe pour toute donnée d'un compact $K \subset U$, de multi-indices α, β et d'un entier N, une constante $C^N_{K,\alpha,\beta}$ pour laquelle on a, pour $x \in K$ et $y \in Y$:

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_{x'}^\beta K_{y,\lambda}(x,x')\right| \leq C^N_{K,\alpha,\beta}(1+|\lambda|)^{-N}.$$

- Un *opérateur pseudo-différentiel classique proprement supporté d'ordre* (m,d) *à paramètre* est un opérateur proprement supporté qui est localement de la forme

$$(P_\lambda(y)u)(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} p(x,\xi,\lambda,y)e^{i<x,\xi>}\hat{u}(\xi)d\xi, \quad p \in \mathcal{S}^m_{d,hom}(U,\Lambda,Y).$$

  On notera $\mathcal{P}^m_d(U,\Lambda,Y)$ l'ensemble des opérateurs d'ordre m proprement supportés.
- Un opérateur pseudo-différentiel à paramètre d'ordre (m,d), $m_0 = \Re e\, m$, est dit *elliptique* si son symbole principal vérifie la propriété suivante : $\exists C > 0$, tel que pour tous $(x,\xi) \in U \times \mathbb{R}^n$ et $(\lambda, y) \in \Lambda \times Y$,

$$|a_m(x,\xi,y,\lambda)| \geq C(|\xi| + |\lambda|^{\frac{1}{d}})^{m_0}.$$

Les propriétés des opérateurs pseudo-différentiels que nous avons vues dans le cas ordinaire se transposent de manière naturelle dans le cadre des opérateurs à paramètre. En particulier, on peut généraliser la construction des opérateurs pseudo-différentiels sur des variétés, l'étendre au cas d'opérateurs agissant sur les sections de fibrés, utiliser la structure d'algèbre ou montrer les propriétés de composition des symboles (d étant constant). Mais la propriété qui nous intéresse le plus est celle de l'existence de parametrix à paramètres :

Proposition 2.4.5 — Soit $A_\lambda(y) \in \mathcal{P}^m_d(U,\Lambda,Y)$ un opérateur pseudo-différentiel proprement supporté elliptique à paramètre ; il existe alors un opérateur $B_\lambda(y) \in \mathcal{P}^{-m}_d(U,\Lambda,Y)$ et des opérateurs à paramètre régularisants $R'_\lambda(y)$ et $R''_\lambda(y)$ tels que :

$$A_\lambda(y)B_\lambda(y) = I + R'_\lambda(y) \text{ et } B_\lambda(y)A_\lambda(y) = I + R''_\lambda(y).$$

Un tel opérateur $B_\lambda(y)$ est naturellement appelé une *parametrix à paramètre* pour $A_\lambda(y)$.

Démonstration—

Si la parametrix existe, les composantes positivement homogènes b_j en (ξ,λ) pour $|\xi| + |\lambda| \neq 0$ de son symbole doivent vérifier les équations

$$b_{-m}(x,\xi,\lambda,y)a_m(x,\xi,\lambda,y) = 1$$

et, pour $l > 0$,

$$b_{-m-l}(x,\xi,\lambda,y)a_m(x,\xi,\lambda,y) + \sum_{\substack{j<l \\ j+k+|\alpha|=l}} \frac{[\partial_\xi^\alpha b_{-m-j}](x,\xi,\lambda,y)[\partial_x^\alpha a_{m-k}](x,\xi,\lambda,y)}{\alpha!} = 0. \quad (2.2)$$

Ces composantes homogènes n'étant *a priori* pas définies en 0, il faut, pour trouver le symbole recherché, régulariser ces fonctions au voisinage de l'origine, en les multipliant, par exemple, par

$$\chi(\xi,\lambda) = \omega(|\xi|^2 + |\lambda|^{2/d}) \quad (2.3)$$

avec $\omega(x)$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ valant 0 si $x < 1/2$ et 1 si $x \geq 1$. On note

$$c(x, \xi, \lambda, y) = \chi(\xi, \lambda) \sum_j b_{-m-j}(x, \xi, \lambda, y),$$

et il ne reste alors qu'a vérifier que l'opérateur $B_\lambda(y) = Op(c(x, \xi, \lambda, y))$ est bien un opérateur pseudo-différentiel à paramètre, en montrant par récurrence que

$$b_{-m-l}(x, \xi, \lambda, y) \in \mathcal{S}_d^{-m-l}(U, \Lambda, Y).$$

$B_\lambda(y)$ est alors par construction une parametrix à droite pour $A_\lambda(y)$, car le symbole de $A_\lambda(y)B_\lambda(y) - I$ est un élément de $\mathcal{S}_d^{-\infty}(U, \Lambda, Y)$. On montre d'une manière analogue l'existence d'une parametrix à gauche, puis que la différence de ces deux opérateurs est un opérateur régularisant. ■

Remarquons qu'en procédant comme dans le cas classique, on peut généraliser cette propriété aux opérateurs agissant sur une variété.

2.5 Puissances complexes d'un opérateur différentiel elliptique

Dans cette section, nous allons, en utilisant le formalisme développé par Shubin [Shu87], rappeler la définition des puissances complexes d'un opérateur A d'ordre $m > 0$, elliptique et inversible sur une variété compacte et sans bord M de dimension n, formulée par Seeley [See67]. Nous utilisons ici les opérateurs à paramètre de la section précédente dans le cas où Y est un point.

2.5.1 Résolvante d'un opérateur différentiel elliptique sur une variété compacte

L'exemple qui motive la définition de cette classe d'opérateurs est celui d'un opérateur différentiel elliptique A d'ordre m sur une variété compacte M, dont le symbole principal n'a pas de valeur propre dans une partie Λ du plan. On définit alors un opérateur elliptique à paramètre d'ordre (m, m) en posant : $A_\lambda = A - \lambda I$. Notons que la définition choisie pour les opérateurs pseudo-différentiels à paramètre impose de choisir ici A dans la classe des opérateurs différentiels. En effet, la condition (2.1) impose une propriété de décroissance asymptotique polynomiale par rapport au paramètre λ, ξ étant fixé, pour les dérivées du symbole d'ordre $|\alpha| > m$ en ξ. Or ces dérivées sont ici constantes par rapport au paramètre λ. Elles doivent donc être nulles pour que $A - \lambda$ satisfasse la condition (2.1), ce qui signifie que le symbole doit être un polynôme de degré m, ce qui revient encore à imposer que A est un opérateur différentiel.

Le symbole principal de cet opérateur est $a_m(x, \xi, \lambda) = a_m(x, \xi) - \lambda$, alors que les symboles d'ordre inférieur ne dépendent pas de λ. Le problème consiste à savoir si l'existence d'une parametrix à paramètre permet de comprendre la résolvante de l'opérateur A.

Remarque — Dans [See67], Seeley a montré qu'il était néanmoins possible de construire les puissances complexes d'un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre $m > 0$ vérifiant certaines propriétés spectrales en utilisant les propriétés du "symbole" d'une "parametrix à paramètre" pour $A - \lambda$, sans toutefois définir avec précision quelles étaient ces classes d'objets.

Le livre de Shubin [Shu87], que nous avons suivi ici, propose une démarche plus systématique, mais limitée comme nous venons de le voir aux opérateurs différentiels. Le problème de la formulation précise de ces classes d'objets n'a été résolu que plus tard par Grubb et Seeley [GS95] et fait appel à des notions plus élaborées. Pour notre propos, nous montrerons que le résidu de Wodzicki ne dépend pas de l'opérateur choisi pour le calculer, et donc que nous pouvons utiliser n'importe quel opérateur différentiel elliptique à paramètre dans un secteur Λ du plan complexe. En utilisant la construction de Seeley, on peut étendre le choix des opérateurs intervenant dans la définition aux opérateurs pseudo-différentiels.

Nous aurons besoin de connaître un résultat plus fin sur la topologie définie sur l'algèbre des opérateurs régularisants, analogue au résultat classique et démontré dans [Shu87].

Proposition 2.5.1 — Les familles de semi-normes suivantes définissent la même topologie sur l'algèbre des opérateurs régularisants à paramètre. Soit R_λ un opérateur régularisant à paramètre, de noyau $K_\lambda(x,y) \in \mathcal{C}^\infty(M \times M)$.

1. La famille
$$|R_\lambda|_{\alpha,\beta,N} = \sup_{x,y,\lambda} \frac{\left|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K_\lambda(x,y)\right|}{(1+|\lambda|)^{-N}} ,$$
avec α, β des multi-indices et $N \in \mathbb{N}$.
2. La famille
$$|R_\lambda|_{s,t,N} = \frac{\|R_\lambda\|_{s,t}}{(1+|\lambda|)^{-N}},$$
avec $s, t \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$.

Nous pouvons à présent énoncer le théorème principal pour la résolvante d'un opérateur elliptique :

Théorème 2.6 — [Shu87] Soit A un opérateur différentiel d'ordre $m > 0$, de symbole principal $a_m(x,\xi)$, tel qu'il existe un angle Λ pour lequel $\forall \lambda \in \Lambda,\ a_m(x,\xi) - \lambda$ est inversible pour $\xi \neq 0$. On a alors les propriétés suivantes.

1. Il existe $R > 0$ tel que $A - \lambda I$ est inversible pour $\lambda \in \Lambda_R = \Lambda \cap \{|\lambda| \geq R\}$, avec
$$(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{P}_m^{-m}(M, \Lambda_R).$$
2. Pour $\lambda \in \Lambda_R$, il existe un opérateur pseudo-différentiel à paramètre $B_\lambda \in \mathcal{P}_m^{-m}(M, \Lambda_R)$ qui est une parametrix à paramètre pour $A - \lambda I$, ne différant de $(A - \lambda I)^{-1}$ que par un opérateur régularisant et dont le symbole est donné par $c(x,\xi,\lambda) = \chi(\xi,\lambda) b(x,\xi,\lambda)$, où $\chi(\xi,\lambda)$ est donné par (2.3) et $b = \sum_j b_{-m-j}$ est calculé par les formules de récurrence :
$$\begin{aligned} b_{-m}(a_m - \lambda) &= 1 \\ b_{-m-l}(a_m - \lambda) + \sum_{\substack{j<l \\ j+k+|\alpha|=l}} \frac{[\partial_\xi^\alpha b_{-m-j}][\partial_x^\alpha a_{m-k}]}{\alpha!} &= 0 \quad l > 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$
De plus, si l'on note $B_{N,\lambda} = Op(\sum_{j=0}^N c_{-m-j})$, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$
$$(A - \lambda I)^{-1} - B_{N,\lambda} \in \mathcal{P}_m^{-m-N}(M, \Lambda_R) \tag{2.5}$$

3. On a l'estimation suivante en norme L^2 : il existe $C > 0$ tel que

$$\left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{|\lambda|}.$$

Démonstration—

1. Par la proposition 2.4.5, appliquée avec $Y = pt$, on sait qu'il existe une parametrix à paramètre pour $(A-\lambda)$. On a $(A-\lambda I)B_\lambda = I + R'_\lambda$, avec $R'_\lambda \in \mathcal{P}^{-\infty}(U,\Lambda)$. Or, pour N arbitrairement grand, nous savons que pour $s,t \in \mathbb{R}$,

$$\left\|R'_\lambda\right\|_{s,t} \leq C_{s,t}^{(N)}(1+|\lambda|)^{-N}.$$

   En particulier, il existe $R > 0$ tel que $\|R'_\lambda\| < 1/2$ si $|\lambda| > R$, et $(I + R'_\lambda)$ est alors inversible dans $L^2(M)$ pour $\lambda \in \Lambda_R$. On peut en fait montrer que $(I + R'_\lambda)$ est inversible dans tous les espaces $H^s(M)$ (car il est elliptique et donc a même noyau et co-noyau dans tous les espaces $H^s(M)$ cf [Shu87]). Ceci montre donc que pour $\lambda \in \Lambda_R$, $(A-\lambda I)$ est inversible à droite dans $H^s(M)$, d'inverse $B_\lambda(I+R'_\lambda)^{-1}$. On montre de même qu'il existe un inverse à gauche, et donc un inverse dans $H^s(M)$.
2. L'existence d'une parametrix à paramètre et la formule permettant de calculer son symbole (2.2) étant connues, il reste à montrer que la différence entre la résolvante de l'opérateur A et la parametrix à paramètre B_λ est un opérateur régularisant, ce qui montrera également que $(A-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{P}_m^{-m}(M)$. Posons $Q_\lambda = (I+R'_\lambda)^{-1} - I = -R'_\lambda(I+R'_\lambda)^{-1}$. Il est clair que Q_λ vérifie la seconde condition du lemme précédent, en utilisant par exemple un développement en série entière. Q_λ est donc un opérateur régularisant.
3. Il suffit de montrer que

$$\left\|(\lambda^{-1}A - I)^{-1}\right\| \leq C.$$

   Or, pour $\lambda \in \Lambda_R$, $(\lambda^{-1}A - I)^{-1}$ est, d'après ce qui précède, un opérateur pseudo-différentiel à paramètre dans la classe $\mathcal{P}_d^0(M,\Lambda_R)$. Pour un symbole à paramètre positivement homogène de degré 0, la condition (2.1) est indépendante du paramètre. Pour des symboles à paramètre positivement homogènes de degré < 0, la condition (2.1) est plus forte que la condition habituelle pour un opérateur pseudo-différentiel classique. On peut donc appliquer à cet opérateur le corollaire (2.2.4), en oubliant le paramètre, et montrer que $\sup_{\lambda\in\Lambda_R}(C_\lambda)$ est majoré par une constante indépendante de λ, ce qui nous donne le résultat.

■

2.5.2 Puissances complexes

A présent que nous avons posé le cadre naturel des opérateurs à paramètre (au sens de Shubin) dans lequel évolue la résolvante d'un opérateur différentiel elliptique et inversible d'ordre m sur une variété compacte, nous pouvons appliquer les résultats dont nous disposons pour définir les puissances complexes d'un tel opérateur. Nous allons ainsi définir une application $\mathbb{C} \to \mathcal{P}(M)$, $s \mapsto A^s$ vérifiant $A^sA^t = A^{s+t}$ pour tous $s,t \in \mathbb{C}$ et où $A^s = A^k$ si $s = k$ un entier. En nous servant de la parametrix à paramètre construite à la section précédente, nous calculerons le symbole de ces opérateurs d'ordre ms et nous étudierons les propriétés d'holomorphie de cette fonction par rapport à $s \in \mathbb{C}$.

Commençons par préciser les conditions que nous souhaitons imposer à l'opérateur différentiel A d'ordre m. Rappelons que le spectre de l'opérateur étant choisi différent de $\mathbb{C}$, c'est un ensemble discret sans point d'accumulation. Nous savons que l'opérateur $A - \lambda$ appartient à l'ensemble $\mathcal{P}_m^m(M, \mathbb{C})$, et nous supposons également que l'opérateur $A - \lambda$ est elliptique à paramètre dans un angle fermé du plan Λ d'origine 0. Le théorème précédent nous donne l'existence de la résolvante pour $\lambda \in \Lambda_R = \Lambda \cap \{|\lambda| \geq R\}$. Pour simplifier, quitte à changer A en $e^{i\theta}(A + \varepsilon I)$, nous pouvons supposer que l'opérateur A n'a pas de valeur propre dans un voisinage de cet angle Λ, qui contient la droite $\mathbb{R}_-$. Il existe donc un secteur Λ' du plan contenant l'origine délimité par un contour $\Gamma_{\rho,\theta}$ formé par les courbes suivantes :

- la demi-droite $D_- = \{z = re^{i(\pi-\theta)},\ \rho < r < +\infty\}$,
- la demi-droite $D_+ = \{z = re^{i(-\pi+\theta)},\ \rho < r < +\infty\}$,
- l'arc de cercle $C_\rho = \{z = \rho e^{i\psi},\ \pi - \theta > \psi > -\pi + \theta\}$.

à l'intérieur duquel on a :

1. $a_m(x, \xi) - \lambda$ est inversible si $\xi \neq 0$ et $\lambda \in \Lambda'$;
2. $A - \lambda I$ est inversible pour $\lambda \in \Lambda'$.

Fixons à présent deux contours $\Gamma = \Gamma_{\rho,O} \subset \Gamma' = \Gamma_{\rho',\theta}$, avec $\rho > \rho'$, vérifiant les conditions précédentes.

Par les estimations du théorème 2.6, page 74, l'intégrale

$$A_z = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^z (A - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

où $z \in \mathbb{C}$ et où $\lambda^z = |\lambda|^z\, e^{iz\arg\lambda}$ sur le contour Γ, converge pour la norme des opérateurs bornés sur $L^2(M)$ pour $\Re e\, z < 0$. Pour $\Re e\, z < 0$, A_z est donc un opérateur borné sur $L^2(M)$.

Nous allons maintenant montrer que la famille A_z est un bon candidat pour définir les puissances complexes de A pour $\Re e\, z < 0$, puis comment nous pouvons naturellement étendre cette famille pour z quelconque et définir ainsi A^z. Nous montrerons ensuite que le symbole de A^z est donné par un calcul que nous effectuerons sur le symbole de la parametrix à paramètre que nous avons définie pour $A - \lambda I$, et finalement que l'opérateur A^z est donc bien un opérateur pseudo-différentiel.

Proposition 2.5.2 —

1. Pour $\Re e\, z < 0$ et $\Re e\, w < 0$, on a la propriété de semi-groupe
$$A_z A_w = A_{z+w}.$$
2. Pour k un entier strictement positif, on a
$$A_{-k} = (A^{-1})^k.$$
3. Pour $\Re e\, z < 0$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$, la fonction $z \mapsto A_z$, à valeurs dans $\mathcal{L}(H^s(M))$, est holomorphe.

Démonstration—

1. Notons tout d'abord que la formule définissant A_z ne dépend pas du contour fermé Γ ou Γ' choisi pour intégrer. On peut donc écrire, grâce à l'identité de Hilbert :

$$(\lambda-\mu)(A-\lambda I)^{-1}(A-\mu I)^{-1} = (A-\lambda I)^{-1} - (A-\mu I)^{-1}. \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} A_z A_w &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma'}\int_{\Gamma} \lambda^z \mu^w (A-\lambda I)^{-1}(A-\mu I)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma'}\int_{\Gamma} \frac{\lambda^z\mu^w}{\lambda-\mu}[(A-\lambda I)^{-1}-(A-\mu I)^{-1}] d\mu d\lambda \\ &= \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma'} \lambda^{z+w}(A-\lambda)^{-1} d\lambda - \frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma}\mu^w (A-\mu I)^{-1}\int_{\Gamma}\frac{\lambda^z}{\lambda-\mu} d\mu d\lambda \\ &= A_{z+w} + 0. \end{aligned}$$

2. Si $z=-k$ est entier et négatif, alors on a $(re^{i\pi})^z = (re^{-i\pi})^z$. Les intégrales sur les branches infinies se compensent donc et il reste à calculer

$$\frac{i}{2\pi}\int_{|\lambda|=\rho} \lambda^{-k}(A-\lambda)^{-1} d\lambda.$$

En faisant le changement de variables $\mu = 1/\lambda$, et en utilisant la formule

$$(A-\lambda I)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}(\lambda^{-1}I - A^{-1})^{-1},$$

on obtient

$$A_{-k} = -\frac{iA^{-1}}{2\pi}\int_{|\mu|=1/\rho} \mu^{k-1}(\mu I - A^{-1})^{-1} d\mu = A^{-1}(A^{-1})^{k-1} = A^{-k}$$

car dans l'intégrale précédente nous pouvons utiliser la formule de Cauchy, l'opérateur A^{-1} ayant toutes ses valeurs propres contenues dans le disque délimité par le cercle sur lequel on intègre.

3. Différentions A_z par rapport à z. L'intégrale

$$\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma} \lambda^z(\ln\lambda)(A-\lambda I)^{-1} d\lambda$$

converge uniformément (en norme d'opérateur sur $H^s(M)$) pour $\Re z < -\varepsilon < 0$. Cette intégrale est donc bien égale à $\frac{dA_z}{dz}$ et A_z dépend bien holomorphiquement de z pour $\Re z < 0$.

■

On définit alors, à partir de A_z, la puissances complexe A^z de A pour tout nombre complexe z en posant

$$A^z = A^k A_{z-k},$$

où $k\in\mathbb{Z}$ est choisi tel que $\Re z < k$.

Proposition 2.5.3 —

1. La définition précédente ne dépend pas du $k > \Re z$ choisi.
2. Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a

$$A^z A^w = A^{z+w}.$$

3. Si $z = p \in \mathbb{Z}$, alors on retrouve la puissance p-ième ordinaire de l'opérateur A.
4. Pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{R}$, la fonction $z \mapsto A^z$ de $\{\Re e\, z < k\}$ dans $\mathcal{L}(H^s(M), H^{s-mk}(M))$ est holomorphe.

Démonstration—

1. Soient k et l des entiers supérieurs à $\Re e\, z$, il faut montrer que $A^k A_{z-k} = A^l A_{z-l}$. Supposons que $k > l$ par exemple et posons $p = k - l$. Il nous faut donc vérifier que $A_{z-k} = A^{-p} A_{z-l}$. Mais en utilisant le fait que $A^{-p} = A_{-p}$ et la propriété de semi-groupe de la proposition précédente, on obtient ce résultat.
2. $A^z A^w = A^k A_{z-k} A^l A_{z-l} = A^{k+l} A_{z-k} A_{z-l} = A^{k+l} A_{z+w-(k+l)} = A^{z+w}$.
3. Ce résultat est évident.
4. En utilisant le fait que A^k est un opérateur linéaire de $H^s(M)$ vers H^{s-mk} et la propriété d'holomorphie de A_z, on a directement ce résultat.

■

Attachons-nous maintenant à décrire le symbole de cet opérateur A^z que nous venons de définir et montrons que A^z est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre mz. Nous avons vu qu'il existe une parametrix B_λ pour l'opérateur à paramètre $A - \lambda I$ qui ne diffère de la résolvante que par un opérateur régularisant à paramètre. Les formules (2.4) permettent de calculer le symbole c de cette parametrix à paramètre par $c(x, \xi, \lambda) = \chi(\xi, \lambda) b(x, \xi, \lambda)$ avec $b(x, \xi, \lambda) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_{-m-j}$, les b_{-m-j} étant calculés par récurrence d'après les formules (2.4). Définissons alors pour $\Re e\, z < 0$ les fonctions $b^{(z)}_{mz-j}$ par

$$b^{(z)}_{mz-j}(x, \xi) = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^z b_{-m-j}(x, \xi, \lambda) d\lambda.$$

Remarquons en premier lieu que ces fonctions sont positivement homogènes en ξ de degré $mz - j$. En effet, pour $\xi \neq 0$ et $t > 1$,

$$\begin{aligned}
b^{(z)}_{mz-j}(x, t\xi) &= \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^z b_{-m-j}(x, t\xi, \lambda) d\lambda = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma(t)} (t^m \mu)^z b_{-m-j}(x, t\xi, t^m \mu) t^m d\mu \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma(t)} (t^m \mu)^z t^{-m-j} b_{-m-j}(x, \xi, \mu) t^m d\mu \\
&= t^{mz-j} \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma(t)} \mu^z b_{-m-j}(x, \xi, \mu) d\mu = t^{mz-j} b^{(z)}_{mz-j}(x, \xi).
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé ici la propriété que l'intégration sur $\Gamma(t) = \Gamma_{t^{-m}\rho, 0}$ est la même que sur le contour Γ car les fonctions $b_{-m-j}(x, \xi\lambda)$ n'ont pas de singularités dans un disque assez petit autour de l'origine en λ. Remarquons aussi que le calcul précédent, effectué pour $t > 1$, est valable pour tout $\xi \neq 0$. On en déduit donc qu'il est vrai pour tout $t > 0$.

Comme nous l'avons fait précédemment pour A_z, nous pouvons montrer la proposition suivante :

Proposition 2.5.4 —

1. Pour $\Re e\, z, \Re e\, w < 0$ et $j \in \mathbb{N}$, on a la propriété de semi-groupe :

$$\sum_{|\alpha|+p+q=j} \frac{\partial_\xi^\alpha b_{mz-p}^{(z)}(x,\xi)\partial_x^\alpha b_{mw-q}^{(w)}(x,\xi)}{\alpha!} = b_{m(z+w)-j}^{(z+w)}(x,\xi). \tag{2.7}$$

2. Si k est un entier strictement positif alors la famille $\{b_{-mk-j}^{(-k)}(x,\xi)\}_{j\in\mathbb{N}}$ est une famille de composantes positivement homogènes en ξ permettant de définir une parametrix pour l'opérateur A^k.
3. Pour $\Re e\, z < 0$, $\xi \neq 0$ et tous multi-indices α et β, la fonction $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta b_{mz-j}^{(z)}(x,\xi)$ est holomorphe par rapport à z.

Démonstration— Pour démontrer ces propriétés, il suffit de reprendre les démonstrations des propriétés analogues (2.5.2), en remplaçant les opérateurs et leur multiplication par les séries formelles de fonctions homogènes munies de leur loi de composition. Par exemple, pour démontrer la première de ces propriétés pour tout j, il suffit de montrer que

$$b^{(z)} \circ b^{(w)} = b^{(z+w)} \text{ avec } b^{(z)} = \sum_j b_{mz-j}^{(z)} = \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^z b(x,\xi,\lambda)d\lambda.$$

Cela revient à montrer que :

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma'}\int_\Gamma \lambda^z\mu^w b(x,\xi,\lambda)\circ b(x,\xi,\mu)d\lambda d\mu = \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^{z+w} b(x,\xi,\lambda)d\lambda.$$

Or on peut utiliser l'analogue de l'identité de Hilbert (2.6) :

$$(\lambda-\mu)b(x,\xi,\lambda)\circ b(x,\xi,\mu) = b(x,\xi,\lambda) - b(x,\xi,\mu)$$

démontrée très facilement en composant par le symbole $a(x,\xi,\lambda)$ de $A-\lambda I$ les deux côtés de l'égalité. En utilisant de nouveau la formule de Cauchy, on trouve le résultat souhaité. ∎

Pour étendre, comme dans le cas des opérateurs, les propriétés précédentes à l'ensemble du plan complexe, on utilise les composantes homogènes $a_{mk-j}^{(k)}(x,\xi)$ du symbole $a^{(k)}(x,\xi)$ de l'opérateur $A^k (k \geq 0)$, ou, pour k un entier négatif, les composantes homogènes $a_{mk-j}^{(k)}(x,\xi)$ du symbole $a^{(k)}(x,\xi)$ d'une parametrix de l'opérateur A^k. On peut alors définir $b_{mz-j}^{(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $j \in \mathbb{N}$ en posant

$$b_{mz-j}^{(z)}(x,\xi) = \sum_{p+q+|\alpha|=j} \partial_\xi^\alpha a_{mk-p}^{(k)} \partial_x^\alpha b_{m(z-k)-q}^{(z-k)}$$

où k est un entier choisi de sorte que $\Re e\, z < k$. On a alors un résultat comparable à (2.5.3) pour l'extension à $\mathbb{C}$.

Proposition 2.5.5 —

1. La définition précédente ne dépend pas du $k > \Re e\, z$ choisi.
2. Si $\Re e\, z < 0$, la définition précédente du symbole $b_{mz-j}^{(z)}$ coïncide avec la définition donnée précédemment.

3. Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, la propriété (2.7) reste valide.
4. Si $z = p \in \mathbb{Z}$, alors $b^{(p)}_{mp-j}(x,\xi) = a^{(p)}_{mp-j}(x,\xi)$.
5. Pour $\xi \neq 0$ et tous multi-indices α et β, la fonction $\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x b^{(z)}_{mz-j}(x,\xi)$ est une fonction entière de z.

Démonstration— Comme dans la proposition précédente, la démonstration de ces résultats consiste à reprendre celle de (2.5.3) en remplaçant les opérateurs par les séries formelles. ■

Il nous faut à présent, pour obtenir le symbole de l'opérateur A^z, régulariser en $\xi = 0$ les composantes homogènes $b^{(z)}_{mz-j}(x,\xi)$. Définissons la fonction $\chi(\xi) = \omega(|\xi|)$ où la fonction $\omega(x)$ est la même que celle utilisée dans la définition du symbole de $B(\lambda)$, à savoir une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ nulle pour $x < 1/2$ et égale à 1 pour $x \geq 1$. Posons alors, pour $z \in \mathbb{C}$, et pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$d^{(z)}_{mz-j}(x,\xi) = \chi(\xi) b^{(z)}_{mz-j}(x,\xi).$$

Appelons $D^{(z)}_{mz-j}$ l'opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est $d^{(z)}_{mz-j}(x,\xi)$. La série $d^{(z)}(x,\xi) = \sum_{j\in\mathbb{N}} d^{(z)}_{mz-j}(x,\xi)$ est un symbole polyhomogène. Notons D_z l'opérateur de $\mathcal{P}^{mz}(M)$ correspondant, et $D_{N,z}$ l'opérateur dont le symbole est la somme partielle pour j compris entre 0 et N des $d^{(z)}_{mz-j}(x,\xi)$:

$$D_z = \mathrm{Op}(\sum_{j\in\mathbb{N}} d^{(z)}_{mz-j}(x,\xi)) \text{ et } D_{N,z} = \mathrm{Op}(\sum_{j=0}^{N} d^{(z)}_{mz-j}(x,\xi)).$$

Rappelons encore que, comme dans le cas de la définition de la parametrix à paramètre, les calculs précédents ne sont valables que dans un système de coordonnées fixé. Il faut en fait, pour définir une parametrix pour A^z, fixer un atlas fini pour M et un système de coordonnées locales dans chaque ouvert de carte, puis définir les opérateurs précédents $D^{(z),(i)}_{mz-j}, D^{(i)}_{N,z}$ et $D^{(i)}_z$ dans chaque ouvert de carte U_i. Si $(\phi_i)_{i\in I}$ est une partition de l'unité adaptée au recouvrement et si $\psi_i \in \mathcal{C}^\infty_0(U_i)$ vaut 1 au voisinage du support de ϕ_i, on a finalement :

$$\begin{aligned} D^{(z)}_{mz-j} &= \sum_{i\in I} M_{\phi_i} D^{(z),(i)}_{mz-j} M_{\psi_i}, \\ D_{N,z} &= \sum_{i\in I} M_{\phi_i} D^{(i)}_{N,z} M_{\psi_i}, \\ D_z &= \sum_{i\in I} M_{\phi_i} D^{(i)}_z M_{\psi_i}. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors énoncer le théorème principal de cette section.

Théorème 2.7 — Pour tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$A^z - D_{N,z} \in \mathbb{P}^{mz-N}(M, \Re e\, z < t). \tag{2.8}$$

En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$A^z \in \mathcal{P}^{mz}(M). \tag{2.9}$$

Démonstration—

1. Commençons par montrer que $\forall N \in \mathbb{N}$, on a

$$A^z - D_{N,z} \in \mathbb{P}^{mz-N}(M, \Re e\, z < 0). \tag{2.10}$$

Introduisons tout d'abord une autre famille d'opérateurs, $C_{N,z}$, définie, pour $\Re e\, z < 0$, par son symbole :

$$c_N^{(z)} = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \sum_{j=0}^{N} \lambda^z c_{-m-j}(x, \xi, \lambda) d\lambda.$$

Remarquons qu'alors la famille $D_{N,z} - C_{N,z}$ est une famille holomorphe d'opérateurs régularisants sur $\Re e\, z < 0$. En effet, le symbole de $D_{N,z} - C(N, z)$ est de la forme :

$$(d_N^{(z)} - c_N^{(z)})(x, \xi) = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \sum_{j=0}^{N} \lambda^z \left(\chi(\xi) - \chi(\xi, \lambda)\right) b_{-m-j}(x, \xi, \lambda) d\lambda.$$

Mais le symbole que nous venons d'écrire est nul pour $|\xi| > 1$, ainsi que toutes ses dérivées. Il appartient donc à l'ensemble $\mathcal{P}^{-\infty}(M)$ des opérateurs régularisants. De plus, il est clair que l'on peut dériver ce symbole par rapport à z. On a donc bien montré que $D_{N,z} - C_{N,z}$ est une famille holomorphe d'opérateurs régularisants sur $\Re e\, z < 0$.

Pour montrer (2.10), il suffit alors de montrer que

$$R_{N,z} = A^z - C_{N,z} \in \mathbb{P}^{mz-N}(M, \Re e\, z < 0).$$

Le symbole $r_N^{(z)}$ de $R_{N,z}$ s'écrit alors, dans un système de coordonnées locales fixé,

$$r_N^{(z)}(x, \xi) = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^z r_N(x, \xi, \lambda) d\lambda$$

où $r_N(x, \xi, \lambda)$ est le symbole de $R_N(\lambda) = (A - \lambda)^{-1} - B_{N,\lambda}$. On a alors pour tous multi-indices α, β et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_z^k r_N^{(z)} = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^z (\ln \lambda)^k \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta r_N(x, \xi, \lambda) d\lambda.$$

En utilisant alors l'estimation (2.5), on sait que pour $x \in K$, un compact dans l'ouvert considéré, il existe une constante $C_{K,\alpha,\beta}$ avec

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta r_N(x, \xi, \lambda)\right| \leq C_{K,\alpha,\beta}(1 + |\xi| + |\lambda|^{1/m})^{-m-N-|\alpha|},$$

d'où l'on tire

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta r_N(x, \xi, \lambda)\right| \leq C_{K,\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{-N-|\alpha|}(1 + |\lambda|)^{-1}.$$

En appliquant cette estimation à l'égalité précédente, on obtient l'estimation souhaitée pour le symbole de $R_{N,z}$. En intégrant le développement asymptotique de $r_N(x, \xi, \lambda)$, on voit facilement que le symbole $r_N^{(z)}(x, \xi)$ admet un développement asymptotique polyhomogène uniformément par rapport à z sur tout compact. On a donc bien (2.10).

2. On en déduit (2.8) en utilisant la structure de groupe des puissances A^z et des symboles $b^{(z)}_{mz-j}$, et le fait que la composition de deux familles holomorphes est une famille holomorphe.
3. On en déduit enfin (2.9) en utilisant le fait que $D_z \in \mathcal{P}^{mz}(M)$. En fixant $t > \Re e\, z$ dans (2.8) et en faisant tendre N vers l'infini, on obtient

$$A^z - D_z \in \mathcal{P}^{-\infty}(M).$$

■

2.5.3 Résidu de Wodzicki, puissances complexes, fonction ζ et développement du noyau de la chaleur

Les théorèmes 2.3, page 65 et 2.7, page 80 nous permettent de déduire, comme corollaire immédiat, le théorème suivant.

Théorème 2.8 — Soit P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre r sur une variété compacte M de dimension n. Soit A un opérateur différentiel elliptique d'ordre m, choisi comme dans la section précédente (on peut se limiter, par exemple au cas où A est positif et inversible). La fonction $s \mapsto \mathsf{TR}(PA^{-s})$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec au plus des pôles simples aux points de la forme $s_k = \frac{k-n-r}{m}$, $k \in \mathbb{N}$ et des résidus donnés par

$$\mathsf{res}_{\,s=s_k} \mathsf{TR}(PA^{-s}) = \frac{1}{m} \mathsf{Res}\,(PA^{-s_k}).$$

En particulier cette fonction n'a éventuellement un résidu en 0 que dans le cas où r est un entier supérieur ou égal à $-n$, et ce résidu est alors donné par

$$\mathsf{res}_{\,s=0} \mathsf{TR}(PA^{-s}) = \frac{1}{m} \mathsf{Res}\,(P).$$

Fonction ζ d'opérateur

Dans [See67] Seeley a défini les puissances complexes d'un opérateur pseudo-différentiel A sur une variété compacte M de dimension n, d'ordre $m > 0$, dont le symbole n'a pas de valeurs propres dans un angle vectoriel Λ du plan. Il montre alors que la fonction $\zeta_A(s)$ définie pour $\Re e(ms) > n$ par

$$\zeta_A(s) = \mathrm{Tr}(A^{-s})$$

s'étend en une fonction méromorphe avec au plus des pôles simples situés aux points de la forme $\frac{k-n}{m}$, avec $k \in \mathbb{N}$. Il montre également que la fonction ζ_A est en fait holomorphe au voisinage de $s = 0$. Ces résultats peuvent être retrouvés ici comme une conséquence directe des théorèmes 2.3, page 65 et 2.8, page 82 sur le résidu de Wodzicki. En particulier, on obtient la formule suivante, pour les puissances complexes d'un opérateur pseudo-différentiel A d'ordre m définies par Seeley [See67] :

$$\mathrm{res}_{\,s=s_k} \zeta_A(s) = \frac{1}{m} \mathrm{Res}\,(A^{-s_k}).$$

Wodzicki utilise cette formule pour définir le résidu non commutatif en posant pour tout opérateur pseudo-différentiel P d'ordre r

$$\mathrm{Res}\,(P) = m\frac{d}{du}(\,\mathrm{res}\,_{s=1}\zeta_{A+uP}(s))_{|u=0}$$

pour un opérateur pseudo-différentiel A admettant des puissances complexes et d'ordre $m > \Re e\, r$.

Développement du noyau de l'opérateur de la chaleur

Nous pouvons également relier le résidu de Wodzicki d'un opérateur au noyau de l'opérateur de la chaleur e^{-tA} si A est un opérateur dont le symbole principal est défini positif. Rappelons que, pour $t > 0$, l'opérateur e^{-tA} est un opérateur à trace, qui peut être défini par l'intégrale fonctionnelle

$$e^{-tA} = \int_\Gamma e^{-t\lambda}(A-\lambda)^{-1}d\lambda$$

et qu'il est solution de l'équation de la chaleur généralisée : $\partial_t - A = 0$. L'identité

$$A^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-tA}dt$$

montre que la transformée de Mellin de $\mathrm{Tr}(e^{-tA})$ en s vaut $\Gamma(s)\zeta_A(s)$. D'après ce qui précède, cette fonction $\Gamma(s)\zeta_A(s)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles donnés. Or on sait que la transformée de Mellin $\mathcal{M}f(s) = \int_0^\infty t^{s-1}f(t)dt$ d'une fonction C^∞ sur $]0,+\infty[$ est une fonction méromorphe avec un pôle d'ordre $k+1$ au point s_0 si et seulement si la fonction f admet un terme de la forme

$$t^{-s_0}(\ln t)^k$$

dans son développement asymptotique lorsque $t \to 0$. En utilisant la transformée de Mellin inverse et le fait que les pôles de Γ sont simples et situés aux points entiers négatifs, nous pouvons donner un développement asymptotique de $\mathrm{Tr}(e^{-tA})$.

La fonction $\mathrm{Tr}(e^{-tA})$ admet un développement asymptotique, lorsque $t \to 0$, de la forme :

$$\mathrm{Tr}(e^{-tA}) \sim \alpha_n(A) + \sum_{n\neq j=0}^{\infty}\alpha_j(A)t^{\frac{j-n}{m}} + \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(A)t^k\ln t.$$

Notons que dans cette formule, les $\beta_k(A)$ sont nuls si $m \notin \mathbb{N}$. Notons encore que le terme $\beta_0(A)\ln t$ est nul car ζ_A est holomorphe au voisinage de 0. Pour la même raison, les termes $\beta_k(A)t^k\ln t$ sont nuls si A est un opérateur différentiel. En effet, on a la formule suivante pour les $\beta_k(A)$:

$$\beta_k(A) = \,\mathrm{res}\,_{s=-k}\Gamma(s)\,\mathrm{res}\,_{s=-k}\zeta_A(s) = \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\,\mathrm{res}\,_{s=-k}\zeta_A(s).$$

Ceci nous donne une autre égalité vérifiée par le résidu de Wodzicki : on obtient

$$\mathrm{Res}\,(A) = m\beta_1(A).$$

On peut, de même que précédemment, utiliser cette formule pour définir le résidu de Wodzicki d'un opérateur pseudo-différentiel, en posant :

$$\mathrm{Res}\,(P) = m\frac{d}{du}(\beta_1(A+uP))_{|u=0}.$$

Cela revient à chercher un développement asymptotique pour $\mathrm{Tr}(Pe^{-tA})$, que l'on peut retrouver directement grâce à l'étude que nous avons faite sur $\mathrm{TR}(PA^{-s})$. En utilisant la même propriété de la transformation de Mellin inverse que précédemment, et les mêmes propriétés sur Γ, on obtient un développement asymptotique, lorsque $t \to 0$, de la forme

$$\mathrm{Tr}(Pe^{-tA}) \sim \alpha_n(P,A) + \sum_{n \neq j=0}^{\infty} \alpha_j(A) t^{\frac{j-n-r}{m}} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(A,P) t^k \ln t.$$

Dans ce développement asymptotique, le coefficient $\beta_k(A,P)$ de $\ln t$ est donné par :

$$\beta_0(A,P) = \mathrm{res}_{s=0}\Gamma(s)\,\mathrm{res}_{s=0}\,\mathrm{TR}(PA^{-s}) = \frac{1}{m}\,\mathrm{Res}\,(P),$$

ce qui nous donne une autre définition possible pour le résidu de Wodzicki.

Précisons pour finir que si nous étudions, à l'inverse de ce que nous faisons ici, les propriétés du noyau de l'opérateur e^{-tA} et son développement asymptotique autour de 0, nous pouvons retrouver les résultats que nous avons obtenus sur la fonction ζ_A.

Chapitre 3

Opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux sur un feuilletage

Nous allons maintenant définir, comme dans [Co79], la classe des opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux sur un feuilletage. Nous donnons d'abord une définition générale et abstraite de cette classe d'opérateurs, puis nous en donnerons une définition locale plus maniable.

3.1 G-opérateurs pseudo-différentiels

Nous rappelons ici la notion de G-opérateur pseudo-différentiel G-équivariant pour un groupoïde différentiable G. Cette notion a été introduite par Connes pour les feuilletages [Co79] avant d'être généralisée par Monthubert et Pierrot [MP97] (voir aussi l'article de Nistor, Weinstein et Xu [NWX99]).

Définition 3.1.1 — Soit $(M,\mathcal{F})$ une variété feuilletée, et G son groupoïde d'holonomie. On appelle *G-opérateur de classe C^k* (ou opérateur longitudinal ou opérateur tangentiel) sur $(M,\mathcal{F})$ tout opérateur P de $\mathcal{C}_c^{\infty,k}(G)$ dans lui-même, tel qu'il existe une famille d'applications linéaires $(P_x)_{x\in M}$, de $\mathcal{C}_c^{\infty}(G_x)$ dans lui-même, vérifiant : $\forall f \in \mathcal{C}_c^{\infty,k}(G), \forall \gamma, \gamma_1 \in G$,

$$(Pf)(\gamma) = (P_{s(\gamma)} f_{|G_{s(\gamma)}})(\gamma)\,; \tag{3.1}$$

$$P_{s(\gamma_1)}[f(.\gamma_1)](\gamma) = (P_{r(\gamma_1)}f)(\gamma\gamma_1) \text{ (Invariance par holonomie).} \tag{3.2}$$

Notons q_γ la distribution sur $\mathcal{C}_c^{\infty,k}(G)$ qui, à $f \in \mathcal{C}_c^{\infty,k}(G)$, associe $(Pf)(\gamma)$, et notons K_x le noyau correspondant sur G_x, avec $x = s(\gamma)$:

$$q_\gamma(f) = Pf(\gamma) = (P_x f_{|G_x})(\gamma) = \int_{\gamma' \in G_x} K_x(\gamma,\gamma') f(\gamma') d\lambda_x(\gamma').$$

L'holonomie agit à droite sur la famille q_γ de la façon suivante : si γ_1 est un élément de G_y^x, alors pour f dans $\mathcal{C}_c^{\infty,k}(G_x)$, on a : $R\gamma_1(q_\gamma)(f) = q_{\gamma\gamma_1}(g)$ où g est définie par $g(\gamma') = f(\gamma'\gamma_1^{-1})$. La propriété d'invariance par holonomie de la famille $(P_x)_{x\in M}$ est équivalente à l'existence d'une distribution k_P sur G telle que le noyau distribution associé à P_x (dans G_x muni de la densité $d\lambda_x$) est de la forme $K_x(\gamma,\gamma') = k_P(\gamma\gamma'^{-1})$. En effet, on doit avoir : $(P_x f)(\gamma) = P_y(g)(\gamma\gamma_1)$.

Or on a :

$$P_y(g)(\gamma\gamma_1) = \int_{\gamma'\in G_y} K_y(\gamma\gamma_1,\gamma')f(\gamma'\gamma_1^{-1})d\lambda_y(\gamma') = \int_{\gamma'\in G_x} K_y(\gamma\gamma_1,\gamma'\gamma_1)f(\gamma')d\lambda_x(\gamma').$$

Cette dernière égalité est induite par les propriétés d'invariance de la famille des densités λ_x (voir la section 1.3). Sachant que $(P_x f)(\gamma) = \int_{\gamma'\in G_x} K_x(\gamma,\gamma')f(\gamma')d\lambda_x(\gamma')$, on peut en déduire que les deux noyaux sont égaux, à savoir : $K_x(\gamma,\gamma') = K_y(\gamma\gamma_1,\gamma'\gamma_1)$. Le noyau distributionnel k_P défini sur G par $K_x(\gamma,\gamma') = k_P(\gamma\gamma'^{-1})$ permet donc bien de caractériser la famille P. On a finalement : $\forall x\in M,\ \forall f\in \mathcal{C}_c^\infty(G_x),\ \forall\gamma\in G_x$,

$$(P_x f)(\gamma) = \int_{\gamma'\in G_x} k_P(\gamma\gamma'^{-1})f(\gamma')d\lambda_x(\gamma') = \int_{\gamma'\in G^{r(\gamma)}} k_P(\gamma')f(\gamma'^{-1}\gamma)d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma').$$

Remarque — Le choix de l'action à droite de l'holonomie a été fait à l'envers de la convention adoptée par A. Connes dans [Co79] et reprise notamment par Moore et Schochet dans [MS88]. Ce choix, rigoureusement équivalent à celui de Connes, privilégie l'écriture de l'action d'un opérateur pseudo-différentiel sur le produit de convolution de deux fonctions. En effet, P apparaît ainsi comme un opérateur de convolution à gauche par un noyau distributionnel : on a

$$(Pf)(\gamma) = q_\gamma(f) = (k\star f)(\gamma)$$

et ainsi, si la formule a un sens,

$$q_\gamma(f\star g) = (k_P\star f\star f')(\gamma),$$

alors que la convention inverse implique

$$(Pf)(\gamma) = (f\star \tilde{k_P})(\gamma)$$

(où $\tilde{k_P}(\gamma) = k_P(\gamma^{-1})$).

Définitions 3.1.2 —

1. On dit que P est un *opérateur à support compact* si le support de P est contenu dans un compact K de G pour la topologie de la variété, c'est-à-dire si pour tout $f\in\mathcal{C}_c^{\infty,k}(G)$, on a $\mathrm{Supp}(Pf)\subset K\circ\mathrm{Supp}(f)$. Notons que dans ce cas le noyau k_P est nul en dehors de K.
2. Un G-opérateur est dit *régularisant à support compact* si $k_P\in\mathcal{C}_c^{\infty,k}(G)$. On note $\Psi_c^{-\infty,k}(G)$ l'espace de ces opérateurs.
3. Un G-opérateur P est dit *pseudolocal* si pour tout voisinage W de $G^{(0)} = M$ dans G, il existe un G-opérateur régularisant R tel que $\mathrm{Supp}(P+R)\subset W$.
4. On dit que P est un *G-opérateur pseudo-différentiel à support compact d'ordre m et de classe k* si P est un G-opérateur à support compact et si la famille $(P_x)_{x\in G^{(0)}}$ associée est une famille de classe $\mathcal{C}^k$ d'opérateurs pseudo-différentiels indexée par la submersion $G\xrightarrow{s} G^{(0)} = M$. On note $\Psi_{c,k}^m(G)$ cet espace d'opérateurs.

Remarquons que la forme du noyau du G-opérateur et la définition d'une famille indexée par une submersion d'opérateurs pseudo-différentiels impliquent la pseudo-localité des G-opérateurs pseudo-différentiels.

3.2 L'algèbre $\Psi_c(G)$ des opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux à support compact sur un feuilletage

3.2.1 Familles d'opérateurs à support compact dans un ouvert trivialisant

Considérons maintenant un ouvert trivialisant pour le feuilletage $\Omega \subset M$, avec $\Omega \overset{\theta}{\simeq} L\times T \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et L connexe. Définissons les opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux sur l'ouvert Ω.

Définition 3.2.1 — L'espace $\mathcal{P}^m_{\mathcal{F},k}(\Omega)$ des opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux de classe k d'ordre m sur l'ouvert trivialisant Ω est l'ensemble des familles-produit de classe $\mathcal{C}^k$ d'opérateurs pseudo-différentiels à support compact iindexées par T, c'est à dire l'ensemble des familles à support compact (dans $L \times L \times T$) $(P_t)_{t\in T}$ d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m sur $\mathcal{C}^\infty_c(L \times \{t\})$.

Cette définition implique en particulier que l'ensemble $S_T = \{t \in T, P_t \not\equiv 0\}$ est compact.

Vérifions qu'un opérateur P dans $\mathcal{P}^m_{\mathcal{F},k}(\Omega)$ peut être considéré comme un opérateur pseudo-différentiel à support compact dans $\Psi^m_{c,k}(G)$.

Proposition 3.2.2 — Une famille d'opérateurs dans $\mathcal{P}^m_{\mathcal{F},k}(\Omega)$ est un G-opérateur à support compact.

Démonstration—

1. On appellera *noyau distributionnel* la famille, indexée par $t \in T$, formée des distributions qui sont les noyaux des opérateurs pseudo-différentiels P_t. Le noyau distributionnel k associé à P est à support compact dans $L \times L \times T$, et peut être prolongé par une distribution $\tilde{k}$ sur G nulle en dehors de l'ouvert trivialisant $G(\Omega) = W(\Omega, \Omega, Id) \simeq L \times L \times T$. On obtient ainsi un G-opérateur pseudo-différentiel $\tilde{P} \in \Psi^m_{c,k}(G)$. En effet, la formule
$$(\tilde{P}_x f)(\gamma) = \int_{\gamma'\in G_x} \tilde{k}(\gamma\gamma'^{-1}) f(\gamma') d\lambda_x(\gamma') = \int_{\gamma'\in G^{r(\gamma)}} \tilde{k}(\gamma') f(\gamma'^{-1}\gamma) d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma')$$
permet de définir une famille d'opérateurs invariante par holonomie.
2. Etudions le lien entre $(P_t)_{t\in T}$ et $(\tilde{P}_x)_{x\in M}$. Il est clair, d'après la définition de $\tilde{k}$, que $\tilde{P}$ est nul en dehors de $r^{-1}(\Omega)$. On peut donc se limiter à décrire $\tilde{P}_x$ sur l'intersection $G_x \cap r^{-1}(\Omega)$. Etudions sur cet ensemble la relation d'équivalence $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si $\gamma_1\gamma_2^{-1} \in G(\Omega)$. La partition de $G_x \cap r^{-1}(\Omega)$ en classes d'équivalence $C \in \mathcal{C}_x(\Omega)$ est la partition de l'ensemble en composantes connexes. En effet, chacune de ces classes est ouverte, car $\gamma \mapsto \gamma\gamma_1^{-1}$ est continue et $G(\Omega)$ ouvert, et connexe, car si $\theta \circ r(\gamma_1) = (l,t) \in L \times T$ alors les éléments de la classe d'équivalence C_{γ_1} de γ_1 sont tels que $s(\gamma_2) = x$ et $\theta \circ r(\gamma_2) = (l', t)$ (t est fixé par γ_1 et $h(\gamma_1\gamma_2^{-1}) = Id$). La restriction de r à la classe C_{γ_1} est donc un difféomorphisme entre C_{γ_1} et la plaque $\pi_t = r(C) \simeq L \times \{t\}$ de Ω et C_{γ_1} est connexe car L l'est. On peut donc indexer les éléments de $\mathcal{C}$ par la variable $t \in T_x = \left\{t \in T, \exists\, l \in L, \theta^{-1}(l,t)\mathcal{R}x\right\}$, avec la convention que $\theta \circ r(C_t) = L \times \{t\}$. On sait que $\tilde{k}$, la distribution définissant $\tilde{P}$, est nulle hors de $G(\Omega)$, cela implique donc que $\tilde{k}(\gamma\gamma'^{-1})$ est nul si $\gamma \not\sim \gamma'$. Désignons par r_x la restriction de r à $G_x \cap r^{-1}(\Omega)$, et $r_{x,t}$ celle de r_x à C_t.

Soient alors f un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(G_x)$ et γ un élément de $G_x \cap r^{-1}(\Omega)$. Notons $C_t = (\theta \circ r_{x,t})^{-1}(L \times \{t\})$ la classe de γ. On a :

$$\begin{aligned}
(\tilde{P}_x f)(\gamma) &= \int_{\gamma' \in G_x} \tilde{k}(\gamma\gamma'^{-1}) f(\gamma') d\lambda_x(\gamma') \\
&= \int_{\gamma' \in C_t} \tilde{k}(\gamma\gamma'^{-1}) f(\gamma') d\lambda_x(\gamma') \\
&= \int_{u \in L} k(u_0, u, t) f \circ (\theta \circ r_{x,t})^{-1}(u,t) du \\
&= [P_t(f \circ r_{x,t}^{-1} \circ \theta^{-1})] \circ \theta \circ r_{x,t}(\gamma).
\end{aligned}$$

Algébriquement, on a : $\mathcal{C}_c^\infty(G_x \cap r^{-1}(\Omega)) = \bigoplus_{t \in T_x} \mathcal{C}_c^\infty(C_t)$. Ceci nous permet de réaliser $\tilde{P}_x$ comme l'opérateur diagonal sur cet espace, égal sur $\mathcal{C}_c^\infty(C_t)$ à $\tilde{P}_t$, le relevé de P_t par $\theta \circ r_{x,t}$:

$$\tilde{P}_x = \operatorname{Diag}(\tilde{P}_t).$$

3. Il nous reste à vérifier que le G-opérateur à support compact $\tilde{P}$ ainsi défini est pseudo-différentiel et de classe C^k, autrement dit que la famille $(\tilde{P}_x)_{x \in G^{(0)}}$ est une famille de classe C^k d'opérateurs pseudo-différentiels indexée par la submersion

$$G \xrightarrow{s} G^{(0)}.$$

Cela revient à montrer que pour toute carte locale trivialisant la submersion $O \overset{\Phi}{\simeq} L_1 \times L_2 \times T'$ et toute fonction ϕ à support compact dans $L_1 \times L_2 \times T'$, l'application

$$(l_2, t') \to M_\phi \tilde{P}_{(l_1,t')} M_\phi$$

est une application de classe C^k de $L_2 \times T'$ dans $\mathcal{P}^m(L_1)$. Dans le cas où $\operatorname{Supp}(\phi \circ \Phi) \cap G(\Omega)$ est nul, ces opérateurs sont tous nuls. Sinon, d'après la relation entre $\tilde{P}_x$ et $(P_t)_{t \in T}$ décrite précédemment, l'opérateur $M_\phi \tilde{P}_{(l_1,t')} M_\phi$ ne dépend pas de l_2 et correspond, par un changement de carte éventuel, à un opérateur de la forme $M\psi P_t M\psi$, ce qui permet de conclure. On a ainsi défini, pour tout ouvert Ω, une injection $i_\Omega : \mathcal{P}^m_{\mathcal{F},k}(\Omega) \to \Psi^m_{c,k}(G)$.

■

3.2.2 G-opérateurs pseudo-différentiels à support compact

Montrons réciproquement qu'un G-opérateur pseudo-différentiel à support compact est une combinaison linéaire d'opérateurs régularisants et de familles-produit d'opérateurs pseudo-différentiels à support compact.

Donnons-nous un recouvrement régulier $(\Omega_i)_{i \in I}$ de M et montrons que l'on peut définir la classe $\Psi^m_{c,k}(G)$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de $\mathcal{P}^m_{\mathcal{F},k}(\Omega_i)$ et de G-opérateurs régularisants à support compact, c'est-à-dire que :

$$\Psi^m_{c,k}(G) \subset \mathcal{C}_c^{\infty,k}(G) + \sum_{\Omega_i} i_{\Omega_i}(\mathcal{P}^m_{\mathcal{F},k}(\Omega_i)).$$

Proposition 3.2.3 — Soit $\tilde{P} \in \Psi^m_{c,k}(G)$. Il existe des opérateurs $P_i \in \mathcal{P}^m_{\mathcal{F},k}(\Omega_i)$ et un opérateur R régularisant à support compact tels que :

$$\tilde{P} = \sum_i i_{\Omega_i}(P_i) + R.$$

Démonstration—

1. Munissons M d'une métrique. Définissons à présent la longueur $l(\gamma)$ d'un élément γ de G. Nous avons défini G comme un quotient du groupoïde fondamental de M ; un élément γ de G est donc une classe d'équivalence de chemins tracés dans les feuilles de M. On définit alors une notion de longueur naturelle en prenant :
$$l(\gamma) = \inf\{l(c),\, c \in \gamma\}$$
où $l(c)$ désigne la longueur d'un chemin. Donnons-nous un atlas sur M, appelons ε son nombre de Lebesgue, et désignons par $\tilde{P}$ un G-opérateur pseudo-différentiel. La définition des G-opérateurs pseudo-différentiels implique la pseudo-localité. Il existe ainsi un G-opérateur régularisant à support compact R tel que le support de $\tilde{P}-R$ est contenu dans le voisinage W_ε de M dans G défini par :
$$W_\varepsilon = \{\gamma \in G,\ l(\gamma) < \varepsilon/4\}\,.$$
Cela signifie en particulier que le noyau k de $\tilde{P} - R$ est nul en γ dès que $d(s(\gamma), r(\gamma)) > \varepsilon/4$. Considérons maintenant un recouvrement de M par des boules ouvertes B_i de rayon $\varepsilon/4$; chacune de ces boules est, par définition du nombre de Lebesgue, contenue dans un ouvert trivialisant de notre atlas de départ. Appelons (φ_i) une partition $\mathcal{C}^{\infty,k}$ de l'unité sur G définie sur les ouverts $r^{-1}(B_i)$.
2. Etudions les opérateurs $\tilde{P^i} = M_{\varphi_i}(\tilde{P}-R)$. Nous savons qu'il existe un ouvert trivialisant $\Omega \simeq L \times T$ de l'atlas tel que $B_i' \subset \Omega$, où B_i' désigne la boule de rayon $\varepsilon/2$ de même centre que B_i.
D'après la formule permettant d'exprimer $\tilde{P}$, on peut calculer $\tilde{P^i}$. En effet, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^{\infty,k}(G)$ et tout élément γ de G, on a :
$$(\tilde{P^i} f)(\gamma) = \int_{\gamma' \in G_{s(\gamma)}} \varphi_i(\gamma) k(\gamma\gamma'^{-1}) f(\gamma') d\lambda_{s(\gamma)}(\gamma').$$
On sait que $k(\gamma\gamma'^{-1}) = 0$ si $l(\gamma\gamma'^{-1}) > \varepsilon/4$. Donc si $\varphi_i(\gamma)k(\gamma\gamma'^{-1}) \neq 0$, cela implique :
$$\begin{array}{rcl} s(\gamma') & = & s(\gamma)\ ; \\ r(\gamma) & \in & B_i\ ; \\ l(\gamma\gamma'^{-1}) & < & \varepsilon/4\ ; \\ d(r(\gamma), r(\gamma')) & < & \varepsilon/4. \end{array}$$
De plus, si nous reprenons, en fixant $x \in G^{(0)}$, la partition de $G_x \cap r^{-1}(\Omega)$ en composantes connexes effectuée dans le paragraphe précédent par la relation d'équivalence $\gamma \sim \gamma'$ si et seulement si $\gamma\gamma'^{-1} \in G(\Omega)$, nous pouvons définir une famille d'opérateurs $P^i = (P_t^i)_{t\in T}$ telle que $\tilde{P^i} = i_\Omega(P^i)$. En effet, nous avons défini C_t comme étant la classe d'équivalence difféomorphe par $r_{x,t}$ à la plaque $L \times \{t\}$. Définissons la famille $(P_t^i)_{t\in T}$ par :
$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(L \times \{t\}), (P_t^i f)(l,t) = [\tilde{P^i}_x (f \circ r_{x,t})](r_{x,t}^{-1}(l,t)).$$
La propriété d'invariance par holonomie du G-opérateur $\tilde{P}$ permet de montrer que P_t^i est bien défini et ne dépend pas du x choisi, si $r_{x,t}$ existe.
Nous obtenons bien ainsi une famille-produit de classe $\mathcal{C}^k$ d'opérateurs pseudo-différentiels à support compact indexée par T, soit un opérateur pseudo-différentiel longitudinal sur un ouvert trivialisant Ω du feuilletage.

3. Finalement, $\tilde{P} = \sum_{i\in I} \tilde{P^i} + R$ est bien une combinaison linéaire d'opérateurs appartenant à $i_{\Omega_i}(\mathcal{P}^m_{\mathcal{F},k}(\Omega_i))$, où les Ω_i sont des ouverts trivialisants, et d'opérateurs régularisants à support compact.

■

EXEMPLE — Les opérateurs différentiels longitudinaux sont les opérateurs différentiels sur M qui s'écri-vent dans tout ouvert trivialisant $\Omega \simeq L \times T$ sous la forme

$$D = \sum a_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial l^\alpha}.$$

Remarquons que, grâce à l'équivalence de la définition locale et de la définition globale des opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux, ces opérateurs différentiels longitudinaux sont naturellement des G-opérateurs pseudo-différentiels à supports compact.

3.2.3 Structure d'algèbre involutive de $\Psi_{c,k}(G)$

Commençons par expliquer la structure d'algèbre involutive de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_{\mathcal{F},k}(\Omega)$, engendré par les combinaisons linéaires finies d'éléments de $\mathcal{P}^{m_i}_{\mathcal{F},k}(\Omega)$ ($\Omega \simeq L \times T$ est un ouvert trivialisant). Rappelons que, comme dans le cas classique, la somme de deux opérateurs $P \in \mathcal{P}^m_{\mathcal{F},k}(\Omega)$ et $P' \in \mathcal{P}^{m'}_{\mathcal{F},k}(\Omega)$ n'est pas une famille-produit d'opérateurs pseudo-différentiels, mais que cette somme est tout de même définie comme un opérateur $Op(a(x,\xi,t))$ avec, pour tout t,

$$a(x,\xi,t) = (p(x,\xi,t) + p'(x,\xi,t)) \in C^k(T, S^{\max(\Re e\, m, \Re e\, m')}(L)).$$

On a alors :

PROPOSITION 3.2.4 —

1. Pour tous $m, n \in \mathbb{C} \cup \{-\infty\}$, on a : $\mathcal{P}^m_{\mathcal{F},k}(\Omega) \circ \mathcal{P}^n_{\mathcal{F},k}(\Omega) \subset \mathcal{P}^{m+n}_{\mathcal{F},k}(\Omega)$.
2. L'espace $\mathcal{P}_{\mathcal{F},k}(\Omega)$ muni de la composition est une algèbre involutive filtrée par $\mathbb{R}$ et graduée par $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. La propriété précédente fait de $\mathcal{P}^{-\infty}_{\mathcal{F},k}(\Omega)$ un idéal bilatère de cette algèbre involutive.
3. L'ensemble $\mathcal{P}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},k}(\Omega)$ des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre entier est une sous-algèbre involutive de $\mathcal{P}_{\mathcal{F},k}(\Omega)$.

DÉMONSTRATION— Ces propriétés se déduisent immédiatement de la proposition (2.1.8) et de la définition des familles-produit d'opérateurs. ■

Décrivons maintenant la structure d'algèbre de l'espace vectoriel $\Psi_{c,k}(G)$, engendré par les combinaisons linéaires finies d'opérateurs pseudo-différentiels de classe C^k à support compact et d'opérateurs régularisants de classe C^k à support compact. Un calcul rapide montre que deux G-opérateurs pseudo-différentiels de classe C^k à support compact P et Q sont toujours composables, que $\mathrm{Supp}(P\circ Q) \subset \mathrm{Supp}(P)\circ\mathrm{Supp}(Q)$, et que le noyau $k_{P\circ Q}$ de $P\circ Q$ est donné par :

$$k_{P\circ Q}(\gamma\gamma'^{-1}) = \int_{G_x} k_P(\gamma\delta^{-1})k_Q(\delta\gamma'^{-1})d\lambda_x(\delta) \text{ si } s(\gamma) = x.$$

D'autre part, l'application $P \mapsto P^\natural$, qui transforme le noyau k de P en k^*, avec $k^*(\gamma) = \overline{k(\gamma^{-1})}$ permet de définir une involution sur l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels de classe C^k à support compact d'ordre m.

Proposition 3.2.5 —

1. Pour tous m, n, on a : $\Psi^m_{c,k}(G) \circ \Psi^n_{c,k}(G) \subset \Psi^{m+n}_{c,k}(G)$.
2. L'espace vectoriel $\Psi_{c,k}(G)$ muni de la composition est une algèbre involutive filtrée par $\mathbb{R}$ et graduée par $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. La propriété précédente fait de $\Psi^{-\infty}_{c,k}(G)$ un idéal bilatère de cette algèbre involutive.
3. L'ensemble $\Psi^{\mathbb{Z}}_{c,k}(G)$ des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre entier est une sous-algèbre involutive de $\Psi_{c,k}(G)$.

Démonstration— Il suffit de montrer que la composée d'un G-opérateur régularisant R de classe C^k à support compact et d'un G-opérateur pseudo-différentiel P de classe C^k à support compact est un G-opérateur régularisant. Nous savons qu'un G-opérateur pseudo-différentiel de classe C^k envoie $\mathcal{C}^{\infty,k}_c(G)$ dans lui-même. La formule permettant de calculer le noyau de la composée de deux opérateurs à support compact montre donc bien que la composée d'un G-opérateur régularisant R de classe C^k à support compact et d'un G-opérateur pseudo-différentiel P de classe C^k à support compact est un G-opérateur régularisant.

On peut alors se ramener au cas d'opérateurs de $\mathcal{P}_{\mathcal{F},k}(\Omega)$, dont nous avons vu les propriétés au paragraphe précédent. En effet, on sait exprimer tout G-opérateur pseudo-différentiel de classe C^k à support compact, à un G-opérateur régularisant de classe C^k à support compact près, comme une combinaison linéaire d'opérateurs de $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\Omega_i)$, où les Ω_i désignent des ouverts trivialisants pour le feuilletage. Composer deux G-opérateurs revient donc à composer des opérateurs dans les $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\Omega_i)$. Il suffit de choisir un recouvrement par des ouverts trivialisants, plus fin que les recouvrements formés par les Ω_i et Ω'_j, et tel que si deux ouverts de ce recouvrement sont à distance nulle, ils sont contenus dans un ouvert du recouvrement. Alors $P_i \circ Q_j$ est une composition dans $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\Omega)$ ou est identiquement nul. La proposition précédente découle donc des résultats sur $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\Omega)$. ■

3.2.4 Opérateurs longitudinaux agissant sur des fibrés

Nous pouvons, comme dans le cas classique, définir des G-opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux agissant sur les sections de fibrés vectoriels.

Commençons par étudier le cas de fibrés triviaux au-dessus de M. Nous pouvons dans ce cas étendre facilement la notion de G-opérateur de $\mathbb{C}^j$ dans $\mathbb{C}^l$.

Définition 3.2.6 — Un G-opérateur de $\mathbb{C}^j$ dans $\mathbb{C}^l$ est la donnée d'une matrice $l \times j$ de G-opérateurs.

En particulier, il est clair qu'un G-opérateur pseudo-différentiel à support compact d'ordre m envoyant l'ensemble des sections $C^{\infty,k}$ du fibré trivial $\mathbb{C}^j$ dans l'ensemble des sections $C^{\infty,k}$ du fibré trivial $\mathbb{C}^l$ peut être simplement défini par la donnée d'une matrice $l \times j$ de G-opérateurs pseudo-différentiels à support compact d'ordre m, $P \in M_{l,j}(\Psi^m_{c,k}(G))$.

Expliquons maintenant comment la donnée d'un fibré $\mathcal{E}$ au-dessus de la variété M permet de construire un fibré au-dessus de G_x pour tout x. Ce fibré est donné par $r^*(\mathcal{E})$, où r est l'application but. La fibre au-dessus d'un tel élément $\gamma \in G_x$ est simplement donnée par $r^*(\mathcal{E})_\gamma = \mathcal{E}_{r(\gamma)}$. Nous cherchons donc à présent à définir la notion de G-opérateur agissant sur les sections de fibrés au-dessus de G_x du type $r^*(\mathcal{E})$ avec $\mathcal{E}$ un fibré au-dessus de la variété M. Grâce à un lemme classique (cf Atiyah dans [Ati67]), M étant compacte, il existe pour tout fibré vectoriel complexe de dimension finie $\mathcal{E}$ au-dessus de M un fibré supplémentaire orthogonal $\mathcal{E}^\sharp$ de $\mathcal{E}$ dans un fibré trivial :

$$\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}^\sharp = \mathbb{C}^j .$$

Il existe alors une section

$$e_0 \in C^\infty(M, M_j(\mathbb{C})) \simeq M_j(C^\infty(M))$$

qui est un projecteur orthogonal, d'image $\mathcal{E}$ et de noyau $\mathcal{E}^\sharp$. On sait qu'une application $f \in C^\infty(M)$ agit naturellement par multiplication sur $C_c^{\infty,k}(G)$, et peut donc être considérée, par composition avec l'application but r, comme un élément de $\mathcal{M}(C^*(M,\mathcal{F}))$, l'algèbre des multiplicateurs sur la C*-algèbre $C^*(M,\mathcal{F})$. On note alors $e = e_0 \circ r$ le projecteur correspondant de $M_j(\mathcal{M}(C^*(M,\mathcal{F})))$.

Donnons-nous deux fibrés vectoriels hermitiens lisses, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, au-dessus de la variété M. Définissons à présent les G-opérateurs de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$. Nous pouvons, comme ci-dessus, écrire $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ comme deux sous-fibrés admettant un supplémentaire orthogonal dans un même fibré trivial $\mathbb{C}^j$. Notons e et e' les projections de $M_j(\mathcal{M}(C^*(M,\mathcal{F})))$ correspondant à ces fibrés.

Définition 3.2.7 — Un G-opérateur P de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ est défini par

$$P = e'\check{P}e$$

où $\check{P}$ est un G-opérateur agissant sur les sections du fibré trivial $\mathbb{C}^j$.

En particulier, on appelle *G-opérateur pseudo-différentiel à support compact d'ordre m et de classe C^k de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$* un opérateur de la forme $P = e'\check{P}e$, avec $\check{P}$ une matrice dans $M_j(\Psi^m_{c,k}(G))$. On notera $\Psi^m_{c,k}(G,\mathcal{E},\mathcal{E}')$ l'ensemble de ces opérateurs.

Remarques

1. L'équivalence vue entre la définition locale et la définition globale des opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux à support compact permet de déduire une équivalence analogue pour les opérateurs agissant sur les sections de fibrés.
2. Les opérateurs agissant sur les sections de fibrés peuvent être construits de la même manière avec des projecteurs sur la C*-algèbre réduite : $e_r, e'_r \in M_j(\mathcal{M}(C_r^*(M,\mathcal{F})))$. On peut en effet projeter toutes les constructions précédentes en utilisant la projection de $C^*(M,\mathcal{F})$ sur $C_r^*(M,\mathcal{F})$.

Rappelons pour finir la définition de l'adjoint formel d'un G-opérateur agissant sur les sections de fibrés. Si P est un G-opérateur de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, il s'écrit sous la forme $e'\check{P}e$. Le noyau $K(\gamma,\gamma')$ de P est donc de la forme $e'(\gamma)\check{K}(\gamma,\gamma')e(\gamma')$. Alors, le noyau $K^\natural(\gamma,\gamma')$ donné par

$$\bar{e}(\gamma\prime - 1)\ {}^t\overline{\check{K}}((\gamma',\gamma)\bar{e'}(\gamma^{-1})$$

définit un opérateur $P^\natural = \bar{e}\check{P}^\natural\bar{e'}$ tel que pour tout $x \in M$ et toutes sections $v \in C_c^\infty(G_x, r^*(\mathcal{E}))$ et $u \in C_c^\infty(G_x, r^*(\mathcal{E}'))$ on ait

$$\langle P^\natural u,\, v\rangle_{r^*(\mathcal{E})} = \langle u,\, Pv\rangle_{r^*(\mathcal{E}')}. \tag{3.3}$$

On appelle *adjoint formel* de P cet opérateur $P^\natural$.

3.3 Opérateurs longitudinaux elliptiques

Intéressons-nous à présent à l'extension des notions classiques de symbole, d'ellipticité, de parametrix pour les opérateurs longitudinaux. Dans le cadre des opérateurs classiques sur une variété, nous avons vu que le symbole total d'un opérateur ne pouvait être défini comme une fonction que dans une carte locale, mais que son symbole principal pouvait être globalement défini. Nous allons voir que ces propriétés demeurent. Nous savons que, localement, un opérateur pseudo-différentiel longitudinal à support compact de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ peut être exprimé sous la forme d'un opérateur $P' \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}^m(\Omega, \mathcal{E}, \mathcal{E}')$ où $\Omega \simeq L \times T$ désigne un ouvert trivialisant. Un tel opérateur est en fait une famille-produit d'opérateurs classiques P_t ayant chacun un symbole total, dans cette carte, de la forme $\sigma(x,\xi,t)$.

Définition 3.3.1 — Le symbole total de l'opérateur P' dans la carte donnée par $\Omega \simeq L \times T$ est la famille $(\sigma(x,\xi,t))_{t\in T}$.

Nous allons définir le symbole principal d'un opérateur longitudinal à support compact comme étant le symbole principal de l'opérateur $r^*(P)$ associé à P de la manière suivante : $r^*(P)$ est l'opérateur de $C^\infty(\mathcal{F},\mathcal{E})$ dans $C^\infty(\mathcal{F},\mathcal{E}')$ donné par :

$$r^*(P)(f)(x) = P_{s(\gamma)}(f\circ r)(\gamma) \qquad \text{avec } \gamma \in G^x.$$

La propriété d'invariance par action de l'holonomie montre que cette formule ne dépend pas de γ pour $r(\gamma) = x$. Le fait que P soit un G-opérateur pseudo-différentiel implique, par définition, que dans toute carte locale pour $\mathcal{F}$, l'opérateur $r^*(P)$ est un opérateur pseudo-différentiel de même degré que P. Remarquons que cette application $r^* : \Psi_{c,k}^m(G,\mathcal{E},\mathcal{E}') \to \mathcal{P}_c^m(\mathcal{F},\mathcal{E},\mathcal{E}')$ vérifie de manière immédiate $r^*(P\circ Q) = r^*(P)\circ r^*(Q)$, et transforme un opérateur régularisant à support compact en un opérateur régularisant à support compact. En effet, si P est un G-opérateur de noyau k, l'opérateur $r^*(P)$ a pour noyau

$$r^*(k)(y,x) = \sum_{\gamma\in G_y^x} k(\gamma).$$

Or, dans le cas où P est régularisant, k est une section $\mathcal{C}^{\infty,k}$ à support compact sur G du fibré $\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}'$ défini au-dessus de G par $(\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}')_\gamma = \mathcal{E}^*_{s(\gamma)}\otimes\mathcal{E}'_{r(\gamma)}$, et $r^*(k)(y,x)$ est donc une section $\mathcal{C}^\infty$ du fibré $\mathcal{E}_y^*\otimes\mathcal{E}_x'$ au-dessus de $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$. De plus, cette application $P\mapsto r^*(P)$ est injective pour les opérateurs dont le support est inclus dans un voisinage ouvert W de $G^{(0)}$ tel que l'application $(r,s) : W \to M\times M$ soit injective.

Nous pouvons à présent définir le symbole principal $\sigma_m(P)$ d'un opérateur longitudinal P d'ordre m comme celui de l'opérateur $r^*(P)$ pseudo-différentiel classique à support compact sur la variété $\mathcal{F}$.

Définition 3.3.2 — Un opérateur pseudo-différentiel longitudinal est elliptique si son symbole principal est inversible, c'est-à-dire si l'opérateur $r^*(P)$ qui lui est associé est elliptique.

La propriété classique des opérateurs elliptiques est de posséder un quasi-inverse (une parametrix). Vérifions que cette propriété demeure dans le cas des opérateurs longitudinaux.

Proposition 3.3.3 — Soit $P \in \Psi^m_{c,k}(G, \mathcal{E}, \mathcal{E}')$ un opérateur elliptique. Il existe alors un opérateur $Q \in \Psi^{-m}_{c,k}(G, \mathcal{E}', \mathcal{E})$ qui est une parametrix pour P :

$$PQ - I_{\mathcal{E}} = R \qquad \text{et} \qquad QP - I_{\mathcal{E}'} = R'$$

avec R et R' des opérateurs régularisants à support compact sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ respectivement.

Démonstration— Pour montrer cette propriété, nous allons nous ramener au cas d'opérateurs longitudinaux agissant dans des ouverts trivialisants.

Commençons par étudier le cas d'un opérateur $P \in \mathcal{P}^m_{\mathcal{F},k}(\Omega, \mathcal{E}, \mathcal{E}')$ où $\Omega \simeq L \times T$ est un ouvert trivialisant. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty,k}_c(\Omega)$. On note M_φ l'opérateur de multiplication par $\varphi \circ r$. Supposons que P soit elliptique sur un voisinage $\mathcal{V}$ du support de φ, c'est-à-dire que son symbole principal $\sigma_m(r^*(P))$ soit inversible. Nous voulons montrer qu'il existe un opérateur $Q \in \mathcal{P}^{-m}_{\mathcal{F},k}(\Omega)$ tel que $PQ - M_\varphi$ est un opérateur longitudinal sur le fibré $\mathcal{E}$ régularisant à support compact sur l'ouvert trivialisant Ω. Le symbole total de l'opérateur P est donné par la famille $(\sigma(P)(l,\xi,t))_{t\in T}$. L'inversibilité du symbole principal se traduit donc ici par le fait que pour tout $t \in T \cap \mathcal{V}$, le symbole principal $\sigma_m(P)(l,\xi,t)$ est inversible sur $L \times \{t\} \cap \mathcal{V}$. Comme dans la théorie ordinaire, nous pouvons résoudre l'équation symbolique $\sigma(P) \circ \sigma(Q) = \varphi I_{\mathcal{E}}$:

$$\begin{aligned} \sigma_m(P)\sigma_{-m}(Q) &= \varphi \qquad \text{et , } \forall l > 0 \\ \sigma_m(P)\sigma_{-m-l}(Q) + \sum_{\substack{j<l \\ j+k+|\alpha|=l}} \frac{[\partial^\alpha_x \sigma_{m-k}(P)][\partial^\alpha_x \sigma_{-m-j}(Q)]}{\alpha!} &= 0. \end{aligned}$$

Il est clair que les symboles $\sigma(Q)_{-m-l}(l,\xi,t)$ sont positivement homogènes en ξ de degré $-m-l$ et dépendent de manière C^k du paramètre t. Comme dans le cas ordinaire, un opérateur Q ayant un symbole $\sigma(Q)$ admettant une expansion asymptotique de la forme

$$\sigma(Q) \sim \sum_l \sigma_{-m-l}(Q)(l,\xi,t)$$

vérifie donc bien :

$$PQ - M_\varphi \in \mathcal{P}^{-\infty}_{\mathcal{F},k}(\Omega).$$

Considérons à présent un opérateur elliptique $P \in \Psi^m_{c,k}(G, \mathcal{E}, \mathcal{E}')$. Donnons-nous un atlas formé d'ouverts trivialisants $(\Omega_i)_{i\in I}$ et une partition de l'unité $\mathcal{C}^{\infty,k}$ adaptée à ce recouvrement $(\varphi_i)_{i\in I}$. Donnons-nous également pour tout i une fonction $\varphi'_i \in \mathcal{C}^{\infty,k}_c(\Omega_i)$ valant 1 sur le support de φ_i, et un voisinage compact W de $G^{(0)}$ dans G vérifiant, pour tout i :

$$\left\{\gamma \in W, s(\gamma) \in \text{ Supp}(\varphi'_i)\right\} \subset G(\Omega_i) \simeq L_i \times L_i \times T_i.$$

L'opérateur P étant pseudo-local, on peut supposer que le support de P est contenu dans W ; la distribution k_i associée à $P_i = PM_i$ (avec $M_i = M_{\varphi_i'}$ l'opérateur de multiplication par $\varphi_i' \circ r$) est alors à support dans $G(\Omega_i)$; l'opérateur P_i peut donc être considéré comme un opérateur longitudinal sur l'ouvert trivialisant Ω_i. De plus, le symbole principal de P_i est inversible sur un voisinage du support de φ_i ; en effet,

$$\sigma_m(P_i) = \sigma_m\left(r^*(PM_i)\right) = \sigma_m\left(r^*(P)r^*(M_i)\right) = \sigma_m\left(r^*(P)\right)\varphi_i' = \sigma_m(P)\varphi_i'.$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas précédent et il existe des opérateurs $\hat{Q}_i = Q_i M_{\varphi_i}$ à support compact dans $G(\Omega_i)$ tels que les opérateurs $R_i = P_i\hat{Q}_i - M_{\varphi_i}$ sont régularisants à support compact dans $G(\Omega_i)$. L'opérateur $Q = \sum M_i Q_i M_{\varphi_i}$ est donc bien une parametrix à droite pour P, à support compact. On peut de la même manière montrer l'existence d'une parametrix à gauche pour P, puis montrer que la différence des deux est un opérateur régularisant à support compact. ■

3.4 Régularité des G-opérateurs pseudo-différentiels

La théorie des opérateurs non bornés sur les C*-modules hilbertiens (exposée succintement en annexe) permet de généraliser certains résultats de [Co79] dont nous avons besoin.

3.4.1 Fibrés vectoriels et modules hilbertiens

Etant donné un fibré vectoriel hermitien lisse $\mathcal{E}$ sur M, nous pouvons naturellement lui associer un C*-module $E = C^*(M, \mathcal{F}, \mathcal{E})$ sur $C^*(M, \mathcal{F})$. Considérons en effet le module sur $C_c(G)$ formé par les sections $C_c(G, r^*(\mathcal{E}))$, sur lesquelles $C_c(G)$ agit par convolution. Nous pouvons définir sur $C_c(G, r^*(\mathcal{E}))$ un produit scalaire à valeur dans $C_c(G)$ en faisant le produit scalaire en chaque point de deux sections

$$\langle \eta,\, \eta' \rangle(\gamma) = \langle \eta(\gamma),\, \eta'(\gamma) \rangle_{r^*(\mathcal{E})}.$$

Ceci nous permet de définir une norme sur $C_c(G, r^*(\mathcal{E}))$ en posant

$$\|\eta\|^2 = \|\langle \eta,\, \eta \rangle\|_{C^*(M,\mathcal{F})}\,.$$

On définit alors un C*-module $E = C^*(M, \mathcal{F}, \mathcal{E})$ sur $C^*(M, \mathcal{F})$ en complétant $C_c(G, r^*(\mathcal{E}))$ pour cette norme.
Nous avons vu précédemment que nous pouvons associer un projecteur $e \in M_j(\mathcal{M}(C^*(M, \mathcal{F})))$ à tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$ lisse hermitien et de dimension finie. Dans ce cadre, le $C^*(M, \mathcal{F})$-module E peut simplement être décrit comme le sous-$C^*(M, \mathcal{F})$-module hilbertien

$$E = e(C^*(M, \mathcal{F}))^j$$

du module hilbertien $(C^*(M, \mathcal{F}))^j$, dont le produit scalaire dans $C^*(M, \mathcal{F})$ est donné par

$$\langle X,\, Y \rangle = \sum_{i=1}^{j} X_i^* Y_i.$$

Comme précédemment, toute ces notions peuvent être projetées sur la C*-algèbre réduite. Dans le cas de ce module induit par la surjection $C^*(M, \mathcal{F}) \to C_r^*(M, \mathcal{F})$ nous pouvons même décrire explicitement la forme des représentations. On désigne par $L^2(G_x, \lambda_x, r^*(\mathcal{E}))$

les sections L^2 du fibré pour la norme $\|\Xi\| = \int_{G_x} \|\Xi\|^2_{r^*(\mathcal{E})}\, d\lambda_x$. Un élément $\eta \in C_c(G, r^*(\mathcal{E}))$ définit alors naturellement un opérateur borné de $L^2(G_x, \lambda_x)$ dans $L^2(G_x, \lambda_x, r^*(\mathcal{E}))$, donné par

$$\pi_x(\eta)(f)(\gamma) = \int_{G_x} \eta(\gamma')f(\gamma'^{-1}\gamma)d\lambda_x(\gamma').$$

On considère alors la complétion $E_r = C^*_r(M, \mathcal{F}, \mathcal{E})$ du module $C_c(G, r^*(\mathcal{E}))$ pour la norme

$$\|\eta\| = \sup_x \|\pi_x(\eta)\|\,.$$

Il est facile de vérifier que ce module à droite sur $C_c(G)$ est aussi un module sur $C^*_r(M, \mathcal{F})$. De plus, c'est un $C^*_r(M, \mathcal{F})$-module hilbertien pour le produit scalaire associé au produit scalaire hermitien sur $\mathcal{E}$. Si $\eta, \eta' \in C^\infty_c(G, r^*(\mathcal{E}))$, on pose :

$$\langle \eta,\, \eta' \rangle(\gamma) = \langle \eta(\gamma),\, \eta'(\gamma) \rangle_{r^*(E)}.$$

Ce $C^*_r(M, \mathcal{F})$-module hilbertien coïncide, là encore, avec celui défini par le sous-$C^*_r(M, \mathcal{F})$-module hilbertien

$$E_r = e_r(C^*(M, \mathcal{F}))^j$$

du module hilbertien $(C^*_r(M, \mathcal{F}))^j$ dont le produit scalaire dans $C^*_r(M, \mathcal{F})$ est donné par

$$\langle X,\, Y \rangle = \sum_{i=1}^{j} X^*_i Y_i.$$

Fixons $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux fibrés vectoriels hermitiens et lisses de dimension finie, et notons e et e' les projecteurs correspondant dans la C*-algèbre $M_j(\mathcal{M}(C^*(M, \mathcal{F})))$.

Tout G-opérateur P de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ peut alors être considéré comme un opérateur non-borné de E dans E' de domaine $C^\infty_c(G)$. De plus, pour le produit scalaire défini sur $(C^*(M, \mathcal{F}))^j$, l'adjoint formel $P^\natural$ du G-opérateur P défini précédemment coïncide avec l'adjoint P^* de l'opérateur P sur les sections $C^{\infty,k}_c$ au sens suivant :

Lemme 3.4.4 — Pour toutes sections $v \in C^{\infty,k}_c(G, r^*(\mathcal{E}'))$ et $u \in C^{\infty,k}_c(G, r^*(\mathcal{E}))$, on a l'égalité suivante dans $C^*(M, \mathcal{F})$

$$\langle P^\natural u,\, v \rangle = \langle u,\, Pv \rangle.$$

Démonstration du lemme On sait que u et v peuvent s'écrire $u = e'U$ et $v = eV$, avec $U,\ V$ des éléments de $(C^{\infty,k}_c(G))^j$. Or on a

$$\langle P^\natural u,\, v \rangle = \sum_{i,k} (P^\natural_{i,k} U_i)^* V_k = \sum_{i,k} U^*_i P_{k,i} V_k = \langle u,\, Pv \rangle,$$

par définition de $P^\natural$. ⊟

Ce lemme implique en particulier le fait que P est fermable.

Remarque — Dans la suite de notre exposé, nous avons pris le parti d'énoncer les résultats pour les opérateurs agissant sur les sections de fibrés seulement lorsque ceux-ci ne sont pas une généralisation directe des résultats pour les opérateurs scalaires, afin de ne pas alourdir inutilement les notations. Indiquons rapidement comment traduire les énoncés. Si P est un opérateur agissant sur les sections d'un fibré $\mathcal{E}$, nous avons vu qu'il lui correspond un certain projecteur lisse $e \in M_j(\mathcal{M}(C^*(M,\mathcal{F})))$; il faut alors remplacer dans les énoncés concernant P le $C^*(M,\mathcal{F})$-module hilbertien $E = C^*(M,\mathcal{F})$ par le $C^*(M,\mathcal{F})$-module hilbertien projectif $E = C^*(M,\mathcal{F},\mathcal{E}) = e(C^*(M,\mathcal{F}))^j$.

3.4.2 Opérateurs d'ordre de partie réelle négative et multiplicateurs

Enonçons à présent une proposition fondamentale sur la régularité des G-opérateurs pseudo-différentiels d'ordre de partie réelle ≤ 0, démontrée par Connes [Co79] dans le cas de $C_r^*(M,\mathcal{F})$, et généralisée par Monthubert et Pierrot au cas des groupoïdes de Lie [MP97].

Proposition 3.4.5 — Soit $P \in \Psi^m_{c,k}(G)$, un opérateur pseudo-différentiel longitudinal à support compact et $m_0 = \Re e\, m$.

1. Si $m_0 < 0$, alors P s'étend en un opérateur $\overline{P} \in E = C^*(M,\mathcal{F})$.
2. Si $m_0 = 0$, alors P s'étend en un morphisme borné $\overline{P}$ appartenant à Mor(E).

Démonstration—

1. Nous allons montrer ceci par récurrence.
   - Si l'ordre de P est de partie réelle $m_0 < -p$, alors le noyau de P est une fonction continue à support compact sur le groupoïde. En effet, il suffit de voir cela localement (dans un ouvert trivialisant) puisque d'après ce que nous avons vu précédemment tout noyau à support compact s'écrit comme somme de noyaux à support compact dans des ouverts trivialisants et d'un noyau régularisant à support compact. Dans un ouvert trivialisant, on utilise la propriété usuelle de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable. Un tel opérateur s'étend donc naturellement en un opérateur $\overline{P} \in E = C^*(M,\mathcal{F})$.
   - Si l'ordre de P est de partie réelle $m_0 < -p/2$, alors par ce qui précède, le noyau de $P^\natural P$ est une fonction de $C_c(G)$. L'opérateur $P^\natural P$ s'étend donc en un opérateur $\overline{P^\natural P} \in C^*(M,\mathcal{F})$. Or P et $P^\natural$ sont des opérateurs densément définis sur E, et si $f \in C_c^{\infty,k}(G)$, l'opérateur $P^\natural P$ étant borné, on a pour la norme de E
   $$\|Pf\|^2 \leq C\,\|f\|^2 .$$
   Ceci montre que P se prolonge continûment en un opérateur $\overline{P}$ sur E. On peut de la même manière prolonger l'adjoint formel $P^\natural$ de P, qui coïncide alors avec l'adjoint de $\overline{P}$ dans E. L'opérateur $\overline{P}$ est ainsi un élément de Mor(E). On sait que $\overline{P^\natural P} = \overline{P}^*\overline{P}$ car ces éléments de Mor(E) coïncident sur $C_c(G)$. Le fait que $\overline{P^\natural P} \in E$ implique alors que la racine carrée de $\overline{P^\natural P}$ est aussi dans E, et donc $\overline{P} \in E$ (grâce à la décomposition polaire).
   - Dans la démonstration précédente, nous avons vu qu'il suffisait, pour montrer que $\overline{P} \in E$, de montrer que $\overline{P^\natural P} \in E$. Par récurrence, il suffit donc de montrer qu'il existe un entier l tel que $(\overline{P^*P})^{2^l} \in E$. Or si $m_0 < 0$, il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $m_0 2^l < -p$, donc d'après ce qui précède $(\overline{P^*P})^{2^l} \in E$.

2. Nous savons que la composée d'un opérateur longitudinal pseudo-différentiel à support compact avec un régularisant à support compact est toujours un régularisant à support compact. De plus, la convolution est associative, et il est alors clair que tout opérateur longitudinal pseudo-différentiel à support compact définit un multiplicateur de l'algèbre $C_c^{\infty,k}(G)$. Il reste à montrer que P s'étend par continuité en un multiplicateur de E.
   - Désignons par $\sigma(P) \in C_c^{\infty}(S^*F)$ le symbole principal de l'opérateur P. Quitte à diviser P par une constante, on peut supposer $\sigma(P) < 1$. Il existe alors un opérateur pseudo-différentiel $Q \in \Psi_c^m(G)$ tel que
   $$P^*P + Q^*Q = 1 + R$$
   avec R d'ordre de partie réelle strictement négative. Nous pouvons facilement construire un tel opérateur Q de la façon suivante. Donnons-nous la fonction $\sigma(Q) = \sqrt{1 - |\sigma(P)|^2}$, et choisissons un opérateur Q dont le symbole principal est $\sigma(Q)$. Alors cet opérateur vérifie bien $P^*P + Q^*Q = 1 + R$.
   - Donnons-nous un élément $f \in C_c^{\infty,k}(G)$. On a alors
   $$\langle P^*P(f),\, f\rangle = \|Pf\|^2 \leq (1 + \|R\|)\, \|f\|^2 .$$
   L'opérateur P est donc prolongeable par continuité sur E et la même propriété est vérifiée par P^*, Q et Q^*. Comme P, Q, P^*, Q^* sont densément définis, et majorés en norme, ils sont continus sur E et s'étendent donc en des morphismes.

■

Corollaire 3.4.6 — Soient P_1 et P_2 dans $\Psi_{c,k}^m(G)$, avec P_2 elliptique. Il existe alors une constante c telle que pour toute fonction $u \in C_c^{\infty,k}(G)$, on ait, pour la norme de $C^*(M,\mathcal{F})$,

$$\|P_1 u\| \leq c(\|P_2 u\| + \|u\|).$$

Démonstration du corollaire. Soit $Q_2 \in \Psi_c^m(G)$ une parametrix pour P_2. Alors $P_1Q_2 \in \Psi_c^0(G)$, d'où l'on tire, d'après la proposition précédente, l'existence d'une constante c_1 telle que $\|P_1Q_2(P_2u)\| \leq c_1 \|P_2u\|$. De plus, $P_1(Q_2P_2 - I)$ est régularisant à support compact et il existe donc une constante c_2 telle que $\|P_1Q_2P_2u - P_1u\| \leq c_2 \|u\|$. Donc on a

$$\|P_1u\| \leq \|P_1Q_2P_2u - P_1u\| + \|P_1Q_2(P_2u)\| \leq c(\|P_2u\| + \|u\|).$$

⊟

Les mêmes propriétés sont vraies, par projection, pour la C*-algèbre réduite du groupoïde.

Proposition 3.4.7 — Soit $P \in \Psi_{c,k}^m(G)$, un opérateur pseudo-différentiel longitudinal à support compact et $m_0 = \Re e\, m$.

1. Si $m_0 < 0$, alors $P \in E_r = C_r^*(M,\mathcal{F})$.
2. Si $m_0 = 0$, alors P s'étend en un morphisme borné $\overline{P}$ appartenant à $\mathrm{Mor}(E_r)$.

Corollaire 3.4.8 — Soient P_1 et P_2 dans $\Psi^m_{c,k}(G)$, avec P_2 elliptique. Il existe alors une constante c telle que pour toute fonction $u \in C_c^{\infty,k}(G)$, on ait, pour la norme de $C_r^*(M,\mathcal{F})$,

$$\|P_1 u\| \leq c(\|P_2 u\| + \|u\|).$$

3.4.3 Régularité des opérateurs elliptiques d'ordre de partie réelle positive

Donnons-nous à présent un G-opérateur pseudo-différentiel P, d'ordre m de partie réelle $m_0 > 0$. L'opérateur P peut être considéré comme un opérateur non borné densément défini sur l'espace de Banach E, de domaine $C_c^{\infty,k}(G)$. On peut l'étendre en un opérateur fermé $\overline{P}$ dont le graphe est donné par

$$G(\overline{P}) = \left\{(x,y) \in (C^*(M,\mathcal{F}))^2,\ \exists\,(u_n) \in C_c^{\infty,k}(G), \|u_n - x\| \to 0 \text{ et } \|Pu_n - y\| \to 0\right\}.$$

Le graphe $G(\overline{P})$ de $\overline{P}$ ainsi défini est bien un sous-$C^*(M,\mathcal{F})$-module de E. Cette extension est la plus petite extension de P dont le graphe est un sous-$C^*(M,\mathcal{F})$-module fermé de E, et nous verrons plus loin que cette extension est aussi l'extension fermée maximale de cet opérateur, dans le cas où cet opérateur est elliptique. Notons que l'on peut appliquer le même raisonnement à l'adjoint formel de P et définir ainsi un opérateur $\overline{P^\natural}$ de graphe

$$G(\overline{P^\natural}) = \left\{(x,y) \in (C^*(M,\mathcal{F}))^2,\ \exists\,(u_n) \in C_c^{\infty,k}(G), \|u_n - x\| \to 0 \text{ et } \left\|P^\natural u_n - y\right\| \to 0\right\}.$$

Nous avons vu précédemment que l'adjoint formel $P^\natural$ est un opérateur pseudo-différentiel de même ordre que P et tel que

$$\langle Pu,\, v\rangle = \langle u,\, P^\natural v\rangle$$

pour $u, v \in C_c^{\infty,k}(G)$. On a alors pour tous couples $(u,v) \in G(P)$ et $(x,y) \in G(P^\natural)$, l'égalité

$$\langle u,\, y\rangle = \langle v,\, x\rangle.$$

Par continuité, cette égalité reste vraie pour $(u,v) \in G(\overline{P})$ et $(x,y) \in G(\overline{P^\natural})$. L'opérateur $\overline{P^\natural}$ est donc inclus dans l'adjoint de l'opérateur non borné $\overline{P}$: $\overline{P^\natural} \subset P^*$.

L'opérateur $\overline{P}$ est donc densément défini, et son adjoint l'est également densément défini.

Proposition 3.4.9 — Soit P un opérateur pseudo-différentiel elliptique à support compact. L'opérateur $\overline{P}$ est un opérateur régulier (au sens de Baaj) de E dans E.

Démonstration— Il suffit de considérer le cas $\Re e\, m > 0$, car on a vu que sinon $\overline{P} \in \mathrm{Mor}(E)$. D'après les remarques précédentes, il suffit de montrer que le graphe de P est orthocomplémenté dans $E \oplus E$. Soit Q une parametrix d'ordre $-m$ pour P, et R, S les opérateurs régularisants tels que

$$QP = 1 - S \text{ et } PQ = 1 - R.$$

Ces opérateurs Q, R, S sont, d'après la proposition (3.4.5), des éléments de $\mathrm{Mor}(E)$. Avec les notations précédentes, on a :

Lemme 3.4.10 —

1. $\overline{P}\,\overline{Q} = \overline{PQ}$ et $\overline{P}\,\overline{S} = \overline{PS}$;
2. $\mathrm{Dom}\overline{P} = \mathrm{Im}\overline{Q} + \mathrm{Im}\overline{S}$;
3. $\overline{P^\natural} = P^*$.

Démonstration du lemme

1. Démontrons la première égalité, la seconde peut être montrée avec la même méthode. Commençons par montrer que $\overline{PQ} \subset \overline{P}\,\overline{Q}$.
Soit $(x, y) \in G(\overline{PQ})$. Par définition, il existe une suite $x_n \in C_c^{\infty,k}(G)$ telle que :
$$\|x_n - x\| \to 0 \text{ et } \|PQx_n - y\| \to 0.$$
Or l'opérateur Q s'étend en un morphisme continu $\overline{Q}$. Il existe donc un élément $z \in E$ tel que $\|Qx_n - z\| \to 0$. Par définition de $\overline{P}$, le couple (z, y) est dans le graphe de $\overline{P}$. On a donc bien
$$\overline{PQ} \subset \overline{P}\,\overline{Q}.$$
Or PQ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre nul, et donc il s'étend en un morphisme $\overline{PQ} \in \mathrm{Mor}(E)$. Ceci prouve donc que $G(\overline{P}\,\overline{Q}) = G(\overline{PQ})$ et donc
$$\overline{P}\,\overline{Q} = \overline{PQ}.$$
2. Montrons que que $\mathrm{Dom}\overline{P} = \mathrm{Im}\overline{Q} + \mathrm{Im}\overline{S}$.
Soit $x \in \mathrm{Dom}\overline{P}$, $\overline{P}x \in E$. Nous savons que x est limite en norme d'une suite u_n de fonctions $C_c^{\infty,k}(G)$, telle que la suite de fonctions $C_c^{\infty,k}(G)$ Pu_n converge en norme vers $\overline{P}x$. Or $QPu_n = u_n - Su_n$, avec Q et S continus, et on obtient $\overline{Q}(\overline{P}x) = x - \overline{S}x$ d'où l'on tire $x = \overline{Q}(\overline{P}x) + \overline{S}x \in \mathrm{Im}\overline{Q} + \mathrm{Im}\overline{S}$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}\overline{Q} + \mathrm{Im}\overline{S}$, on a, d'après la première partie de ce lemme, $\mathrm{Im}\overline{Q} \subset \mathrm{Dom}\overline{P}$ et $\mathrm{Im}\overline{S} \subset \mathrm{Dom}\overline{P}$.
3. Montrons que $\overline{P^\natural} = P^*$. On sait déjà que $\overline{P^\natural} \subset P^*$. Il nous reste donc à montrer que $\mathrm{Dom}P^* \subset \mathrm{Dom}\overline{P^\natural}$. Or nous savons que $PQ = I + R$, et donc $(PQ)^* = I + R*$. Par ailleurs on a toujours $Q^*P^* \subset (PQ)^*$ et, en utilisant la propriété précédente, on en déduit que
$$\mathrm{Dom}P^* \subset \mathrm{Im}Q^* + \mathrm{Im}R^*.$$
Or Q et R sont des opérateurs d'ordre de partie réelle strictement négative. D'après ce que nous avons vu précédemment, on a alors $\overline{Q^\natural} = Q^*$ et $\overline{R^\natural} = R^*$. Or, en appliquant la propriété 2 à $\overline{P^\natural}$, on sait que :
$$\mathrm{Dom}\overline{P^\natural} = \mathrm{Im}\overline{Q^\natural} + \mathrm{Im}\overline{R^\natural},$$
ce qui permet de conclure.

⊟

On a donc $G(\overline{P}) = \left\{(\overline{Q}x + \overline{S}y, \overline{PQ}x + \overline{PS}y), (x, y) \in E \times E\right\}$. Considérons à présent l'opérateur de $E \oplus E$ dans lui-même défini par
$$U = \begin{pmatrix} \overline{Q} & \overline{S} \\ \overline{PQ} & \overline{PS} \end{pmatrix}.$$
C'est un morphisme appartenant à $\mathrm{Mor}(E \oplus E)$ car Q, S, PQ, PS et leurs adjoints sont des opérateurs pseudo-différentiels à support compact d'ordre de partie réelle négative ou nulle,

donc s'étendent en des éléments de $\mathrm{Mor}(E)$. De plus ce morphisme est à image fermée dans $E \oplus E$, et son adjoint vérifie la même propriété. Alors $G(P) = \mathrm{Im}U$ est un sous-module orthocomplémenté de $E \oplus E$ (par la proposition (B.2.6)).

■

Remarques

1. Nous avons énoncé cette propriété pour $C^*(M, \mathcal{F})$. Elle reste vraie, par projection, pour E_r le module hilbertien réduit.

Proposition 3.4.11 — Soit P un opérateur pseudo-différentiel elliptique à support compact. L'opérateur $\overline{P}$ est un opérateur régulier (au sens de Baaj) de E_r dans E_r.

2. Cette proposition implique notamment $\overline{P} = ((\overline{P})^*)^*$, et donc en particulier que la fermeture minimale de P est aussi son extension fermée maximale.
3. Cette dernière propriété demeure vraie dans un module obtenu en tensorisant par une représentation de $C^*(M, \mathcal{F})$ (ou de $C_r^*(M, \mathcal{F})$ dans le cas du module réduit). On peut, par exemple, retrouver le résultat suivant de [Co79].
   L'opérateur P_x restreint à $D_x = C_c^\infty(G^x)$ peut être considéré comme un opérateur linéaire non borné sur $L^2(G^x)$, et on a :

Proposition 3.4.12 — L'opérateur $P_{x|D_x}$ est fermable, et le domaine de sa fermeture est maximal, i.e. $\mathrm{Dom}\overline{P_{x|D_x}} = \left\{u \in L^2(G^x),\ P_x u \in L^2(G^x)\right\}$ (au sens des distributions).

Démonstration— Soit π_x la représentation de la C*-algèbre $C_r^*(M, \mathcal{F})$ dans $L^2(G^x, \lambda^x)$ par convolution à gauche décrite au chapitre 1. La représentation π_x est non dégénérée, et l'opérateur $\overline{P}$ régulier sur $E_r = C_r^*(M, \mathcal{F})$. Nous pouvons donc appliquer la proposition (B.3.11) à l'opérateur $\overline{P}$: il existe un opérateur $P_{0,x}$ de $E_r \otimes_{\pi_x} L^2(G^x, \lambda^x) = L^2(G^x, \lambda^x)$ dont le domaine est l'image du produit tensoriel algébrique $\mathrm{Dom}\overline{P} \otimes D_x$, qui est fermable, et dont la fermeture $\overline{P} \otimes_{\pi_x} 1$ est un opérateur régulier. Nous savons de plus que pour tous $f \in \mathrm{Dom}\overline{P}$, $\xi \in D_x$, on a

$$\overline{P} \otimes_{\pi_x} 1(f \otimes \xi) = P_{0,x}(f \otimes \xi) = \overline{P}(f) \otimes \xi.$$

L'opérateur $\overline{P} \otimes_{\pi_x} 1$ coïncide donc avec l'opérateur P_x sur $D \otimes D_x$, avec $D = C_c^\infty(G)$, et définit ainsi une extension fermée de P_x.
Il nous reste à montrer que $\overline{P_x} = \overline{P} \otimes_{\pi_x} 1$. Il nous suffit pour cela de montrer que le produit tensoriel algébrique $D \otimes D_x$ est un domaine essentiel pour $\overline{P} \otimes_{\pi_x} 1$. Or D est un domaine essentiel pour $\overline{P}$. D'après la proposition (B.3.12), nous savons que l'image du produit tensoriel algébrique $D \otimes D_x$ dans $E \otimes_{\pi_x} L^2(G^x, \lambda^x)$ est un domaine essentiel pour P_x. Or cette image est dense dans D_x, ce qui permet de conclure. ■

Chapitre 4

Puissances complexes, modules de Sobolev longitudinaux et structure de l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux

4.1 Puissances complexes d'un opérateur longitudinal différentiel elliptique positif et inversible

4.1.1 Résolvante et parametrix à paramètre

Nous allons définir les puissances complexes d'un G-opérateur A de classe C^k différentiel elliptique, positif, inversible et d'ordre $m > 0$. L'exemple typique, et que nous garderons à l'esprit, d'un tel opérateur est l'opérateur différentiel d'ordre 2, $1 + \Delta$, où Δ est le Laplacien longitudinal (positif) associé à une structure riemannienne sur le feuilletage.
Pour construire ces puissances complexes, il suffit essentiellement d'adapter la méthode exposée dans la section (2.5). Nous venons de voir qu'un tel opérateur A est régulier sur le $C^*(M, \mathcal{F})$-module $E = C^*(M, \mathcal{F})$. Son spectre est donc fermé et positif, et nous noterons $\varepsilon = \inf(\mathrm{Sp}(A))$. Nous savons de plus que sa résolvante $(A - \lambda)^{-1}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} - [\varepsilon, +\infty[$, à valeurs dans $\mathrm{Mor}(E)$. Notons encore que pour $\lambda \in D_\rho = \{z, \Re e\, z < \rho\}$, avec $\rho < \varepsilon$, on a la propriété suivante.

Proposition 4.1.1 — Si $\Re e\, \lambda \leq \varepsilon$, et $\lambda \neq \varepsilon$, on a

$$\left\|(A - \lambda)^{-1}\right\| = \frac{1}{|\lambda - \varepsilon|}.$$

Démonstration— L'opérateur $(A - \lambda)^{-1}$ est un opérateur de $\mathrm{Mor}(E)$ normal. On sait donc que sa norme $\left\|(A - \lambda)^{-1}\right\|$ est égale à son rayon spectral

$$\rho((A - \lambda)^{-1}) = \sup_{\mu \in \mathrm{Sp}(A-\lambda)^{-1}} |\mu|\,.$$

Or $\mu \in \mathrm{Sp}(A-\lambda)^{-1}$ équivaut à $\mu^{-1}+\lambda = r \in \mathrm{Sp}A$. Donc on a

$$\left\|(A-\lambda)^{-1}\right\| = \rho((A-\lambda)^{-1}) = \sup_{r\in \mathrm{Sp}A} (r-\lambda)^{-1} = \frac{1}{|\lambda-\varepsilon|}.$$

■

Nous savons que l'opérateur $A-\lambda$ est elliptique pour $\lambda \in \mathbb{C} - [\varepsilon, +\infty[$. Nous allons construire une parametrix B_λ à support dans un compact W indépendant de λ.

Proposition 4.1.2 — L'opérateur $A-\lambda$ admet pour $\lambda \in \mathbb{C} - [\varepsilon, +\infty[$ une parametrix B_λ à support dans un compact W indépendant de λ vérifiant la propriété suivante. Les opérateurs $R_\lambda = (A-\lambda)B_\lambda - I$ et $S_\lambda = B_\lambda(A-\lambda) - I$ sont des opérateurs régularisants de classe C^k à support dans un compact W indépendant de λ, et, pour tout G-opérateur pseudo-différentiel P de classe C^k et tout entier $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_N(P)$ telle que

$$\|PR_\lambda\| \le C_N(P)(1+|\lambda|)^{-N} \text{ et } \|S_\lambda P\| \le C_N(P)(1+|\lambda|)^{-N}.$$

Démonstration—

– Donnons-nous un atlas formé d'ouverts trivialisants $(\Omega_i)_{i\in I}$ et une partition de l'unité $\mathcal{C}^{\infty,k}$ adaptée à ce recouvrement $(\varphi_i)_{i\in I}$. Donnons-nous également pour tout i une fonction $\varphi'_i \in \mathcal{C}_c^{\infty,k}(\Omega_i)$ valant 1 sur le support de φ_i et un voisinage compact W de $G^{(0)}$ dans G vérifiant, pour tout i :

$$\left\{\gamma \in W,\ s(\gamma) \in \ \mathrm{Supp}(\varphi'_i)\right\} \subset G(\Omega_i) \simeq L_i \times L_i \times T_i.$$

L'opérateur A étant local, on sait que le support de A est contenu dans W ; la distribution k_i associée à $A_i = AM_i$ (avec $M_i = M_{\varphi'_i}$ l'opérateur de multiplication par $\varphi'_i \circ r$) est alors à support dans $G(\Omega_i)$; l'opérateur $A_i - \lambda M_i$ peut donc être considéré comme un opérateur longitudinal sur l'ouvert trivialisant Ω_i. De plus le symbole principal de P_i est inversible sur un voisinage du support de φ_i ; en effet

$$\sigma_m(A_i - \lambda M_i) = \sigma_m\left(r^*(A-\lambda)r^*(M_i)\right) = \sigma_m\left(r^*(A-\lambda)\right)\varphi'_i = \sigma_m(A-\lambda)\varphi'_i.$$

Nous pouvons alors, comme dans la proposition (3.3.3), définir pour tout i un opérateur B^i_λ tel que

$$R_{\lambda_i} = (A-\lambda)M_iB^i_\lambda M_{\varphi_i} - M_{\varphi_i}$$

est un opérateur régularisant à support dans $W \cap G(\Omega_i)$. En additionnant les opérateurs B^i_λ on obtient une parametrix B_λ à support compact dans W pour $(A-\lambda)$ telle que les opérateurs

$$R_\lambda = (A-\lambda)B_\lambda - I \text{ et } S_\lambda = B_\lambda(A-\lambda) - I$$

sont des opérateurs régularisants de classe C^k à support dans W. De plus le symbole de B_λ est localement de la forme

$$b(x,\xi,\lambda) = \chi(\xi,\lambda)\sum_{j=0}^{\infty} b^i_{-m-j}(x,\xi,\lambda),$$

avec $\chi(\xi,\lambda) = \chi(|\xi| + |\lambda|^{1/m})$, où $\chi(u)$ est une fonction C^∞ valant 0 si $u < 1/2$ et 1 si $u \geq 1$, et $b^i_{-m-j}(x,\xi,\lambda)$ les symboles à paramètre positivement homogènes de degré $-m-j$ en $(\xi,\lambda^{1/m})$ vérifiant les équations (2.4) :

$$\begin{aligned} b_{-m}(a_m - \lambda) &= 1 \\ b_{-m-l}(a_m-\lambda) + \sum_{\substack{j<l \\ j+k+|\alpha|=l}} \frac{[\partial_\xi^\alpha b_{-m-j}][\partial_x^\alpha a_{m-k}]}{\alpha!} &= 0 \quad l > 0. \end{aligned}$$

- Montrons à présent que nous avons une estimation de la norme des opérateurs R_λ et S_λ. On sait en reprenant les notations précédentes que $R_\lambda = \sum R^i_\lambda$ avec R^i_λ des opérateurs régularisants de classe C^k à support compact dans $G(\Omega_i)$, tels que $R^i_\lambda = (A-\lambda)M_i B^i_\lambda - M_{\varphi_i}$. Nous savons, par ce que nous avons vu au chapitre 2 sur les opérateurs pseudo-différentiels à paramètre, que chacun des opérateurs AM_{φ_i} est une famille de classe C^k (et donc continue, en particulier) indicée par t d'opérateurs différentiels A^i_t sur $L \times \{t\}$. Par conséquent, si $\varphi^t_i(l)$ est la fonction C^∞ à support compact égale à $\varphi_i(l,t)$ en l, l'opérateur $A_t - \lambda\varphi^t_i$ est un opérateur pseudo-différentiel à paramètre, au sens de la section (2.4.2). En particulier, d'après la proposition (2.4.5) sur les parametrix à paramètre, nous savons que le noyau de l'opérateur R^i_λ est une fonction $C^{\infty,0}$ à support compact vérifiant pour tout compact $K \subset T$, et tout $t \in K$, la propriété du noyau d'un opérateur régularisant à paramètre :
$$\forall \alpha,\beta\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists C^{i,\alpha,\beta,K}_N,\ \left\|\partial^\alpha_l \partial^\beta_{l'} k^i_\lambda(l,l',t)\right\| \leq C^{i,\alpha,\beta,K}_N (1+|\lambda|)^{-N}.$$
- Donnons-nous un opérateur longitudinal pseudo-différentiel P d'ordre m à support compact dans l'ouvert Ω_i. Si $\Re e\, m \leq 0$ alors $\left\|PR^i_\lambda\right\| \leq \|P\| \left\|R^i_\lambda\right\|$ car P est borné. Or on a
$$\left\|R^i_\lambda \phi\right\| \leq C'_N(1+|\lambda|)^{-N} \|\phi\|$$
pour toute fonction $\phi \in C^{\infty,k}_c(G(\Omega_i))$. Par ailleurs, la propriété est vraie pour les opérateurs différentiels, puisqu'elle est vraie pour toutes les dérivées partielles du noyau de R^i_λ.
Si $\Re e\, m > 0$, donnons-nous un opérateur différentiel elliptique D d'ordre $l > \Re e\, m$, et une parametrix Q pour l'opérateur D, avec $I = QD + T$, où T est régularisant à support compact. On peut alors écrire
$$PR_\lambda = P(QD+T)R_\lambda = (PQ)DR_\lambda + (PT)R_\lambda.$$
Les opérateurs PQ et PT sont de partie réelle négative ou nulle. De la propriété pour les opérateurs différentiels et pour les opérateurs d'ordre de partie réelle négative, on déduit la propriété.

■

4.1.2 Puissances complexes

Nous allons, comme dans le chapitre 2, définir les puissances complexes d'un opérateur différentiel elliptique positif et inversible, en utilisant le calcul fonctionnel et la formule d'intégration de Cauchy
$$t^s = \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\lambda^s}{t-\lambda} d\lambda.$$

Remarque — Nous nous sommes ici limités au cas d'opérateurs différentiels positifs. On peut, en utilisant les outils de la section (2.5), développer les puissances d'opérateurs différentiels elliptiques non nécessairement positifs.

Notons par ailleurs que Kordyukov [Kor95] a défini, en utilisant les outils développés par Seeley [See67], les puissances complexes d'opérateurs pseudo-différentiels elliptiques vérifiant certaines propriétés spectrales comme des opérateurs non bornés sur $L^2(M)$.

Donnons-nous un contour Γ formé par la droite

$$D_u = \{z = u - iv,\ v \in \mathbb{R}\},$$

avec $u \in \mathbb{R}^+, 0 < u < \varepsilon$. Soit s un nombre complexe de partie réelle négative. La fonction

$$t \mapsto t^s = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\lambda^s}{t - \lambda} d\lambda$$

est une fonction continue et bornée sur $[\varepsilon, +\infty[$. Par le théorème de calcul fonctionnel pour les opérateurs réguliers normaux (B.2, page 149), nous savons que l'opérateur A^s est un opérateur de $\mathrm{Mor}(E)$. De plus, la convergence en norme de l'intégrale

$$\frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^s \ln(\lambda)(A - \lambda)^{-1} d\lambda$$

montre que la famille $s \mapsto A^s$ est holomorphe sur le demi-plan $\Re e\, s < 0$, à valeur dans $\mathrm{Mor}(E)$. Nous savons également, par le calcul fonctionnel, que nous pouvons définir A^s comme un opérateur régulier normal pour $\Re e\, s > 0$. La formule $A^s = A^{s-k}A^k$ utilisée avec $k \in \mathbb{N}, k > \Re e\, s$ permet de montrer que la famille $s \mapsto A^s$ admet un prolongement analytique à $\mathbb{C}$.

Définissons à présent la notion de famille holomorphe de symboles polyhomogènes longitudinaux à support compact.

Définition 4.1.3 — Soient L et T des ouverts respectivement de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^q$, $\mathcal{D}$ un domaine du plan complexe et $m : z \mapsto m(z)$ une fonction holomorphe de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$. On dit qu'une famille $z \mapsto a(l, \xi, z, t) \in \mathcal{C}_c^{\infty,k}(L \times \mathbb{R}^p \times \mathcal{D} \times T)$ est une *famille holomorphe de symboles classiques d'ordre m sur $\mathcal{D}$*, et on note $a(l, \xi, z, t) \in \mathbb{S}^m_{hom,k}(L, T, \mathcal{D})$ si :

1. l'application $z \mapsto a(l, \xi, z, t)$ est holomorphe pour tous (l, ξ, t) fixés ;
2. il existe pour tout $j \in \mathbb{N}$ des fonctions $a_{m(z)-j}(l, \frac{\xi}{|\xi|}, z, t) \in \mathcal{C}^{\infty,k}(L \times (\mathbb{R}^p - 0) \times \mathcal{D} \times T)$, positivement homogènes en ξ de degré $m(z) - j$, telles que :
   (a) l'application $z \mapsto a_{m(z)-j}(l, \xi, z, t)$ est holomorphe de $\mathcal{D}$ dans l'ensemble des fonctions à support compact de classe C^k de T dans $C^\infty(S^*L)$;
   (b) pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tous multi-indices α, β, γ, $|\gamma| \leq k$, pour tous compacts $K \subset L$, $K' \subset \mathcal{D}$ et $K'' \subset T$, il existe une constante $C = C(N, \alpha, \beta, \gamma, K, K', K'')$ pour laquelle :

$$\left| \partial_\xi^\alpha \partial_l^\beta \partial_t^\gamma [a(l, \xi, z, t) - \chi(\xi) \sum_{j=0}^{N-1} a_{m(z)-j}(l, \xi, z, t)] \right| \leq C < \xi >^{m-N-|\alpha|},$$

   pour $(l, \xi, z, t) \in K \times \mathbb{R}^p \times K' \times K''$ et $m \geq |m(z)|$ sur K'.

A présent que nous avons défini les familles holomorphes de symboles longitudinaux, nous pouvons définir les familles holomorphes d'opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux.

Définition 4.1.4 — Soit $\Omega \simeq L \times T$ un ouvert trivialisant. Soit $z \mapsto m(z)$ une fonction holomorphe de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$. On dit qu'une famille $z \mapsto A(z)$ est une famille holomorphe d'ordre $m(z)$ sur $\mathcal{D}$, et on note $A(z) \in \mathbb{P}^m_{\mathcal{F},k}(\Omega, \mathcal{D})$, si la famille $A(z) \in \mathcal{P}^{m(z)}_{\mathcal{F},k}(\Omega)$ est une famille d'opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux à support compact dans l'ouvert Ω telle que le symbole de l'opérateur $A(z)$ est donné par un élément $a(l, \xi, z, t) \in \mathbb{S}^m_{hom,k}(L, T, \mathcal{D})$.

Montrons à présent que nous pouvons exprimer l'opérateur régulier A^s à l'aide d'une famille holomorphe d'opérateurs pseudo-differentiels.

Nous pouvons écrire, pour $\lambda \in \Gamma$,

$$(A-\lambda)^{-1} = B_\lambda + \tilde{R}_\lambda \text{ avec } \tilde{R}_\lambda = -(A-\lambda)^{-1} R_\lambda = -S_\lambda (A-\lambda)^{-1}.$$

Pour $\Re e\, s < 0$, posons

$$\tilde{B}(s) = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^s B_\lambda d\lambda \text{ et } R_1(s) = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^s \tilde{R}_\lambda d\lambda.$$

Enonçons deux lemmes nous permettant de comprendre ces opérateurs $\tilde{B}(s)$ et $R_1(s)$.

Lemme 4.1.5 — La fonction $s \mapsto \tilde{B}(s)$ s'écrit comme une somme

$$\tilde{B}(s) = B(s) + R_2(s),$$

avec $s \mapsto R_2(s)$ une fonction holomorphe de $\{\Re e\, s < 0\}$ dans l'ensemble des G-opérateurs régularisants à support dans le compact W et $B(s)$ une fonction holomorphe de $\{\Re e\, s < 0\}$ dans l'ensemble des G-opérateurs pseudo-différentiels elliptiques à support dans le compact W.

Démonstration du lemme Si nous nous plaçons, comme précédemment, dans un ouvert trivialisant, le symbole b_λ de B_λ est localement de la forme

$$b_\lambda(x, \xi, t) = \chi(\xi, \lambda) \sum_{j=0}^{\infty} b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda, t)$$

avec b^0_{-m-j} la composante positivement homogène de degré $-m-j$ en (ξ, λ) d'une parametrix à paramètre pour $[(A-\lambda)M_i]_t$. On définit

$$b^{(s)}_{-ms-j}(x, \xi, t) = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^s b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda, t) d\lambda$$

la composante positivement homogène de degré $-ms-j$ en ξ. Nous pouvons alors définir $B(s)$ comme étant l'opérateur à support dans K ayant localement $b_s = \chi(|\xi|) \sum_{j=0}^\infty b^{(s)}_{-ms-j}(x, \xi, t)$ pour symbole. L'opérateur $R_2(s) = \tilde{B}(s) - B(s)$ a donc un symbole qui est localement de la forme

$$r_2(x, \xi, s, t) = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^s \left(\chi(|\xi| + |\lambda|^{1/m}) - \chi(|\xi|) \right) \sum_{j=0}^{\infty} b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda, t) d\lambda$$

et est donc nul dès que $|\xi| \geq 1$. $\boxminus$

LEMME 4.1.6 — Pour tout G-opérateur P pseudo-différentiel de classe C^k à support compact les applications $s \mapsto PR_1(s)$ et $s \mapsto R_1(s)P$ sont des fonctions holomorphes de $\{\Re e\, s < 0\}$ dans $C^*(M\mathcal{F})$.

DÉMONSTRATION DU LEMME Nous savons que $(A-\lambda)^{-1} \in \mathrm{Mor}(E)$, pour tout $\lambda \in \Gamma$. De plus $\mathrm{Mor}(E)$ est l'ensemble des multiplicateurs de la C*-algèbre $C^*(M,\mathcal{F})$. Il nous suffit donc de montrer que d'une part $PR_\lambda \in C^*(M,\mathcal{F})$ et $S_\lambda R \in C^*(M,\mathcal{F})$, et que d'autre part ces opérateurs sont bornés en norme par une fonction de λ dont le produit par $\lambda^s \ln(\lambda)$ est intégrable sur Γ. La première assertion est évidente car ces opérateurs sont des G-opérateurs régularisants à support compact, et donc en particulier des éléments de $C^*(M,\mathcal{F})$. La seconde provient de la proposition (4.1.2) sur les normes des opérateurs R_λ et S_λ. $\boxminus$

On déduit de ce qui précède la proposition suivante.

PROPOSITION 4.1.7 — Soit s un nombre complexe de partie réelle négative. L'opérateur régulier A^s s'écrit

$$A^s = B(s) + R(s)$$

avec $B(s)$ un G-opérateur de classe C^k d'ordre ms à support dans le compact W et $R(s)$ un élément de $E = C^*(M,\mathcal{F})$ tel que PR_s et R_sP sont aussi des éléments de $E = C^*(M,\mathcal{F})$ pour tout G-opérateur P pseudo-différentiel à support compact. Les fonctions $s \mapsto B(s)$, $s \mapsto PR(s)$ et $s \mapsto R(s)P$ sont holomorphes sur $\{\Re e\, s < 0\}$.

Notons que, $B(s)$ étant dans $C^*(M,\mathcal{F})$, l'opérateur A^s est un élément de $C^*(M,\mathcal{F})$ pour $\Re e\, s < 0$. Etendons à présent la proposition précédente à l'ensemble du plan complexe.

LEMME 4.1.8 — On a la propriété de semi-groupe $B(s+s') = B(s)B(s')$ à un opérateur régularisant de classe C^k à support compact près pour $\Re e\, s < 0$ et $\Re e\, s' < 0$.

DÉMONSTRATION DU LEMME On a

$$A^{s+s'} = B(s+s') + R(s+s') = A^s A^{s'} = B(s)B(s') + B(s)R(s') + R(s)B(s') + R(s)R(s').$$

L'opérateur $Q = B(s+s') - B(s)B(s')$ est donc un G-opérateur pseudo-différentiel de classe C^k à support compact qui vérifie que PQ et QP sont dans $C^*(M,\mathcal{F})$ pour tout G-opérateur pseudo-différentiel à support compact P. C'est donc un opérateur régularisant à support compact de classe C^k. $\boxminus$

Soit s un complexe de partie réelle positive et soit $l > \Re e\, s$ un entier. On a $A^s = A^{s-l}A^l$ avec $\Re e(s-l) < 0$. On peut donc écrire

$$A^{s-l} = B(s-l) + R(s-l).$$

On a donc

$$A^s = B(s-l)A^l + R(s-l)A^l.$$

L'opérateur $B'(s)=B(s-l)A^l$ est un opérateur pseudo-différentiel de classe C^k d'ordre ms. Localement, le symbole de cet opérateur s'écrit $b'(x,\xi,s,t)=b'_+(x,\xi,s,t)+b'_-(x,\xi,s,t)$ avec

$$b'_+=\chi(\xi)b_+=\chi(\xi)\sum_{j=0}^{[\Re e\, s]}b^{(s)}_{ms-j} \text{ et } b'_-=\chi(\xi)\sum_{j=[\Re e\, s]+1}^{\infty}b^{(s)}_{ms-j}.$$

L'opérateur $B(s)$ de symbole localement égal à $b=b_++b'_-$ est un G-opérateur pseudo-différentiel de classe C^k à support dans le compact K, d'ordre ms et ne différant de $B'(s)$ que par un opérateur $R''(s)$ régularisant à support dans le compact W. De plus, l'opérateur $B(s)$ est elliptique et son symbole principal est égal à $(a_m)^s$. Nous pouvons donc écrire

$$A^s=B(s)+R(s)$$

avec $B(s)$ comme ci-dessus, et $R(s)$ un élément de $C^*(M,\mathcal{F})$ tel que, pour tout G-opérateur P pseudo-différentiel de classe C^k à support compact, on a $PR(s)$ et $R(s)P$ dans $C^*(M,\mathcal{F})$. D'après le lemme précédent, cette décomposition ne dépend pas du nombre entier l choisi pour l'exprimer, et $B(s+s')=B(s)+B(s')$ à un opérateur régularisant à support compact près, pour tous s et s'. On déduit alors de ce qui précède le théorème suivant.

Théorème 4.1 — L'opérateur régulier A^s s'écrit

$$A^s=B(s)+R(s)$$

avec $B(s)$ un G-opérateur pseudo-différentiel de classe C^k d'ordre ms à support dans le compact K et $R(s)$ un élément de $E=C^*(M,\mathcal{F})$ tel que $PR(s)$ et $R(s)P$ sont aussi des éléments de $E=C^*(M,\mathcal{F})$ pour tout G-opérateur P pseudo-différentiel de classe C^k à support compact. Les fonctions $s\mapsto B(s)$, $s\mapsto PR(s)$ et $s\mapsto R(s)P$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$.

4.2 Modules de Sobolev longitudinaux

4.2.1 Définition des modules de Sobolev longitudinaux

Considérons à présent un opérateur P elliptique à support compact, d'ordre réel $m>0$ et de classe C^k. L'opérateur $1+P^*P$ est un G-opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre $2m$ qui est un opérateur régulier bijectif dont le spectre est inclus dans $[1,+\infty[$. Nous pouvons donc utiliser, comme dans la section précédente, le calcul fonctionnel pour les opérateurs réguliers pour définir pour tout nombre réel positif s l'opérateur régulier $(1+P^*P)^{\frac{s}{2m}}$, car la fonction $f:t\mapsto t^{\frac{s}{2m}}$ est une fonction continue au voisinage de $[1,+\infty[$. Le domaine de cet opérateur est un sous-$C^*(M,\mathcal{F})$-module fermé de E. Nous pouvons alors définir les modules de Sobolev tangentiels associés à P de la manière suivante.

Définition 4.2.1 — On appelle *modules de Sobolev tangentiels* associés à P les modules hilbertiens $H^s_\tau(P^*P)$ définis par les sous-$C^*(M,\mathcal{F})$-modules $\mathrm{Dom}(1+P^*P)^{\frac{s}{2m}}$ complétés pour le produit scalaire donné par

$$\langle x,\,y\rangle_s=\langle(1+P^*P)^{\frac{s}{2m}}x,\,(1+P^*P)^{\frac{s}{2m}}y\rangle.$$

Notons que dans le cas $s \geq 0$, les modules ainsi définis sont des sous-$C^*(M,\mathcal{F})$-modules stricts de E, qui sont complets pour la norme précédente. Dans le cas $s \leq 0$, au contraire, les modules $H^s_\tau(P^*P)$ sont des complétions de E pour des produits scalaires dominés par le produit scalaire usuel de E.

4.2.2 Equivalence des modules de Sobolev longitudinaux

Nous allons montrer, en nous appuyant sur les deux lemmes suivants démontrés en appendice, que la définition précédente ne dépend pas de l'opérateur P. Commençons par énoncer un lemme classique démontré à l'aide de la transformée de Mellin.

LEMME—B.3.14 Soient A et B deux éléments positifs de $\mathrm{Mor}(E)$ vérifiant

$$A \leq B.$$

Pour tout $s \in]0,1[$, on alors

$$A^s \leq B^s.$$

Enonçons à présent le lemme principal.

LEMME—B.3.15 Soient S et T des opérateurs réguliers bijectifs sur un module hilbertien E. Considérons les assertions suivantes.

(i) $\exists A \in \mathrm{Mor}(E),$ tel que $\|A\| \leq 1$ et $AT \subset S$.

(ii) $\mathrm{Dom}T \subset \mathrm{Dom}S$ et $\forall x \in \mathrm{Dom}T,\ \|T(x)\| \geq \|S(x)\|$.

(iii) $(S^*S)^{-1} \geq (T^*T)^{-1}$.

(iv) $\exists a > 1,\ (S^*S)^{-a} \geq (T^*T)^{-a}$.

On a alors $(iv) \Rightarrow (i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

THÉORÈME 4.2 — Les modules de Sobolev $H^s_\tau(P^*P)$ sont indépendants de l'opérateur elliptique P à support compact d'ordre strictement positif choisi.

DÉMONSTRATION—

1. Le Laplacien positif Δ est différentiel d'ordre 2, elliptique et positif, et $(1+\Delta)$ est un opérateur régulier bijectif dont le spectre est inclus dans $[1,+\infty[$. Pour montrer la proposition, nous allons utiliser les lemmes précédents sur les opérateurs réguliers et la transformation de Mellin.
2. Commençons par montrer que cette propriété est vraie pour tout s multiple entier positif de $2m$. L'opérateur $(1+P^*P)^k$ est un G-opérateur pseudo-différentiel elliptique à support compact d'ordre $2km$. On veut montrer que cet opérateur a même domaine que l'opérateur $(1+\Delta)^{km}$ et que les normes ainsi définies sont équivalentes.
   – Si m est un entier, $(1+\Delta)^{km}$ est un opérateur différentiel elliptique d'ordre $2mk$. Le corollaire (3.4.6) montre que

$$\left\|(1+P^*P)^k\xi\right\| \leq c_1(\left\|(1+\Delta)^{km}\xi\right\|+\|\xi\|) \text{ et } \left\|(1+\Delta)^{km}\xi\right\| \leq c_2(\left\|(1+P^*P)^k\xi\right\|+\|\xi\|).$$

De plus, on sait que pour tout $\xi \in \mathrm{Dom}(1+P^*P)^k = \mathrm{Dom}(1+\Delta)^{km}$, on a $\left\|(1+\Delta)^{km}\xi\right\| \geq \|\xi\|$ et $\left\|(1+P^*P)^k\xi\right\| \geq \|\xi\|$. On en tire l'existence de constantes C et C' telles que pour tout $\xi \in \mathrm{Dom}(1+P^*P)^k = \mathrm{Dom}(1+\Delta)^{km}$, on a

$$C\left\|(1+\Delta)^{km}\xi\right\| \leq \left\|(1+P^*P)^k\xi\right\| \leq C'\left\|(1+\Delta)^{km}\xi\right\|.$$

– Si m n'est pas entier, nous savons par le théorème 4.1, page 109 que

$$(1+\Delta)^{km} = B(2km) + R(2km),$$

avec $R(2km)$ un élément de $C^*(M,\mathcal{F})$ et $B(2km)$ un G-opérateur pseudo-différentiel elliptique à support compact d'ordre $2km$. On a donc

$$\mathrm{Dom}(1+\Delta)^{km} = \mathrm{Dom}B(2km) = \mathrm{Dom}(1+P^*P)^k.$$

De plus, si nous utilisons, comme précédemment, le corollaire (3.4.6), en tenant compte du fait que

$$\left\|(1+\Delta)^{km}\xi\right\| \geq \|\xi\| \text{ et } \left\|(1+P^*P)^k\xi\right\| \geq \|\xi\|,$$

nous obtenons, en choisissant $c > \|R(2km)\|$, pour $\xi \in \mathrm{Dom}B(2km)$,

$$\left\|(1+\Delta)^{km}\xi\right\| - c\|\xi\| \leq \|B(2km)\xi\| \leq c\left\|(1+P^*P)^k\xi\right\| + c\|\xi\|,$$

ce qui donne

$$\left\|(1+\Delta)^{km}\right\| \leq 3c\left\|(1+P^*P)^k\xi\right\|.$$

On a de même une inégalité dans le sens opposé.

$$\left\|(1+P^*P)^k\xi\right\| \leq c'(\|B(2km)\xi\| + \|\xi\|) \leq 3c'\left\|(1+\Delta)^{km}\xi\right\|.$$

3. Nous allons à présent montrer cette propriété pour tout réel $s > 0$. Posons $S(k) = S^{2km}$ avec $S = c_S(1+P^*P)^{\frac{1}{2m}}$ et $T(k) = T^{2km}$ avec $T = c_T(1+\Delta)^{\frac{1}{2}}$. Nous venons de voir que pour des constantes c_S et c_T bien choisies, $S(k)$ et $T(k)$ vérifient l'assertion (ii) du lemme (B.3.15). Comme $(ii) \Rightarrow (iii)$, nous savons que l'assertion (iii) est vérifiée, i.e. que $T^{-2}(k) \leq S^{-2}(k)$ soit encore

$$T^{-4km} \leq S^{-4km}.$$

Choisissons à présent un entier k tel que $s < 2km$. L'assertion (iv) du lemme précédent est donc vérifiée pour les opérateurs T^s et S^s avec un nombre $a = 2km/s$. On en déduit l'assertion (ii) pour ces opérateurs, soit

$$\mathrm{Dom}T^s \subset \mathrm{Dom}S^s \text{ et } \forall x \in \mathrm{Dom}T^s,\ \|T^s(x)\| \geq \|S^s(x)\|,$$

soit encore

$$\mathrm{Dom}(1+\Delta)^{\frac{s}{2}} \subset \mathrm{Dom}(1+P^*P)^{\frac{s}{2m}}$$

et

$$\forall x \in \mathrm{Dom}(1+\Delta)^{\frac{s}{2}},\ \left\|(1+\Delta)^{\frac{s}{2}}(x)\right\| \geq C\left\|(1+P^*P)^{\frac{s}{2m}}(x)\right\|.$$

Comme nous pouvons échanger dans cette démonstration les rôles de $(1+P^*P)^{\frac{1}{2m}}$ et $(1+\Delta)^{\frac{1}{2}}$ en modifiant les constantes, on obtient bien l'égalité entre les modules de Sobolev.

4. Etudions à présent le cas $s \leq 0$. Remarquons pour commencer que, dans ce cas, on a toujours
$$\mathrm{Dom}(1+P^*P)^{\frac{s}{2m}} = \mathrm{Dom}(1+\Delta)^{\frac{s}{2}} = E.$$
Les modules hilbertiens $H^s_{\tau,k}(P^*P)$ et $H^s_{\tau,k}(\Delta)$ sont donc des complétions de E pour des normes a priori plus petites que la norme usuelle sur E. Nous devons donc montrer que les normes correspondant à ces deux modules sont équivalentes.
   - Dans le cas $s = 0$, on a $H^0_{\tau,k}(P^*P) = H^0_{\tau,k}(\Delta) = E$ muni de sa norme usuelle.
   - Dans le cas $s < 0$, nous devons montrer l'assertion (ii) du lemme précédent pour $S(s) = S^s$ et $T(s) = T^s$, avec $S = c_S(1+P^*P)^{\frac{1}{2m}}$ et $T = c_T(1+\Delta)^{\frac{1}{2}}$. Or ici, $\mathrm{Dom}(S^s) = \mathrm{Dom}(T^s) = E$, puisque ces opérateurs sont des morphismes. On doit donc montrer que
$$\|S(s)x\| \leq \|T(s)x\|$$
pour tout $x \in E$. Cela revient à montrer que $S^*(s)S(s) \leq T^*(s)T(s)$ puisque ces opérateurs sont des morphismes. Or nous avons montré ci-dessus que cette inégalité est vérifiée, avec un choix approprié des constantes c_S et c_T, pour tout s de la forme $-2km$, avec k un entier positif. En effet, nous avons vu qu'il existe une constante C telle que :
$$(1+\Delta)^{km} \leq C(1+P^*P)^k,$$
soit encore
$$(1+P^*P)^{-k} \leq C(1+\Delta)^{km}.$$
Grâce au lemme (B.3.14), on en déduit que l'inégalité $S^*(s)S(s) \leq T^*(s)T(s)$ est vraie pour tout $s < 0$. Comme précédemment, nous pouvons échanger les rôles de S et de T dans cette démonstration, et on en déduit le résultat.

■

4.2.3 Propriétés des modules de Sobolev

Remarquons tout d'abord que la proposition précédente montre en particulier que, pour $s > 0$, si nous nous donnons un opérateur pseudo-différentiel longitudinal $P(s)$ elliptique et d'ordre s, le module de Sobolev H^s_τ est égal au module hibertien $\mathrm{Dom}P(s)$ muni de la norme $\|P(s)x\| + \|x\|$.

Nous pouvons à présent étendre la classe des opérateurs régularisants à support compact.

Définition 4.2.2 — On appelle *opérateur régularisant* un opérateur R qui est pour tous nombres s, s' réels un morphisme de H^s_τ dans $H^{s'}_\tau$. On note $\Psi^{-\infty}$ l'algèbre formée par l'ensemble de ces opérateurs.

Remarquons que cette algèbre $\Psi^{-\infty}$ contient, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Psi^{-\infty}_{c,k}$ comme sous-algèbre dense, et est naturellement incluse dans $\mathrm{Mor}(E)$. Comme dans le cas classique, les modules de Sobolev sont inclus les uns dans les autres.

Proposition 4.2.3 — Soient $s > s'$ deux réels. L'identité de $C_c(G)$ s'étend en une inclusion $i_{s,s'} : H^s_\tau \hookrightarrow H^{s'}_\tau$, qui est un morphisme compact entre les deux modules hilbertiens.

Démonstration— L'inclusion des domaines est claire puisque

$$(1+\Delta)^{s'} = (1+\Delta)^{s'-s}(1+\Delta)^{s}$$

et que $(1+\Delta)^{s'-s}$ est un morphisme. Nous savons de plus que ce morphisme est compact puisque $s-s'<0$ et donc $(1+\Delta)^{s'-s} \in C^*(M,\mathcal{F}) = \mathcal{K}(E)$. ∎

Nous noterons alors :

$$H_\tau^\infty = \cap_{s\in\mathbb{R}} H_\tau^s \text{ et } H_\tau^{-\infty} = \cup_{s\in\mathbb{R}} H_\tau^s.$$

Nous pouvons également placer, pour tout s, les modules H_τ^s et H_τ^{-s} en dualité.

Proposition 4.2.4 — Soit $s>0$ un réel positif. L'application $C^*(M,\mathcal{F})$-sesquilinéaire continue $H_\tau^s \times E \to C^*(M,\mathcal{F})$

$$(u,v) \mapsto \langle u,\, v\rangle_E$$

s'étend en une application $C^*(M,\mathcal{F})$-sesquilinéaire continue $H_\tau^s \times H_\tau^{-s} \to C^*(M,\mathcal{F})$.

Démonstration— Donnons-nous un G-opérateur P d'ordre $s>0$. Nous savons, par la proposition B.3.10, que le domaine de cet opérateur régulier est $\mathrm{Dom}P = \mathrm{Im}(1+P^*P)^{-\frac{1}{2}}$. Ainsi, on obtient

$$H_\tau^s = \mathrm{Dom}P = (1+P^*P)^{-\frac{1}{2}}(E).$$

Tout élément $u \in H_\tau^s$ s'écrit donc $u = (1+P^*P)^{-\frac{1}{2}}z$, avec $z \in E$.
On a donc pour $(u,v) \in H_\tau^s \times E$,

$$\langle u,\, v\rangle_E = \langle (1+P^*P)^{-\frac{1}{2}}z,\, v\rangle_E = \langle z,\, (1+P^*P)^{-\frac{1}{2}}v\rangle_E.$$

On en déduit que pour tout élément $u \in H_\tau^s$ l'application $E \to C^*(M,\mathcal{F})$ qui à $v \in E$ associe $\langle u,\, v\rangle_E$ est continue pour la norme de H_τ^{-s}, et se prolonge donc par continuité à H_τ^{-s}. ∎

Comme dans le cadre classique, les modules de Sobolev forment un cadre naturel pour l'action des G-opérateurs pseudo-différentiels.

Proposition 4.2.5 — Soit P un G-opérateur pseudo-différentiel à support compact d'ordre m de partie réelle m_0. L'opérateur P définit pour tout s un morphisme de H_τ^s dans $H_\tau^{s-m_0}$.

Démonstration— Il revient au même de montrer que

$$(1+\Delta)^{\frac{s-m_0}{2}} P (1+\Delta)^{-\frac{s}{2}} \in \mathrm{Mor}(E).$$

En utilisant le théorème4.1, page 109, nous pouvons écrire

$$(1+\Delta)^{\frac{s-m_0}{2}} = B(s-m_0) + R(s-m_0) \text{ et } (1+\Delta)^{-\frac{s}{2}} = B(-s) + R(-s)$$

avec $B(-s)$ et $B(s-m_0)$ des G-opérateurs pseudo-différentiels à support compact d'ordres respectifs $-s$ et $m-s$, et $R(-s)$ et $R(s-m)$ des éléments de $C^*(M,\mathcal{F})$ régularisants. On obtient alors

$$\begin{aligned}(1+\Delta)^{\frac{s-m_0}{2}}P(1+\Delta)^{-\frac{s}{2}} = B(s-m_0)PB(-s) + B(s-m_0)PR(-s)\\ + R(s-m_0)PB(-s) + R(s-m_0)PR(-s).\end{aligned}$$

Dans le second membre de l'égalité, le premier terme est un G-opérateur pseudo-différentiel à support compact d'ordre de partie réelle nulle, donc un morphisme par la proposition (3.4.5). Les autres termes sont des éléments de $C^*(M,\mathcal{F})$, donc également des morphismes. ■

4.2.4 Modules de Sobolev réduits

Nous pouvons, comme nous l'avons fait dans les sections précédentes, projeter les $C^*(M,\mathcal{F})$-modules de Sobolev que nous venons d'étudier sur la C*-algèbre réduite du feuilletage, et définir ainsi des *modules de Sobolev réduits* $\mathcal{H}^s_\tau$, qui sont des $C^*_r(M,\mathcal{F})$-modules hilbertiens. Les propriétés précédentes restent vraies par projection : les modules de Sobolev définis à l'aide d'opérateurs elliptiques de classe C^k différents sont toujours égaux. De même, l'inclusion

$$\mathcal{H}^s_\tau \subset \mathcal{H}^{s'}_\tau$$

est un opérateur compact pour $s > s'$ et les modules de Sobolev réduits $\mathcal{H}^s_\tau$ et $\mathcal{H}^{-s}_\tau$ sont en dualité au-dessus de $C^*_r(M,\mathcal{F})$. On retrouve également la propriété suivante.

Proposition 4.2.6 — Soit P un G-opérateur pseudo-différentiel d'ordre m de partie réelle m_0. L'opérateur P définit pour tout s un morphisme de $\mathcal{H}^s_\tau$ dans $\mathcal{H}^{s-m_0}_\tau$.

Nous allons maintenant relier les modules de Sobolev réduits et la trace que nous avons étudiée au chapitre 1 sur $C^*_r(M,\mathcal{F})$. Commençons par une proposition sur l'intégrabilité du noyau.

Proposition 4.2.7 — Soit $P \in \Psi^m_{c,k}(G)$ un opérateur pseudo-différentiel longitudinal à support compact et $m_0 = \Re e\, m$. Si $m_0 < -p/2$ ($p = \dim(\mathcal{F})$), alors le noyau k associé à P est une fonction mesurable sur G telle que

$$\sup_{x\in G^{(0)}} \int \left\|k(\gamma^{-1})\right\|^2 d\lambda^x(\gamma) < +\infty.$$

Démonstration— Remarquons d'abord qu'il suffit de montrer cette propriété pour $P \in \mathcal{P}^m_{\mathcal{F},k}(\Omega)$, où $\Omega \simeq L\times T$ est un ouvert trivialisant, car elle est linéaire et évidente pour les opérateurs régularisants à support compact. Or on sait que $k(l,l',t) = \int e^{i<l-l',\xi>}a(l,\xi,t)d\xi$. L'inégalité $|a(l,\xi,t)| \le C <\xi>^{m_0}$ implique que $\left\|a_{(l,t)}\right\|_2^2 = \int |a(l,\xi,t)|^2\, d\xi$ est majoré uniformément par C (le couple (l,t) varie dans un compact de Ω sur lequel l'opérateur est non nul). On déduit alors le résultat de l'égalité de Parseval

$$\left\|a_{(l,t)}\right\|_2^2 = \int |a(l,\xi,t)|^2\, d\xi = \int \left|k(l,l',t)\right|^2 dl'.$$

■

On a alors

Proposition 4.2.8 —

1. Si P est un G-opérateur pseudo-différentiel à support compact de classe C^k d'ordre de partie réelle $\Re e\, m < -p$, alors P est à trace. De plus, si nous désignons par ν la mesure sur M formée au chapitre 1 par intégration de la densité λ par rapport à la mesure transverse μ et par k_P le noyau de Schwartz de l'opérateur P, on a la formule suivante :
$$\mathrm{Tr}(P) = \int_M k_P(x)d\nu(x). \tag{4.1}$$
2. Si R est un opérateur régularisant, R est à trace.
3. Si T est un élément de $C^*_\tau(M,\mathcal{F})$ s'étendant en un morphisme de $\mathcal{H}_\tau^{-s}$ dans $\mathcal{H}_\tau^s$ pour $s > p/2$, alors T est à trace, et on a
$$|\,\mathrm{Tr}(T)| \leq \|T\|_{s,-s}\,.$$

Démonstration—

1. – Nous savons, par la définition 1.6.3 de la trace, que si $f \in \mathcal{L}^2(G, \lambda\circ\nu)$, alors
$$\mathrm{Tr}(f^* * f) = \|f\|^2_{\mathcal{L}^2(G)} = \int_M f^* * f(x)d\nu(x).$$
Par ailleurs, la proposition 4.2.7 montre que tout opérateur d'ordre de partie réelle $\Re e\, m < -p/2$ a un noyau $\mathcal{L}^2$. Ainsi la formule (4.1) est vérifiée pour le noyau $f^* * f$ de tout opérateur de la forme P^*P, avec P d'ordre de partie réelle $\Re e\, m < -p/2$. Par linéarité, la formule
$$\mathrm{Tr}(P) = \int_M k_P(x)d\nu(x)$$
peut être étendue à tout opérateur s'écrivant comme un produit $P = P_1P_2$ d'opérateurs d'ordres m_1 et m_2 tels que $\Re e\, m_1 < -p/2$ et $\Re e\, m_2 < -p/2$.
   – Cette expression 4.1 de la trace reste vraie pour un opérateur régularisant R à support compact. En effet, donnons-nous un opérateur elliptique P d'ordre $m < -p/2$, et une parametrix Q pour P. L'opérateur R s'écrit donc :
$$R = (1 - PQ)R + PQR.$$
Or les opérateurs $P_1 = 1 - PQ$, P, R et QR sont des opérateurs dont l'ordre est de partie réelle strictement inférieure à $-p/2$. D'après ce qui précède, l'opérateur R est donc à trace, et sa trace satisfait la relation 4.1.
   – On déduit de ce qui précède la propriété pour un G-opérateur P pseudo-différentiel à support compact de classe C^k d'ordre de partie réelle $\Re e\, m = m_0 < -p$. En effet P s'écrit alors
$$P = PP_1Q_1 + PR_1,$$
avec P_1 un opérateur elliptique d'ordre $-m_0/2$ et Q_1 une parametrix pour P_1 et $R_1 = I - P_1Q_1$. L'opérateur PR_1 est régularisant à support compact et donc à trace, et sa trace vérifie 4.1. La même propriété est vraie pour l'opérateur PP_1Q_1, et donc pour P.

2. Commençons par montrer que pour tout entier $n > p/2$, l'opérateur $(1+\Delta)^{-n}$ est à trace. Pour cela, donnons-nous une parametrix Q pour l'opérateur différentiel $(1+\Delta)^n$. Soit R l'opérateur régularisant à support compact tel que
$$(1+\Delta)^n Q = I - R.$$
On peut alors écrire
$$(1+\Delta)^{-n} = Q + (1+\Delta)^{-n} R.$$
Cette formule montre tout d'abord que $(1+\Delta)^{-n} \in C^*_r(M,\mathcal{F})$, puisque c'est un multiplicateur borné de $C^*_r(M,\mathcal{F})$ et que $Q,\ R \in C^*_r(M,\mathcal{F})$. De plus, nous savons que Q et R sont dans l'idéal des opérateurs à trace, et on en déduit donc que $(1+\Delta)^{-n}$ est également à trace.
Donnons-nous à présent un opérateur régularisant R. Par définition, nous savons que R est dans l'intersection des domaines des opérateurs $(1+\Delta)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. En particulier, on a
$$(1+\Delta)^n R \in C^*_r(M,\mathcal{F}).$$
En écrivant alors
$$R = (1+\Delta)^{-n}(1+\Delta)^n R,$$
on en déduit que R est à trace puisque $(1+\Delta)^{-n}$ est dans l'idéal des opérateurs à trace.
3. Si l'opérateur T est un morphisme de $\mathcal{H}_\tau^{-s}$ dans $\mathcal{H}_\tau^{s}$, cela signifie que l'opérateur $S = (1+\Delta)^{s/2} T (1+\Delta)^{s/2}$ est un morphisme $S \in \mathrm{Mor}(E_r)$ tel que $\|S\|_{E_r} = \|T\|_{s,-s}$. Pour montrer la proposition, il nous suffit donc de montrer que l'opérateur $(1+\Delta)^{-s}$ est dans l'idéal des opérateurs à trace. En effet, S est un morphisme et si $(1+\Delta)^{-s}$ est à trace, il est clair que
$$\left| \mathrm{Tr}((1+\Delta)^{-s/2} S (1+\Delta)^{-s/2}) \right| \leq \mathrm{Tr}((1+\Delta)^{-s}) \|S\| .$$
Pour montrer que l'opérateur $(1+\Delta)^{-s}$ est à trace, nous pouvons simplement utiliser le théorème 4.1, page 109 qui montre que $(1+\Delta)^{-s}$ s'écrit comme somme d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-2s$ et d'un opérateur régularisant, qui sont tous deux dans l'idéal des opérateurs à trace :
$$(1+\Delta)^{-s} = B(-s) + R(-s).$$

■

4.3 L'algèbre $\Psi_k(G)$ des opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux de classe C^k

Nous avons vu au chapitre précédent que $\Psi_{c,k}$ était munie d'une structure d'algèbre involutive. Nous pouvons généraliser cette structure, en étendant la notion d'opérateur régularisant. Appelons $\Psi_k(G)$ l'espace vectoriel engendré par $\Psi_{c,k}(G)$ et $\Psi^{-\infty}(G)$. Notons que les opérateurs de $\Psi_k(G)$ agissent naturellement sur $H_\tau^{-\infty}$ en laissant H_τ^{∞} invariant.

Proposition 4.3.1 —

1. Pour tous m, n on a : $\Psi_k^m(G) \circ \Psi_k^n(G) \subset \Psi_k^{m+n}(G)$.

2. L'espace vectoriel $\Psi_k(G)$ muni de la composition est une algèbre involutive filtrée par $\mathbb{R}$ et graduée par $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. La propriété précédente fait de $\Psi^{-\infty}(G)$ un idéal bilatère de cette algèbre involutive.
3. L'ensemble $\Psi_k^{\mathbb{Z}}(G)$ des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre entier est une sous-algèbre involutive de $\Psi_k(G)$.

Démonstration— Il suffit de montrer que la composée d'un G-opérateur régularisant R et d'un G-opérateur pseudo-différentiel P de classe C^k à support compact est un G-opérateur régularisant. Nous avons vu cela pour R à support compact au chapitre précédent. Dans le cas général, donnons-nous deux nombres réels s et s'. L'opérateur P est un morphisme de H_τ^s dans H_τ^{s-m} ; l'opérateur$R$ est un morphisme de H_τ^{s-m} dans $H_\tau^{s'}$. Ainsi RP est un morphisme de H_τ^s dans $H_\tau^{s'}$. Avec un raisonnement analogue, on montre que PR est aussi un morphisme de H_τ^s dans $H_\tau^{s'}$. Les opérateurs PR et RP sont donc bien des régularisants. ∎

Remarques

1. Comme précédemment, nous pouvons faire agir les opérateurs de cette algèbre sur $\mathcal{H}_\tau^{-\infty}$ (ils laissent $\mathcal{H}_\tau^{\infty}$ invariant).
2. Nous noterons Ψ_k^{tr} l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux de classe C^k dont l'ordre est de partie réelle strictement inférieure à $-p$, la dimension du feuilletage.

Chapitre 5

Résidu de Wodzicki d'un opérateur pseudo-différentiel longitudinal sur un feuilletage

Dans tout ce chapitre, nous considérons une variété compacte feuilletée $(M, \mathcal{F})$, de groupoïde d'holonomie G séparé, munie d'une mesure transverse μ invariante par holonomie et d'une 1-densité positive définissant un système de Haar C^∞ $(\lambda^x)_{x\in M}$ (voir le chapitre 1). Rappelons notamment qu'un tel système de Haar définit sur tout ouvert trivialisant $\Omega \simeq L \times T$ une mesure $d\lambda$ dans la classe de Lebesgue sur L. Nous commençons par étudier la définition du résidu non commutatif pour un opérateur pseudo-différentiel sur un ouvert trivialisant Ω. Nous allons, comme dans le cas d'une variété compacte, proposer plusieurs caractérisations pour le résidu non commutatif feuilleté. Nous énonçons une définition à partir de la formule locale du résidu. Nous montrerons ensuite que, comme dans le cas ordinaire, le résidu de Wodzicki d'un opérateur peut s'exprimer en terme du développement du noyau de l'opérateur au voisinage de la diagonale. Nous étudierons ensuite la propriété résiduelle du résidu de Wodzicki feuilleté, nous ferons le lien avec l'expansion asymptotique du noyau de la chaleur, et nous étudierons enfin la propriété de trace sur l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux, dont nous discuterons l'unicité.

5.1 Définition du résidu de Wodzicki feuilleté

5.1.1 Cas d'un opérateur de $\mathcal{P}_{\mathcal{F},k}(\Omega)$

Remarquons que la formule locale du résidu non commutatif (2.3.7) permet de voir la continuité du résidu par rapport à P pour la topologie définie sur $\mathcal{P}^m(M)$. Plus précisément, on a :

Proposition 5.1.2 — Soit $(P_t)_{t\in T}$ une famille-produit de classe $\mathcal{C}^k$ d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m à support compact dans U indicée par T. Alors, la fonction $t \longmapsto \mathrm{Res}(P_t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration— La continuité en t_0 de la fonction $t \mapsto a(u, \xi, t)$ de T dans $\mathcal{S}^m_{hom}(U)$ implique notamment la convergence uniforme vers 0 pour tous α, β, sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ pour

u et sur tout compact de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ pour ξ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, de $\partial_u^\beta \partial_\xi^\alpha [a_{m-j}(u,\xi,t) - a_{m-j}(u,\xi,t_0)]$, lorsque $t \to t_0$. En particulier on a

$$\sup_{u\in K, |\xi|=1} |a_{-n}(u,\xi,t) - a_{-n}(u,\xi,t_0)| \to 0 \text{ si } t \to t_0$$

et donc la continuité en t_0 de la fonction $\mathrm{Res}(P_t) = \int_{u\in U,|\xi|=1} a_{-n}(u,\xi,t)\,|d\xi|\,|du|$. En remplaçant $a_{m-j}(u,\xi,t)$ par $\partial_t^l a_{m-j}(u,\xi,t)$, on démontre facilement de la même façon que $t \longmapsto \mathrm{Res}(P_t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$. ■

Définition 5.1.3 —
Soit P un opérateur de $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\Omega)$ où $\Omega \underset{\theta}{\simeq} L\times T$ est un ouvert trivialisant. On sait que $P = (P_t)_{t\in T}$ est une famille d'opérateurs pseudo-différentiels agissant sur $\mathcal{C}_c^\infty(L \times \{t\})$, l'espace $L \times \{t\}$ étant muni de la densité définie par λ, et que $t \mapsto \mathrm{Res}(P_t)$ est une fonction continue (comme composée de deux fonctions continues).

On appelle *résidu de Wodzicki* de l'opérateur P le nombre

$$\mathrm{Res}(P) = \int_{t\in T} \mathrm{Res}(P_t)d\mu(t)$$

où le symbole $\mathrm{Res}(P_t)$ dans l'intégrale désigne le résidu de Wodzicki de l'opérateur P_t sur L muni de la mesure définie par λ.

Remarque — Remarquons que nous n'avons a priori défini le résidu de Wodzicki classique que pour un opérateur pseudo-différentiel sur une variété compacte. Cependant, les ouverts trivialisants que nous avons considérés sont des ouverts dans une variété compacte. On peut donc plonger pour tout t les ouverts de la forme $L \times \{t\}$ dans une variété compacte. Comme l'opérateur pseudo-différentiel P_t est à support compact dans $L \times \{t\}$, la formule locale pour le résidu de Wodzicki montre que le calcul ne dépend pas de la variété compacte dans laquelle on plonge $L \times \{t\}$, à condition de prendre en compte les changements éventuels de mesure d'une variété à l'autre.

Vérifions à présent que cette définition est consistante.
Donnons-nous un ouvert trivialisant $\Omega' \underset{\theta'}{\simeq} L' \times T'$ contenant l'ouvert Ω. L'opérateur P peut être naturellement considéré comme un opérateur pseudo-différentiel longitudinal P' sur Ω'. Ceci nous donne une autre façon de calculer le résidu de Wodzicki et nous allons vérifier que ces deux calculs donnent un résultat identique.

Proposition 5.1.4 — Si $\Omega \subset \Omega'$ sont deux ouverts trivialisants, alors on a :

$$\mathrm{Res}(P) = \mathrm{Res}(P').$$

Démonstration— Appelons $(P'_{t'})_{t'\in T'}$ la famille d'opérateurs définie sur $L' \times \{t'\}$. Nous savons que nous pouvons associer un G-opérateur pseudo-différentiel $\tilde{P}$ à P. Nous avons vu que $\tilde{P}$ est nul hors de $r^{-1}(\Omega)$ et que $\tilde{P}_x$ est en fait nul hors des composantes connexes de l'ensemble $G_x \cap r^{-1}(\Omega)$, que l'on peut indicer par $t \in T$. On a alors, pour f un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(G_x)$ et γ un élément de $G_x \cap r^{-1}(\Omega)$:

$$(\tilde{P}_x f)(\gamma) = [P_t(f \circ \theta \circ r)_{|C_t}] \circ \theta \circ r(\gamma)$$

où $C_t = r^{-1} \circ \theta^{-1}(L \times \{t\})$ désigne la composante connexe de γ. On peut faire de même pour la famille $(P'_{t'})$, avec le même G-opérateur $\tilde{P}$ et on a, pour f un élément de $\mathcal{C}_c^\infty(G_x)$ et γ un élément de $G_x \cap r^{-1}(\Omega')$:

$$(\tilde{P}_x f)(\gamma) = [P'_{t'}(f \circ \theta' \circ r)_{|C'_{t'}}] \circ \theta' \circ r(\gamma)$$

où $C'_{t'} = r^{-1} \circ \theta'^{-1}(L' \times \{t'\})$ désigne la composante connexe de γ. L'opérateur $\tilde{P}$ est uniquement déterminé et ne dépend pas de la forme choisie, P_t ou $P'_{t'}$, pour l'exprimer. On en conclut que l'ensemble $S_{T'}$ des $t' \in T'$ tels que $P'_{t'}$ est non identiquement nul est contenu dans l'ensemble $\{t', C'_{t'} \cap \Omega \neq \emptyset\}$ des composantes connexes qui intersectent Ω.

En effet, si on suppose qu'il existe $t' \in T'$ avec $C'_{t'} \cap \Omega = \emptyset$, $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(L' \times \{t'\})$ et $l' \in L'$ tels que $(P'_{t'}\phi)(l', t') \neq 0$, alors, en notant f une fonction $\mathcal{C}_c^\infty(G_x)$ vérifiant $(f \circ \theta' \circ r)_{|C'_{t'}} = \phi$ et $\gamma \in G_x$ tel que $\theta'(r(\gamma)) = (l', t')$, on a $(\tilde{P}_x f)(\gamma) \neq 0$ et $\gamma \notin G_x \cap r^{-1}(\Omega)$, ce qui est impossible.

Appelons Γ la projection naturelle de T sur T', parallèlement aux feuilles. C'est un difféomorphisme local, qui à un élément $t \in S_T$ associe l'élément $t' \in S_{T'}$ tel que $C_t \subset C'_{t'} \cap \Omega$. Sachant que S_T est compact dans T, on peut, d'un recouvrement de S_T par des ouverts de T difféomorphes à des ouverts de T' par Γ, extraire un recouvrement fini. Quitte à considérer une partition de l'unité adaptée à ce recouvrement, on peut se restreindre à étudier le cas où Γ est un difféomorphisme, car le résidu de Wodzicki est linéaire. Par construction, Γ est l'holonomie d'un chemin.

Lemme 5.1.5 — En reprenant les notations précédentes, si Γ est l'holonomie d'un chemin établissant un difféomorphisme entre T et T', on a :

$$\int_{t' \in T'} \mathrm{Res}(P'_{t'}) d\mu(t') = \int_{t \in T} \mathrm{Res}(P_t) d\mu(t).$$

Démonstration du lemme

D'après les formules précédentes, les opérateurs $P'_{\Gamma(t)}$ et P_t ne diffèrent que par un changement de cartes :

$$(\tilde{P}_x f)(\gamma) = [P_t(f \circ \theta \circ r)_{|C_t}] \circ \theta \circ r(\gamma) = [P'_{t'}(f \circ \theta' \circ r)_{|C'_{t'}}] \circ \theta' \circ r(\gamma).$$

Le résidu de Wodzicki étant invariant par difféomorphisme, on a donc $\mathrm{Res}(P'_{\Gamma(t)}) = \mathrm{Res}(P_t)$ d'où

$$\mathrm{Res}(P') = \int_{t' \in T'} \mathrm{Res}(P'_{t'}) d\mu(t') = \int_{t \in S_T} \mathrm{Res}(P'_{\Gamma(t)}) d\mu(\Gamma(t)) = \int_{t \in S_T} \mathrm{Res}(P_t) d\mu(\Gamma(t)).$$

Or Γ est un difféomorphisme qui laisse les feuilles invariantes et μ une mesure invariante par holonomie. On a donc bien $d\mu(\Gamma(t)) = d\mu(t)$ et donc :

$$\mathrm{Res}(P') = \int_{t \in S_T} \mathrm{Res}(P_t) d\mu(\Gamma(t)) = \int_{t \in S_T} \mathrm{Res}(P_t) d\mu(t) = \int_{t \in T} \mathrm{Res}(P_t) d\mu(t) = \mathrm{Res}(P).$$

$\boxminus$

On a ainsi démontré que la définition que nous avons donnée du résidu de Wodzicki d'un opérateur pseudo-différentiel longitudinal dans $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\Omega)$ est compatible avec l'inclusion naturelle $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\Omega) \subset \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\Omega')$. ■

5.1.2 Cas d'un opérateur de $\Psi_k(G)$

Donnons-nous à présent $\tilde{P}$ un G-opérateur pseudo-différentiel ; comme nous l'avons vu précédemment, $\tilde{P}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire d'opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux P_i sur des ouverts trivialisants Ω_i et d'un opérateur régularisant R.

Définition 5.1.6 — On appelle alors *résidu de Wodzicki de l'opérateur* $\tilde{P}$ le nombre

$$\mathsf{Res}(\tilde{P}) = \sum_{i\in I} \mathsf{Res}(P_i)$$

où le symbole Res dans le membre de droite est le résidu défini dans la section précédente. Si R est un opérateur régularisant, on pose $\mathsf{Res}\,(R) = 0$.

Montrons à présent que cette définition est cohérente, à savoir qu'elle ne dépend pas de la combinaison linéaire considérée. Supposons donc que l'on peut écrire :

$$\tilde{P} = \sum_{i\in I} P_i + R = \sum_{j\in J} Q_j + R'.$$

Dans cette formule, les P_i et les Q_j désignent respectivement des opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux définis sur des ouverts trivialisants Ω_i et Ω'_j, et R et R' des opérateurs régularisants. On peut supposer sans perte de généralité que les ouverts Ω_i et Ω_j forment deux recouvrements de la variété M, quitte à rajouter des ouverts dans ces ensembles. Munissons M d'une métrique, appelons ε le plus petit des nombres de Lebesgue de ces recouvrements et considérons un troisième recouvrement formé par des boules ouvertes B_k de rayon $\varepsilon/4$. Appelons $(\varphi_k)_{k\in K}$ une partition de l'unité adaptée au recouvrement de $G^{(0)}$ par les B_k. Pour tout G-opérateur pseudo-différentiel P, on sait qu'à un opérateur régularisant à support compact près, $M_{\varphi_k}P$ est un opérateur pseudo-différentiel de $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(B'_k)$, où B'_k est la boule ouverte de même centre que B_k et de rayon $\varepsilon/2$, qui est un ouvert trivialisant contenu dans un ouvert de chacun des deux atlas.

Il est évident, d'après la définition, que pour des opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux définis sur un même ouvert trivialisant le résidu est linéaire. En utilisant cette propriété, et le fait que le résidu d'un opérateur régularisant est nul, on voit immédiatement que

$$\sum_i \mathrm{Res}(P_i) = \sum_i \mathrm{Res}(\sum_k M_{\varphi_k} P_i) = \sum_{i,k} \mathrm{Res}(M_{\varphi_k} P_i).$$

On a la même formule pour les Q_j et on voit donc que :

$$\begin{aligned}
&\sum_i \mathrm{Res}(P_i) - \sum_j \mathrm{Res}(Q_j) \\
&= \sum_{i,k} \mathrm{Res}(M_{\varphi_k} P_i) - \sum_{j,k} \mathrm{Res}(M_{\varphi_k} Q_j) \\
&= \sum_k \left(\sum_i \mathrm{Res}(M_{\varphi_k} P_i) - \sum_j \mathrm{Res}(M_{\varphi_k} Q_j) \right) = \sum_k \mathrm{Res}(M_{\varphi_k}(\sum_i P_i - \sum_j Q_j)) \\
&= \sum_k \mathrm{Res}(M_{\varphi_k}(R - R')) = 0.
\end{aligned}$$

On démontre ainsi la cohérence de la définition précédente.

5.2 Développement asymptotique du noyau au voisinage de la diagonale

Comme dans le cas classique, nous pouvons relier le résidu feuilleté au développement asymptotique du noyau au voisinage de $G^{(0)}$. Nous savons que localement le noyau d'un G-opérateur pseudo-différentiel est donné, à un opérateur régularisant près, par le noyau d'un opérateur longitudinal local à support compact. Donnons-nous un ouvert trivialisant pour le feuilletage $\Omega \simeq L \times T$ et un opérateur pseudo-différentiel $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\Omega)$. Son noyau est, pour tout $t \in T$, le noyau d'un opérateur pseudo-différentiel classique à support compact dans $L \times \{t\}$. D'après la proposition (2.3.5) nous savons qu'il existe un développement asymptotique au voisinage de la diagonale $l' = l$ pour chaque opérateur P_t de la forme

$$k(l, l', t) = \sum_{j=0}^{r} a_{j-m-p}(l, t, l - l') - c_{P_t}(l) \log |l - l'| + R(l, l', t),$$

où les fonctions a_{j-m-p} sont des fonctions $C^{\infty,k}(L \times T \times (\mathbb{R}^p - \{0\}))$ positivement homogènes de degré $j - m - p$ en la troisième variable. La fonction $c_P(l, t) = c_{P_t}(l)$ est une fonction de $C^{\infty,k}$ sur $L \times T$ donnée par :

$$c_{P_t}(l) = \int_{S^{p-1}} \sigma_{-p}(l, \xi, t) \, |d\xi| \, ,$$

avec σ_{-p} le symbole d'ordre $-p$ de P_t. La fonction $R(l, l', t)$ est une fonction $C^{\infty,k}$ sur $(L \times L) \times T$ en dehors de la diagonale $\Delta_L \times T$ où elle est continue. Ceci démontre la proposition suivante.

Proposition 5.2.1 — Le noyau d'un opérateur pseudo-différentiel $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}^m}(\Omega)$ admet, pour un ouvert trivialisant donné $\Omega \simeq L \times T$, un développement asymptotique dans $G^{(0)}(\Omega) \simeq \Delta_L$ de la forme (en conservant les notations précédentes) :

$$k(l, l', t) = \sum_{j=0}^{r} a_{j-m-p}(l, t, l - l') - c_P(l, t) \log |l - l'| + R(l, l', t).$$

On a, de plus, l'égalité

$$\int_{t \in T} \int_{l \in L} c_P(l, t) d\lambda(l) d\mu(t) = \mathsf{Res}\,(P).$$

Démontrons maintenant que ce coefficient logarithmique $c_P(l,t)$ permet de définir une 1-densité sur le fibré tangent au feuilletage. Autrement dit, montrons que le coefficient logarithmique de l'expansion asymptotique précédente ne dépend pas de la carte locale choisie pour l'écrire. Donnons-nous deux ouverts trivialisants $\Omega_1 \simeq L_1 \times T_1$ et $\Omega_2 \simeq L_2 \times T_2$ d'intersection non nulle, et $\Omega \simeq L \times T$ un ouvert trivialisant tel que $\Omega \lhd \Omega_1$ et $\Omega \lhd \Omega_2$. Nous savons que, dans chaque ouvert $G(\Omega_1) \simeq L_1 \times L_1 \times T_1$ et $G(\Omega_2) \simeq L_2 \times L_2 \times T_2$, le noyau k de l'opérateur P admet deux expansions asymptotiques

$$k^{(1)}(l_1,l'_1,t_1) = \sum_{j=0}^{r} a^{(1)}_{j-m-p}(l_1,t_1,l_1-l'_1) - c^{(1)}_P(l_1,t_1)\log\left|l_1-l'_1\right| + R^{(1)}(l_1,l'_1,t_1)$$

et

$$k^{(2)}(l_2,l'_2,t_2) = \sum_{j=0}^{r} a^{(2)}_{j-m-p}(l_2,t_2,l_2-l'_2) - c^{(2)}_P(l_2,t_2)\log\left|l_2-l'_2\right| + R^{(2)}(l_2,l'_2,t_2).$$

De plus, le difféomorphisme sur $L \times L \times T$ défini par le changement de cartes de $G(\Omega_1)$ vers $G(\Omega_2)$ s'écrit sous la forme

$$\phi(l,l',t) \longmapsto (l_2,l'_2,t_2) = (\psi(l,t),\psi(l',t),\Gamma(t)).$$

Si on désigne par $|J_{l,t}|$ le jacobien associé, pour l et t constants, à ψ, on sait qu'on doit avoir

$$k^{(1)}(l,l',t) = |J_{l,t}|\,(l')k^{(2)}(\psi(l,t),\psi(l',t),\Gamma(t)).$$

En effet, pour l et t constants, les noyaux $k^{(1)}$ et $k^{(2)}$ définissent le même opérateur pseudo-différentiel sur $L \times \{t\}$: si $f \in C^\infty_c(L)$, on a

$$(P_t f)(l) = \int_{l' \in L} k^{(1)}(l,l',t)f(l') = (P_{\Gamma(t)}f)(\psi(l,t)) = \int_{l'_2 \in L} k^{(2)}(l_2,l'_2,t_2)f(l'_2)$$

et les noyaux distributionnels $k^{(1)}$ et $k^{(2)}$ définissent donc la même densité.

Proposition 5.2.2 — Le coefficient logarithmique $c_P(x)$ définit une 1-densité sur le feuilletage. Avec les notations précédentes, on a :

$$c^{(1)}_P(l,t) = |J_{l,t}|\,(l')c^{(2)}_P(\psi(l,t),\Gamma(t)).$$

Démonstration— Comme dans le cas classique, on peut, pour tout j, écrire $a^{(2)}_{j-m-p}(l_2,t_2,l_2-l'_2)$ sous la forme

$$a^{(2)}_{j-m-p}(l_2,t_2,l_2-l'_2) = a^{(2)}_{j-m-p}(\psi(l,t),\Gamma(t),\psi(l,t)-\psi'(l',t)).$$

Nous savons que $a^{(2)}_{j-m-p}$ est positivement homogène de degré $j-m-p$ en la dernière variable. Alors, lorsque $|l'_2-l_2| \to 0$, on obtient :

$$a^{(2)}_{j-m-p}(l_2,t_2,l_2-l'_2) = \left|l-l'\right|^{j-m-p} P_j(l,l')a^{(2)}_{j-m-p}(l_2,t_2,\frac{l_2-l'_2}{|l_2-l'_2|}),$$

avec $P_j(l,l')$ une expression polynomiale en $|l-l'|$ au voisinage d'un point (l,t) donné. Ainsi, ces termes ne contribuent pas au terme logarithmique. Le terme $R^{(2)}(l_2,l'_2,t_2)$ est borné sur $L_2\times L_2\times T_2$ et ne contribue pas au terme logarithmique. Il reste donc à étudier le terme $c_P^{(2)}(l_2,t_2)\log|l_2-l'_2|$. Or on a

$$\log\left|l_2-l'_2\right| = \log\left|l-l'\right| + \log\left(\frac{\psi'(l',t)-\psi(l,t)}{|l-l'|}\right).$$

Nous savons que le second terme du second membre de l'égalité est borné, et on obtient donc

$$|J_{l,t}|\,(l')c_P^{(2)}(\psi(l,t),\Gamma(t)) = c_P^{(1)}(l,t).$$

■

Ceci nous permet de décrire la situation de manière globale pour le noyau de P. Appelons F l'espace total du fibré tangent au feuilletage. Donnons-nous un difféomorphisme Ψ d'un ouvert U de F contenant M vers un ouvert V de G contenant $G^{(0)}=M$ qui vaut l'identité sur M (le point $(x,0)$ est envoyé sur le lacet nul au point x), dont l'image d'un point (x,ξ) est un chemin tracé sur la feuille passant par x (i.e. $r(\Psi(x,\xi))\mathcal{R}x$ et $s(\Psi(x,\xi))\mathcal{R}x$), et tel que la restriction de sa différentielle en un point de $G^{(0)}$ à la composante normale à $G^{(0)}$ en un point x est l'identité (on identifie $T_xG/T_xG^{(0)}$ et F_x). Le difféomorphisme est donc, dans tout ouvert trivialisant pour le feuilletage $\Omega\simeq L\times T$, de la forme :

$$\Psi(l,t,\xi) = (f_1(l,t,\xi), f_2(l,t,\xi), t)$$

avec $f_1(l,t,0)=f_2(l,t,0)=l$ et $f_1(l,t,\xi)-f_2(l,t,\xi)=\xi+o(\xi)$.

La forme locale de la proposition 5.2.1 et la formule précédente de transformation du coefficient logarithmique sous l'action d'un difféomorphisme montre que l'on a la propriété globale suivante :

Proposition 5.2.3 —

1. On peut écrire $k(\Psi^{-1}(\gamma))$ sous la forme :

$$k(x,\xi) = \sum_{j=0}^{r} a_{j-m-p}(x,\xi) - c_P(x)\log|\xi| + R(x,\xi),$$

avec les notations suivantes : les a_{j-m-p} sont des sections du fibré positivement homogènes de degré $j-m-p$ en la seconde variable, la fonction $R(\Psi^{-1}(\gamma))$ est une fonction continue sur U, et la fonction $x\to c_P(x)$ est une fonction $C^{\infty,k}$ sur M.

2. Le coefficient $c_P(x)$ définit une 1-densité $\mathrm{res}_x(P)$ sur le feuilletage qui est localement donnée par $\mathrm{res}_x(P)=c_P(x)d\lambda(l)$, avec $d\lambda(l)$ la forme volume locale dans les feuilles provenant de la mesure de Haar λ^x.

5.3 Le résidu de Wozicki est un résidu !

Commençons par donner la définition d'une famille holomorphe d'opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux, en utilisant la définition de famille holomorphe d'opérateurs longitudinaux à support compact dans un ouvert trivialisant que nous avons vue au chapitre précédent (4.1.4).

Définition 5.3.4 —

- On dit qu'une famille $(R(z))_{z\in\mathcal{D}}$ d'opérateurs régularisants est holomorphe sur $\mathcal{D}$ si pour tout élément $z_0 \in \mathcal{D}$ il existe un opérateur régularisant $R'(z_0)$ tel que, pour tous nombres réels s et t,
$$\left\| \frac{1}{z-z_0}[R(z)-R(z_0)] - R'(z_0) \right\|_{s,t} \longrightarrow_{z\to z_0} 0.$$
- Soit $z \mapsto m(z)$ une fonction holomorphe de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$. On dit qu'une famille $z \mapsto P(z)$ est une famille holomorphe d'ordre $m(z)$ sur $\mathcal{D}$, et on note $P(z) \in \Psi^m_{\mathsf{hol},k}(G, mathcalD)$, si la famille $P(z) \in \Psi^{m(z)}_k(G)$ est une famille d'opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux de classe C^k qui est combinaison linéaire (à coefficients constants)
$$P(z) = \sum P_i(z) + R(z)$$
de familles d'opérateurs pseudo-différentiels holomorphes d'ordre $m(z)$
$$P_i(z) \in \mathbb{P}^m_{\mathcal{F},k}(\Omega_i, \mathcal{D})$$
à support compact dans des ouverts trivialisants Ω_i et d'une famille holomorphe $R(z)$ d'opérateurs régularisants.

Munis de cette définition, nous allons montrer un analogue du théorème 2.3, page 65, en nous appuyant sur celui-ci pour notre démonstration.

Théorème 5.1 — Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété compacte feuilletée, munie d'une mesure transverse invariante μ, et de groupoïde d'holonomie G.

1. La fonctionnelle $P \mapsto \mathsf{Tr}(P)$ est holomorphe sur $\Psi^{tr}(G)$ et admet un unique prolongement analytique TR sur $\Psi^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(G)$.
2. Soit $z \mapsto P(z)$ une famille holomorphe d'opérateurs longitudinaux, de $\mathbb{C}$ dans $\Psi_k(G)$ telle que l'ordre de $P(z)$ vaut z. La fonction $z \mapsto \mathsf{TR}(P(z))$ est alors méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec au plus des pôles simples sur $\mathbb{Z}$. En ces points k_0, le résidu est donné par l'opposé du résidu de Wodzicki feuilleté de l'opérateur $P(k_0)$:
$$\mathsf{res}_{z=k_0}\, \mathsf{TR}(P(z)) = -\,\mathsf{Res}\,(P(k_0)).$$

Démonstration—

1. L'inégalité 3 de la proposition (4.2.8) montre que la trace est une fonctionnelle holomorphe sur l'ensemble des opérateurs régularisants. Il suffit donc de nous limiter au cas des opérateurs longitudinaux à support compact dans un ouvert trivialisant. Donnons-nous un tel ouvert $\Omega \simeq L \times T$ et un opérateur $P = P_t \in \mathcal{P}^{tr}_{\mathcal{F}}(\Omega)$. Nous avons vu dans la proposition 4.2.8 qu'un tel opérateur était à trace et que sa trace était donnée par la formule :
$$\mathrm{Tr}(P) = \int_{t\in T}\int_{l\in L} k(l,l,t)d\lambda(l)d\mu(t) = \int_{t\in T} \mathrm{Tr}(P_t)d\mu(t),$$
où $k(l,l',t)$ désigne le noyau de P_t, et où $\mathrm{Tr}(P_t)$ désigne la trace ordinaire de l'opérateur pseudo-différentiel P_t. Donnons-nous à présent une famille holomorphe $P(z) \in$

$\mathbb{P}_{\mathcal{F}}^{m(z)}(\Omega,\mathcal{D})$ de degré une fonction holomorphe $m(z)$ telle que $\Re e\, m(z) < -p$. La trace de $P(z)$ est donnée par

$$\mathrm{Tr}(P(z)) = \int_{t\in T} \mathrm{Tr}(P_t(z))d\mu(t).$$

Il est clair que la définition 4.1.4 de l'holomorphie pour la famille $P(z)$ implique que chaque famille $z \mapsto P_t(z)$ est holomorphe au sens de la définition (2.3.1). Ainsi, la fonctionnelle Tr est bien une fonctionnelle holomorphe sur $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{tr}(\Omega)$.
Par la même remarque que dans le cas ordinaire, si un prolongement analytique de cette fonctionnelle existe sur $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(\Omega)$, il est nécessairement unique. En effet, nous savons qu'il existe une famille holomorphe $B(z)$ d'opérateurs pseudo-différentiels telle que

$$(1+\Delta)^{z/2} = B(z) + R(z),$$

avec $R(z)$ une famille holomorphe d'opérateurs régularisants. Si $B_{|\Omega}(-z)$ désigne l'opérateur $\psi B(-z)\phi$, avec ψ et ϕ des applications $C^{\infty,k}$ à support compact dans Ω, alors l'application $z \mapsto PB_{|\Omega}(-z)$ est holomorphe et connecte $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{tr}(\Omega)$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(\Omega)$.
Nous pouvons maintenant appliquer le théorème 2.3, page 65 à chaque famille $P_t(z)$. Il existe un unique prolongement analytique TR pour la trace ordinaire pour les opérateurs $P_t \in \mathcal{P}^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(L\times\{t\})$, donné par

$$\mathrm{TR}(P_t) = (2\pi)^{-p}\int_L \langle \tau(l,t),\, 1\rangle d\lambda(l) \text{ avec } \tau(l) = \sigma(l,\xi,t) - \sum_{j=0}^{l} \tau_{m-j}(l,t),$$

où les $\tau_{m-j}(l,t))$ sont les distributions positivement homogènes de degré $m-j$ en ξ prolongeant respectivement les parties σ_{m-j} homogènes de même degré du symbole σ. La régularité du symbole $\sigma(l,\xi,t)$ par rapport à l et t implique que les applications $(l,t) \mapsto \tau_{m-j}(l,t)$ sont de classe $C^{\infty,k}$ de $L\times T$ dans $\mathcal{S}'$.
Ainsi l'application $t \mapsto TR(P_t)$ est de classe C^k, et donc intégrable. La fonctionnelle définie par $TR(P) = \int_{t\in T} TR(P_t)d\mu(t)$ est donc bien l'unique prolongement analytique de Tr sur $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(\Omega)$.

2. Etudions à présent la singularité de $\mathrm{TR}(P(z))$ au voisinage de $z=k_0$ pour une fonction $z\mapsto P(z)$ avec $P(z)$ d'ordre z. Plaçons-nous sur le demi-plan $\{k_0 < \Re e\, z\}$. On sait que pour chaque famille $P_t(z)$ la fonction $z\mapsto \mathrm{TR}(P_t(z))$ admet au plus un pôle simple en $z=k_0$ dont le résidu est donné par $\mathrm{Res}_{z=k_0}\ \mathrm{TR}(P_t(z)) = -\,\mathrm{Res}\,(P_t(k_0))$. Cette limite est de plus uniforme par rapport à la composante transverse : pour tout compact $K\subset T$ on a

$$\lim_{z\to k_0}\left(\sup_{t\in K}\{(z-k_0)\,\mathrm{TR}(P_t(z)) + \,\mathrm{Res}\,(P_t(k_0))\}\right) = 0.$$

On obtient donc bien pour la fonction $z\mapsto \mathrm{TR}(P(z))$ au plus un pôle simple au point $k_0\in\mathbb{Z}$, dont le résidu est donné par

$$\mathrm{res}_{z=k_0}\,\mathrm{TR}(P(z)) = -\,\mathrm{Res}\,(P(k_0)).$$

■

On déduit immédiatement de ce théorème et du théorème 4.1, page 109 le théorème suivant, analogue du théorème 2.8, page 82.

Théorème 5.2 — Soient A un opérateur longitudinal différentiel elliptique positif et inversible d'ordre m sur le feuilletage mesuré $(M, \mathcal{F}, \lambda, \mu)$ et P un opérateur pseudo-différentiel longitudinal d'ordre r. La fonction $s \mapsto \mathsf{TR}(PA^{-s})$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec au plus des pôles simples aux points de la forme $s_j = \frac{j-r-p}{m}$, $j \in \mathbb{N}$ et des résidus donnés par

$$\mathsf{res}_{s=s_j} \mathsf{TR}(PA^{-s}) = \frac{1}{m} \mathsf{Res}\,(PA^{-s_j}).$$

En particulier cette fonction n'a éventuellement un résidu en 0 que dans le cas où r est un entier supérieur ou égal à $-p$, et ce résidu est alors donné par

$$\mathsf{res}_{s=0} \mathsf{TR}(PA^{-s}) = \frac{1}{m} \mathsf{Res}\,(P).$$

5.4 Résidu Non-Commutatif, fonction ζ et développement du noyau de la chaleur

Dans cette section, nous étudions, comme dans le cas classique, les liens entre le résidu de Wodzicki, la fonction ζ d'un opérateur A et le développement du noyau de l'opérateur de la chaleur e^{-tA}. Nous n'étudions ici la fonction ζ_A et l'opérateur de la chaleur e^{-tA} que pour un opérateur différentiel longitudinal A positif, elliptique et inversible, car c'est le cadre dans lequel nous avons développé les puissances complexes. Comme nous l'avons déja noté, en utilisant un cadre plus général, comme celui fourni par le calcul pseudo-différentiel faiblement paramétrique de Grubb et Seeley [GS95], ou les calculs directs de Kordyukov [Kor95], il est possible de définir les puissances complexes d'opérateurs pseudo-différentiels elliptiques si ceux-ci vérifient certaines conditions. Les résultats exposés ici peuvent alors être généralisés grâce à ces calculs plus élaborés. Notons encore que nous avons systématiquement omis dans cette section de mentionner la classe de régularité transverse des opérateurs pseudo-différentiels, car les propriétés que nous démontrons n'en dépendent pas.

5.4.1 La fonction ζ

En appliquant le théorème 2.8, page 82 à l'opérateur $A = I$, on peut trouver un analogue du théorème de Seeley [See67].

Théorème 5.3 — Soit A un opérateur longitudinal différentiel elliptique positif et inversible d'ordre m sur le feuilletage mesuré $(M, \mathcal{F}, \lambda, \mu)$. La fonction $\zeta_A(s)$ définie pour $\Re e\, ms > n$ par

$$\zeta_A(s) = \mathsf{Tr}(A^{-s})$$

s'étend alors en une fonction méromorphe avec au plus des pôles simples situés aux points de la forme $s_j = \frac{j-p}{m}$, pour $j \in \mathbb{N}$, et des résidus qui sont de la forme

$$\mathsf{res}_{s=s_j} \zeta_A(s) = \frac{1}{m} \mathsf{Res}\,(A^{\frac{p-j}{m}}).$$

En particulier la fonction ζ_A est en fait holomorphe au voisinage des points entiers $s_j = l$ (i.e. $j = p - lm$) pour les entiers $l \in [0, p]$.

5.4.2 Développement du noyau de l'opérateur de la chaleur et résidu de Wodzicki feuilleté

Nous pouvons également relier le résidu de Wodzicki feuilleté au noyau de l'opérateur de la chaleur e^{-tA} si A est un opérateur différentiel longitudinal positif, elliptique et inversible. Pour $t > 0$ l'opérateur e^{-tA} peut être défini par le calcul fonctionnel sur les opérateurs réguliers du théorème B.2, page 149. La fonction $x \mapsto e^{-tx}$ étant bornée sur $\mathbb{R}_+$, l'opérateur ainsi défini est un morphisme de $C_r^*(M, \mathcal{F})$. Les fonctions $x \mapsto x^j e^{-tx}$ étant bornées sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $j > 0$, cet opérateur est dans le domaine de A^j pour tout $j > 0$. En particulier, en écrivant $e^{-tA} = A^{-j} A^j e^{-tA}$, il est clair que cet opérateur est à trace. Comme dans le cas classique, il est solution de l'équation de la chaleur généralisée : $\partial_t - A = 0$. L'identité

$$A^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-tA} dt$$

montre que la transformée de Mellin de $\mathrm{Tr}(e^{-tA})$ en s vaut $\Gamma(s)\zeta_A(s)$. D'après ce qui précède, cette fonction $\Gamma(s)\zeta_A(s)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles donnés. Or on sait que la transformée de Mellin $\mathcal{M}f(s) = \int_0^\infty t^{s-1} f(t) dt$ d'une fonction C^∞ sur $]0, +\infty[$ est une fonction méromorphe avec un pôle d'ordre $k+1$ au point s_0 si et seulement si la fonction f admet un terme de la forme

$$t^{-s_0} (\ln t)^k$$

dans son développement asymptotique lorsque $t \to 0$. En utilisant la transformée de Mellin inverse et le fait que les pôles de Γ sont simples et situés aux points entiers négatifs, nous pouvons, comme dans le cas classique, donner un développement asymptotique de $\mathrm{Tr}(e^{-tA})$.

Théorème 5.4 — La fonction $\mathrm{Tr}(e^{-tA})$ admet un développement asymptotique, lorsque $t \to 0$, de la forme :

$$\mathrm{Tr}(e^{-tA}) \sim \alpha_n(A) + \sum_{n \neq j = 0}^{\infty} \alpha_j(A) t^{\frac{j-n}{m}} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(A) t^k \ln t.$$

Notons que dans cette formule, les $\beta_k(A)$ sont nuls si $m \notin \mathbb{N}$. Notons encore que le terme $\beta_0(A) \ln t$ est nul car ζ_A est holomorphe au voisinage de 0. Pour la même raison, les termes $\beta_k(A) t^k \ln t$ sont nuls car A est un opérateur différentiel. En effet, on a la formule suivante pour les $\beta_k(A)$:

$$\beta_k(A) = \operatorname{res}_{s=-k} \Gamma(s) \operatorname{res}_{s=-k} \zeta_A(s) = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \operatorname{res}_{s=-k} \zeta_A(s).$$

Ceci nous donne une autre égalité vérifiée par le résidu de Wodzicki : on obtient

$$\mathrm{Res}\,(A) = m\beta_1(A).$$

On peut, de même que précédemment, utiliser cette formule pour définir le résidu de Wodzicki d'un opérateur pseudo-différentiel, en posant :

$$\mathrm{Res}\,(P) = m \frac{d}{du} (\beta_1(A + uP))_{|u=0}.$$

Cela revient à chercher un développement asymptotique pour $\mathrm{Tr}(Pe^{-tA})$, que l'on peut retrouver directement grâce à l'étude que nous avons faite sur $\mathrm{TR}(PA^{-s})$. En utilisant la même propriété sur la transformation de Mellin inverse, et les mêmes propriétés sur Γ, on obtient en effet un développement asymptotique, lorsque $t \to 0$, de la forme

$$\mathrm{Tr}(Pe^{-tA}) \sim \alpha_n(P, A) + \sum_{n \neq j=0}^{\infty} \alpha_j(A) t^{\frac{j-n-r}{m}} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(A, P) t^k \ln t.$$

Dans ce développement asymptotique, le coefficient $\beta_k(A, P)$ de $\ln t$ est donné par :

$$\beta_0(A, P) = \mathrm{res}_{\,s=0} \Gamma(s) \, \mathrm{res}_{\,s=0} \, \mathrm{TR}(PA^{-s}) = \frac{1}{m} \, \mathrm{Res}\,(P),$$

ce qui nous donne encore une autre définition possible pour le résidu de Wodzicki.

5.5 Le résidu de Wodzicki est une trace sur $\Psi^{\mathbb{Z}}(G)$.

5.5.1 Propriété traciale du résidu de Wodzicki

En reprenant la démonstration du chapitre 2, nous pouvons montrer de manière identique la proposition suivante :

Proposition 5.5.1 — Le résidu de Wodzicki définit une trace sur l'algèbre $\Psi^{\mathbb{Z}}(G)$ des opérateurs longitudinaux à coefficients entiers.

Démonstration— Donnons-nous deux opérateurs P_1 et P_2 dont la somme des ordres est un entier r. Comme pour $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{TR}(P_1 P_2 (1 + \Delta)^{-z}) = \mathrm{TR}(P_2 (1 + \Delta)^{-z} P_1)$, les résidus en 0 de ces fonctions sont égaux, et donc $\mathrm{Res}\,(P_1 P_2) = \mathrm{Res}\,(P_2 P_1)$. ∎

5.5.2 Résidu non commutatif, traces et commutateurs

Nous avons vu dans le cas d'une variété compacte que le résidu de Wodzicki définissait l'unique trace (à un scalaire près) existant sur $\mathcal{P}^{\mathbb{Z}}$, l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre entier. Dans le cas des feuilletages, ceci n'est en général plus vrai, mais nous allons voir que la donnée d'une trace τ sur l'algèbre $\Psi^{\mathbb{Z}}_{\infty}(G)$ nulle sur les opérateurs régularisants est en fait équivalente à la donnée d'un courant C_τ de dimension p agissant dans le sens des feuilles. On obtient ainsi, en général, une distribution transverse invariante par holonomie δ_τ, telle que pour tout opérateur longitudinal P :

$$\tau(P) = \langle \mathrm{Res}\,(P_t), \, \delta_\tau \rangle.$$

Théorème 5.5 — Il est équivalent de se donner

1. une trace sur l'algèbre $\Psi^{\mathbb{Z}}_{\infty}(G)$ nulle sur $\Psi^{-\infty}(G)$,
2. une distribution transverse invariante par holonomie,
3. un courant fermé feuilleté.

Ce résultat rejoint un résultat très récent démontré par Benameur et Nistor par des méthodes homologiques ([BN01])

Démonstration— Nous avons déja vu que les points 2) et 3) étaient équivalents (1.4.4).

Donnons-nous un recouvrement régulier du feuilletage. Plaçons-nous dans un ouvert trivialisant $\Omega \simeq L \times T$, et donnons-nous un symbole dépendant d'un paramètre σ auquel correspond un opérateur pseudo-différentiel $P = (P_t)_{t \in T}$. En reprenant la démonstration de l'unicité dans le cas classique et en ajoutant un paramètre, dans les lemmes 2.3.9 et 2.3.10, on montre que seule la partie homogène de degré $-p$ du symbole contribue dans le calcul de la trace, le reste du symbole s'exprimant comme une somme de commutateurs de symboles. On montre également de la même manière que $\tau(\sigma) = \tau(\overline{\sigma_{-p}}\,|\xi|^{-p})$, avec

$$\overline{\sigma_{-p}}(l,t) = \int_{S^{p-1}} \sigma_{-p}(l,\xi,t)\,|d\xi|\,.$$

Ainsi la trace τ peut être identifiée à une distribution sur $L \times T$. Nous allons montrer que cette distribution est bien déterminée dans le sens des feuilles (sur la coordonnée $l \in L$).

Lemme 5.5.2 — Si $\int_L \overline{\sigma_{-p}}(l,t)d\lambda(l) = 0$, alors $\tau(\sigma) = 0$.

Démonstration du lemme Il suffit de montrer que si $\int_L \overline{\sigma_{-p}}(l,t)d\lambda(l) = 0$, alors $\overline{\sigma_{-p}}(l,t)$ s'exprime comme somme de dérivées partielles par rapport à des coordonnées dans L. En effet, nous avons vu dans la démonstration de l'unicité de la trace , dans le cas classique, que les dérivées partielles par rapport aux coordonnées dans L s'exprimaient sous forme de commutateurs. Ainsi leur trace est nulle. Cela signifie alors que $\overline{\sigma_{-p}}(l,t)$ s'écrit comme sommes de commutateurs dans l'algèbre des symboles d'ordre entier, et donc que sa trace est nulle. Le fait qu'une fonction C^∞ à support compact d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}^n$ soit nulle ou bien s'écrive comme somme de dérivées partielles se démontre très simplement, en vérifiant cela sur $\mathbb{R}$, puis en utilisant une récurrence et le théorème de Fubini. ⊟

Pour une fonction ϕ positive lisse à support compact sur L et qui vaut 1 au voisinage du support de $\overline{\sigma_{-p}}(l,t)$, on a alors :

$$\tau(\overline{\sigma_{-p}}(l,t)\,|\xi|^{-p}) = \frac{1}{\int_L \phi(u)d\lambda(u)}\tau(\int_L \overline{\sigma_{-p}}(u,t)d\lambda(u)\,|\xi|^{-p}\,\phi(l)) = \tau(\,\mathrm{Res}\,(P_t)\frac{\phi(l)}{\int_L \phi(u)d\lambda(u)}\,|\xi|^{-p}).$$

La trace τ définit donc en fait, sur les opérateurs à support dans l'ouvert trivialisant, une forme linéaire sur les fonctions lisses à support compact sur T, c'est-à-dire une distribution transverse. Pour voir cela, il suffit de montrer que la famille des fonctions $\mathrm{Res}\,(P_t)$, pour P_t parcourant les familles lisses d'opérateurs longitudinaux à support compact dans Ω, engendre $C_c^\infty(T)$. Or on peut choisir une famille d'opérateurs de la forme $P_t = P_0 f(t)$, avec P_0 un opérateur pseudo-différentiel à support compact sur L, de résidu non nul, et $f(t)$ une fonction lisse quelconque à support compact sur T. Dans ce cas, $\mathrm{Res}\,(P_t) = f(t)\,\mathrm{res}\,(P_0)$, ce qui démontre la propriété requise. Nous voyons donc qu'il est équivalent de se donner une trace sur les symboles longitudinaux d'ordre entier transversalement lisses dans l'ouvert Ω ou une distribution transverse sur T. Pour montrer que cette distribution transverse est invariante par holonomie, nous avons vu au chapitre 1 qu'il suffisait de le faire pour un recouvrement régulier donné. Il suffit donc de montrer que les restrictions des distributions δ et δ' sur les transversales locales T et T' de deux ouverts trivialisants Ω et Ω' coïncident sur la transversale locale de l'ouvert $\Omega \cap \Omega'$. Or il est clair que la trace ne dépend pas de l'ouvert trivialisant choisi pour exprimer l'opérateur. Cette propriété est donc immédiatement vérifiée. ∎

Remarques

1. Le résultat nous permet aussi de comprendre la situation dans les cas où la régularité transverse imposée aux opérateurs est moins grande. Si nous prenons $k < +\infty$, il faut imposer à la distribution transverse invariante que celle-ci s'étende aux fonctions de classe C^k. En particulier, dans le cas $k = 0$, les seules distributions transverses sont les mesures transverses invariantes. Moore et Schochet rappellent dans [MS88] la correspondance entre l'espace des mesures transverses invariantes et la cohomologie de degré p du feuilletage. Dans le cas des feuilletages n'admettant qu'une mesure transverse invariante, on retrouve exactement le même résultat que dans le cas classique.
2. Remarquons que dans le cas des feuilletages, il n'est plus nécessairement vrai qu'une trace définie sur l'algèbre des opérateurs régularisants à support non compact soit proportionnelle à la trace ordinaire. Ainsi nous devons supposer que la trace est nulle sur les opérateurs régularisants pour trouver le résultat précédent.

5.5.3 Résidus non commutatifs et distributions transverses

Le théorème 5.5, page 130 nous permet d'associer, plus généralement, un "résidu non commutatif" à une distribution transverse (ou, de manière équivalente, à un courant fermé feuilleté). Si δ est une distribution transverse invariante par holonomie sur les fonctions transverses de classe C^∞ s'étendant aux fonctions de classe C^k, nous pouvons, comme ci-dessus, définir une trace Res_δ sur $\Psi_k(G)$. Il suffit de définir cette trace sur les opérateurs longitudinaux de classe C^k à support compact dans des ouverts trivialisants. Si $\Omega \simeq L \times T$ est un tel ouvert, on pose alors, pour $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{F},k}(\Omega)$,

$$\mathrm{Res}_\delta(P) = \langle \delta,\ \mathrm{Res}\,(P_t) \rangle.$$

On retrouve dans ce cas, en reprenant les démonstrations précédentes, certaines des propriétés du résidu non commutatif que nous avons défini à l'aide d'une mesure transverse :

- cette trace Res_δ possède bien évidemment la propriété d'être localement défini par une densité sur le feuilletage ;
- il s'exprime également en termes du coefficient logarithmique dans l'expansion asymptotique du noyau de Schwartz de P au voisinage de la diagonale ;
- comme nous l'avons vérifié dans le paragraphe précédent, Res_δ définit une trace sur l'algèbre $\Psi_k^{\mathbb{Z}}(G)$;
- On peut définir une trace non positive τ_δ sur les opérateurs longitudinaux à support compact d'ordre de partie réelle $m_0 < -p$. Pour un opérateur P comme ci-dessus, cette trace est donnée par

  $$\tau_\delta(P) = \langle \delta,\ \mathrm{Tr}(P_t) \rangle$$

  avec Tr la trace ordinaire définie sur L muni de la mesure λ. On retrouve alors un analogue du théorème 2.3, page 65 :

  1. La fonctionnelle $P \mapsto \tau_\delta(P)$ est holomorphe sur $\mathcal{P}^{tr}_{\mathcal{F},k}(\Omega)$, pour Ω un ouvert trivialisant, et admet un unique prolongement analytique à $\mathcal{P}^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}_{\mathcal{F},k}(\Omega)$.

2. Si $P(z)$ est une famille holomorphe d'opérateurs à support compact dans un ouvert trivialisant, telle que $\mathrm{ord}(P(z)) = z$, alors l'application

$$z \mapsto \tau_\delta(P(z))$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$, avec au plus des pôles simples sur $\mathbb{Z}$. En ces points, le résidu éventuel est donné par

$$\mathrm{res}_{\,z=k_0} \tau_\delta(P(z)) = -\,\mathrm{Res}_{\,\delta}(P(k_0)).$$

Notons cependant que la trace définie précédemment ne pouvant pas être étendue, a priori, en une trace positive sur $C_r^*(M,\mathcal{F})$, cette trace n'est pas nécessairement définie pour les opérateurs régularisants à support non compact. En particulier, les caractérisations en termes de résidu de $\tau_\delta(PA^{-s})$ ou de coefficients du développement asymptotique de l'opérateur Pe^{tA} ne peuvent pas être données en général.

5.5.4 Résidu non commutatif et Trace de Dixmier

Comme dans le cas classique, le résidu non commutatif s'interprète en termes de trace de Dixmier pour les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre critique (ici $-p$, avec p la dimension du feuilletage). La trace de Dixmier a été généralisée aux algèbres de von Neumann de type II_∞ par R. Prinzis [Pri95] (voir aussi [GI95]). Ces travaux sont repris dans le preprint de M. Benameur et T. Fack [BF01] : ils démontrent notamment une formule locale pour la trace de Dixmier sur un feuilletage, analogue au théorème de Connes (2.5, page 69).

Théorème 5.6 — [BF01] Soient $(M,\mathcal{F})$ un feuilletage de dimension p sur une variété compacte muni d'une mesure transverse invariante μ et P un opérateur pseudo-différentiel longitudinal d'ordre $-p$ agissant sur les sections d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ au-dessus de M. On désigne par σ_{-p} son symbole principal. On a alors :

1. l'opérateur P est dans l'idéal de Dixmier généralisé $L^{1,\infty}(W_\mu^*(M,\mathcal{F},E))$ associé à l'algèbre de von-Neumann $W_\mu^*(M,\mathcal{F},E)$ et à la trace définie par la mesure transverse μ ;
2. pour toute moyenne invariante ω, la trace de Dixmier de P est donnée par

$$\mathsf{Tr}_\omega(P) = \frac{1}{p}\int_{M/\mathcal{F}} \mathsf{Res}\,(P_t)d\mu(t).$$

On déduit immédiatement de ce théorème et de la définition du résidu non commutatif feuilleté le théorème suivant.

Théorème 5.7 — Soient $(M,\mathcal{F})$ un feuilletage de dimension p sur une variété compacte muni d'une mesure transverse invariante μ et P un opérateur pseudo-différentiel longitudinal d'ordre $-p$ agissant sur les sections d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ au-dessus de M. Alors on a

$$\mathsf{Tr}_\omega(P) = \frac{1}{p}\,\mathsf{Res}\,(P).$$

5.5.5 Résidu non commutatif et formule de l'indice local

Dans le preprint mentionné ci-dessus, M. Benameur et T. Fack définissent également un cadre approprié pour décrire les familles *mesurées* de géométries non commutatives, en étendant les triplets spectraux définis par Connes dans le cadre C*-algébrique au cadre des algèbres de von Neumann.

Rappelons que la première définition d'un *triplet spectral* donnée par Connes dans [Co94] est la donnée d'un triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, avec

- $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert
- $\mathcal{A}$ une sous-*-algèbre d'une C*-algèbre représentée sur $\mathcal{H}$,
- D un opérateur auto-adjoint non borné sur $\mathcal{H}$ à résolvante compacte

vérifiant certaines propriétés :

1. $\forall a \in \mathcal{A}$, a préserve le domaine de D et $[D, a]$ est borné ;
2. $\forall a \in \mathcal{A}$, les opérateurs a et $[D, a]$ sont dans l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(\delta^n)$ des domaines des puissances de la dérivation non bornée définie sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ par :
$$\delta(b) = [|D|, b],$$
avec $|D|$ le module de l'opérateur D dans la décomposition polaire $D = F|D|$.

Connes définit de plus [CL92, Co94] une notion de *dimension* pour une telle donnée d'une géométrie non commutative, en imposant une condition de décroissance asymptotique aux valeurs singulières de l'opérateur D^{-1}. Un triplet spectral est de dimension d lorsque les valeurs singulières de D^{-1} vérifient :

$$\mu_n(D^{-1}) = O(n^{-1/d}).$$

Cette condition revient à demander que l'opérateur D^{-d} soit dans l'idéal de la trace de Dixmier, et permet à Connes de faire de la trace de Dixmier un analogue non commutatif de l'intégration. Notons que dans le cas du triplet spectral défini pour une variété riemannienne compacte, cette dimension spectrale coïncide avec la dimension de la variété.

Cette construction a des applications importantes en physique, et pour le calcul des théorèmes d'indice. Dans [Co94], Connes explique notamment comment définir le caractère de Chern du triplet spectral comme la classe de cohomologie cyclique du cocycle cyclique défini par

$$\tau(a^0, a^1, \ldots, a^n) = \mathrm{Trace}(a^0[F, a^1] \ldots [F, a^n]),$$

où Trace désigne la trace ordinaire, les a^j sont quelconques dans $\mathcal{A}$ et $n > d - 1$ et n impair. Dans le cas pair, on utilise la supertrace au lieu de la trace, et la $\mathbb{Z}/2$-graduation γ sur $\mathcal{H}$; le cocycle cyclique est défini pour n pair et $n > d - 1$ par

$$\tau(a^0, a^1, \ldots, a^n) = \mathrm{Trace}(\gamma a^0[F, a^1] \ldots [F, a^n]).$$

Connes démontre dans [Co94] une formule locale pour la classe de cohomologie de Hochschild du cocycle τ. Il donne un cocycle de Hochschild possédant la même classe de cohomologie de Hochschild que celle de τ, et construit à l'aide de la trace de Dixmier.

Dans [BF01] M. Benameur et T. Fack reprennent l'ensemble de cette construction dans le cadre des algèbres de von Neumann de type II_∞. L'idée essentielle est de remplacer dans le cadre précédent l'algèbre $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs bornés munie de la trace ordinaire sur l'espace de Hilbert par une algèbre de von Neumann $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(H)$ fidèlement représentée dans un espace de Hilbert H, et munie d'une trace τ (positive) fidèle, normale et semi-finie. Dans ce formalisme, et à l'aide de la trace de Dixmier τ_ω définie précédemment, ils définissent de manière analogue un triplet spectral de von Neumann, et montrent un analogue du théorème précédent pour la cohomologie de Hochschild du cocycle cyclique dont la classe de cohomologie cyclique définit le caractère de Chern du triplet spectral de von Neumann.

Théorème 5.8 — [BF01] La classe de cohomologie de Hochschild du cocycle cyclique ϕ dont la classe de cohomologie cyclique définit le caractère de Chern du triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{M}, D)$ est donnée par la classe de cohomologie de Hochschild du cocycle de Hochschild φ défini par :

$$\varphi(a^0, a^1, \ldots, a^n) = \tau_\omega(a^0[D, a^1] \ldots [D, a^n] \, |D|^{-n})$$

dans le cas où la dimension est impaire, et par

$$\varphi(a^0, a^1, \ldots, a^n) = \tau_\omega(\gamma a^0[D, a^1] \ldots [D, a^n] \, |D|^{-n})$$

dans le cas où la dimension est paire.

Parmi les nombreux exemples de triplets spectraux de von Neumann, celui des feuilletages mesurés compacts est particulièrement intéressant. Dans ce cas, si nous notons $\mathcal{E}$ un fibré hermitien au-dessus du feuilletage, l'algèbre $\mathcal{A}$ est l'algèbre des fonctions C^∞ sur la variété base M, l'algèbre de von Neumann $\mathcal{M} = W^*(M, \mathcal{F}, \mathcal{E})$ est celle définie par Connes [Co79], munie de la trace que nous avons définie sur $C_r^*(M, \mathcal{F}, \mathcal{E})$ (qui s'étend à $W^*(M, \mathcal{F}, \mathcal{E})$) ; l'opérateur D est l'opérateur de Dirac généralisé associé à $\mathcal{E}$.

Cependant dans le cadre original des triplets spectraux classiques, la formule locale de calcul de l'indice donnée par la classe de cohomologie de Hochschild du cocycle de Hochschild φ ne permet pas de recouvrer la totalité de l'application d'indice. Ce problème difficile qui consiste à exprimer localement la classe de cohomologie cyclique du caractère de Chern a été résolu par Connes et Moscovici [CM95]. L'ingrédient essentiel de ce théorème d'indice local réside dans la définition d'une notion plus fine de la dimension spectrale d'un triplet spectral, qui est basée sur un analogue abstrait du résidu de Wodzicki : le résidu non commutatif.

Définition 5.5.3 — [CM95] Un triplet spectral a un *spectre de dimension discret* Sd, si $Sd \subset \mathbb{C}$ est discret, et si pour tout élément b de l'algèbre $\mathcal{B}$ engendrée par les $\delta^n(a)$ et les commutateurs $[D, a]$, $a \in \mathcal{A}$, la fonction

$$\zeta_b(z) = \mathrm{Trace}(b \, |D|^{-z})$$

s'étend holomorphiquement à $\mathbb{C} - Sd$.

On dit que le spectre de dimension est simple, lorsque les pôles des fonctions ζ_b ci-dessus aux points de Sd sont simples. Cette définition permet à Connes et Moscovici de trouver un cocycle cyclique qui se calcule localement et qui définit la classe de cohomologie cyclique du caractère de Chern. Posons, pour a un opérateur sur $\mathcal{H}$,

$$\nabla(a) = [D^2, a] \text{ et } a^{(l)} = \nabla^l(a).$$

Connes et Moscovici montrent alors le théorème suivant.

Théorème 5.9 — [CM95] Soit $(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$ un triplet spectral de spectre de dimension simple.

1. On définit un cocycle impair dans le (b,B)-bi-complexe en posant pour $n\in\mathbb{N}$ non nul,

$$\varphi_n(a^0,\ldots,a^n)=\sum_{k_i\geq 0}\sqrt{2i}c_{n,k}\,\mathrm{Res}\,(a^0(da^1)^{(k_1)}\ldots(da^n)^{(k_n)}\,|D|^{-(n+2|k|)}) \tag{5.1}$$

avec les notations suivantes :
   - $\mathrm{Res}\,(b)$ désigne le résidu en $z=0$ de la fonction ζ_b associée à b ;
   - $|k|=\sum k_j$ et $c_{n,k}=\dfrac{(-1)^{|k|}\Gamma(|k|+\frac{n}{2})}{k!(k_1+1)(k_1+k_2+2)\ldots(k_1+\ldots+k_n+n)}$.
2. La classe de cohomologie cyclique de φ_n coïncide avec le caractère de Chern en cohomologie cyclique $ch_*(\mathcal{A},\mathcal{H},D)$.

Remarques

1. Ce théorème reste vrai même dans le cas où le spectre de dimension n'est pas simple, mais la définition du cocycle est un peu plus compliquée.
2. On peut donner un analogue de cette formule en dimension paire [CM95, Ska01].

Nous pouvons, de même, proposer une généralisation de la notion de triplet spectral proposée par M. Benameur et T. Fack.

Définition 5.5.4 — Un triplet spectral de von Neumann de dimension d, et de spectre de dimension simple Sd, est un triplet $(\mathcal{A},\mathcal{M},D)$ avec :

- $\mathcal{M}$ une algèbre de von Neumann munie d'une trace τ (positive) fidèle, normale et semi-finie,
- $\mathcal{A}$ une sous-algèbre involutive de $\mathcal{M}$,
- D un opérateur auto-adjoint non borné affilié à $\mathcal{M}$ et τ-mesurable,

vérifiant certaines propriétés :

1. $\forall a\in\mathcal{A}$, a préserve le domaine de D et $[D,a]\in\mathcal{M}$;
2. $\forall a\in\mathcal{A}$, les opérateurs a et $[D,a]$ sont dans l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Dom}(\delta^n)$ des domaines des puissances de la dérivation non bornée définie sur $\mathcal{M}$ par :

$$\delta(b)=[|D|\,,\,b],$$

avec $|D|$ le module de l'opérateur D dans la décomposition polaire $D=F\,|D|$;
3. $\forall a\in\mathcal{A}$, l'opérateur $a(D+i)^{-d}$ est dans l'idéal $\mathcal{L}^{1,\infty}(\mathcal{M})$ de la trace de Dixmier ;
4. notons $\mathcal{B}$ l'algèbre engendrée par les opérateurs $\delta^n(a)$ et les commutateurs $[D,a]$ pour $a\in\mathcal{A}$; l'ensemble Sd est discret, et pour $b\in\mathcal{B}$ la fonction $\zeta(b)=\tau(b\,|D|^{-z})$ est holomorphe sur $\mathbb{C}-Sd$ avec au plus des pôles simples aux points de Sd.

Notons que nous pouvons également donner une notion graduée de cette définition.

Dans le cas, évoqué plus haut, des triplets spectraux de von Neumann définis par un feuilletage compact mesuré, l'algèbre $\mathcal{B}$ étant dans ce cas formée d'opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux d'ordre négatif ou nul, nous voyons immédiatement en utilisant les propriétés du résidu non commutatif feuilleté que l'on peut montrer le théorème suivant.

Théorème 5.10 — Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée de dimension p, munie d'une mesure transverse invariante μ. Donnons-nous un fibré hermitien $\mathcal{E}$ sur le feuilletage, et un opérateur D différentiel d'ordre 1, formellement autoadjoint, et elliptique le long des feuilles agissant sur les sections de $\mathcal{E}$. Alors le triplet

$$(C^\infty(M), W^*(M, \mathcal{F}, \mathcal{E}), D)$$

est un triplet spectral de von Neumann de dimension p et de spectre de dimension simple contenu dans $\mathbb{Z}$.

Ce théorème ouvre la voie pour une formule de l'indice locale dans le cadre des feuilletages mesurés, identique à celle formulée par Connes et Moscovici. La démonstration de Connes et Moscovici du théorème 5.9, page 135 semble en effet pouvoir être adaptée sans difficultés majeures au cas des triplets spectraux de von Neumann.

Annexe A

Construction d'un poids semi-continu inférieurement sur une C*-algèbre

Proposition A.0.1 — Soit A, une C*-algèbre, et q une application semi-continue inférieurement (s.c.i.) $q : A \to [0, +\infty]$ (on utilise la convention $0 \times +\infty = 0$) vérifiant pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $a, b \in A$

1) $q(\lambda a) = |\lambda|^2 q(a)$;
2) $q(a - b) + q(a + b) = 2(q(a) + q(b))$;
3) $q(ab) \leq \|a\|^2 q(b)$.

On a alors les propriétés suivantes.

1. Pour $a, b \in A$, avec $a^*a \leq b^*b$, on a $q(a) \leq q(b)$.
2. Posons $A_q = \{a \in A,\ q(a) < +\infty\}$. A_q est un idéal à gauche dans A et il existe alors un espace hilbertien H_q, une représentation π_q de A dans H_q et une application linéaire $\xi_q : A_q \to H_q$ telles que
$$\forall a \in A,\ x \in A_q,\ \xi_q(ax) = \pi_q(a)\xi_q(x) \text{ et } \|\xi_q(x)\|^2_{H_q} = q(x).$$
3. Soient $a, b, c \in A$ tels que $a^*a + b^*b = c^*c$; alors on a $q(a) + q(b) = q(c)$.
4. L'application de A^+ dans $[0, +\infty]$ donnée par $x \mapsto q(x^{\frac{1}{2}})$ définit un poids s.c.i. sur A.

Démonstration—

1. Nous savons que A peut être regardée comme un idéal de la C*-algèbre avec unité $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$. Les éléments de la forme $y(x^*x + \frac{1}{n})^{-1}$ sont donc dans A si x et y y sont. Donnons-nous à présent a et b vérifiant $a^*a \leq b^*b$. Définissons $u_n \in A$ par :
$$u_n = b(b^*b + \frac{1}{n})^{-1}a^*.$$
On a alors : $u_n^*b \to a$. En effet,
$$a - u_n^*b = a - a(b^*b + \frac{1}{n})^{-1}b^*b = a - a + \frac{1}{n}a(b^*b + \frac{1}{n})^{-1} = \frac{1}{n}a(b^*b + \frac{1}{n})^{-1}$$

dont la norme tend vers 0.
De plus $\|u_n\| \leq 1$. En effet,

$$u_n u_n^* = b(b^*b+\frac{1}{n})^{-1}a^*a(b^*b+\frac{1}{n})^{-1}b^* \leq b(b^*b+\frac{1}{n})^{-1}b^*b(b^*b+\frac{1}{n})^{-1}b^* = (bb^*)^2(bb^*+\frac{1}{n})^{-2}.$$

La dernière égalité se démontre facilement en multipliant à droite par $(bb^* + \frac{1}{n})^2$ et permet de conclure.
En utilisant la propriété 3) de q, et la semi-continuité, on obtient donc :

$$q(a) = \liminf q(u_n^* b) \leq \liminf \|u_n\|^2 q(b) \leq q(b)\cdot$$

2. L'ensemble A_q est un espace vectoriel, grâce aux deux premières propriétés de q. La troisième en fait un idéal à gauche de A. La forme quadratique q engendre une $\mathbb{R}$-forme bilinéaire par la formule $q(a+b) - q(a) - q(b)$. On construit alors une forme bilinéaire hermitienne $< \ , \ >_q$ sur A_q en posant

$$< a, b >_q = \frac{1}{4}\left[q(a+b) - q(a-b) - iq(a+ib) + iq(a-ib)\right].$$

Cette forme est positive, car $< a, a >_q = q(a)$. Notons H_q l'espace hilbertien séparé, complété de l'espace préhilbertien $(A_q, < \ , \ >_q)$, et $\xi_q : A_q \to H_q$ l'injection canonique. Pour tout $a \in A$, la multiplication à gauche par a définit un opérateur borné $\pi_q(a)$ de H_q. Il est clair que π_q est linéaire et multiplicative. Il reste à montrer que $\pi_q(a^*) = \pi_q(a)^*$. Pour cela, il est suffisant de voir que $\pi_q(a)$ est hermitien pour tout élément hermitien $a \in A$. Or, pour tout $b \in A_q$ et a hermitien,

$$(b + iab)^*(b + iab) = b^*(1 + a^2)b = (b - iab)^*(b - iab),$$

dont on déduit, par (a), $q(b+iab) = q(b-iab)$. En faisant la différence $q(b+iab) - q(b-iab)$, on obtient $0 = 2i(< ab, b >_q - < b, ab >_q)$, ce qui prouve que $\pi_q(a)$ est hermitien.

3. Posons $a_n = c(c^*c + 1/n)^{-1}a^*$ et $b_n = c(c^*c + 1/n)^{-1}b^*$. Alors on a

$$a_n a_n^* + b_n b_n^* = (cc^*)^2((cc^* + 1/n)^{-2}.$$

En particulier, $\|a_n\| \leq 1$ et $\|b_n\| \leq 1$. En outre,

$$a = \lim(a_n^* c), \ \ b = \lim(b_n^* c) \text{ et } c = \lim(a_n a + b_n b).$$

Si $c \in A_q$, on a

$$q(a_n^* c) + q(b_n^* c) =< \xi_q(c), \pi_q(a_n a_n^* + b_n b_n^*)\xi_q(c) >_q \leq q(c)$$

et

$$q(a) + q(b) \leq \liminf(q(a_n^* c) + q(b_n^* c)) \leq q(c).$$

Réciproquement, soit $T_n \in \mathcal{L}(H_q \oplus H_q, H_q)$ défini par $T_n(\zeta, \eta) = \pi_q(a_n)\zeta + \pi_q(b_n)\eta$. Alors $T_n T_n^* = \pi_q(a_n a_n^* + b_n b_n^*)$, donc $\|T_n\| \leq 1$. Ainsi, si $x, y \in A_q^2$, on a

$$q(a_n x + b_n y) =< (\xi_q(x), \xi_q(y)), T_n T_n^*(\xi_q(x), \xi_q(y)) >_q \leq q(x) + q(y).$$

En particulier, on obtient, pour $(x, y) = (a, b)$

$$q(c) \leq \liminf q(a_n a + b_n b) \leq q(a) + q(b).$$

4. $\varphi(x) = q(x^{1/2})$ est positive, s.c.i., additive et positivement linéaire sur A^+. C'est donc bien un poids s.c.i.sur A.

■

Annexe B

Opérateurs sur les C*-modules hilbertiens

Nous regroupons ici quelques résultats "classiques" sur les modules hilbertiens et les opérateurs sur ces modules. Nous n'incluons pas de démonstration, sauf pour les résultats que nous n'avons pas trouvés dans la littérature. Pour les preuves, le lecteur pourra consulter par exemple [Ska96, Lan95, WN92].

B.1 Modules hilbertiens

Donnons-nous une C*-algèbre A, et E un A-module à droite. Une *application sesquilinéaire positive* est une application

$$\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to A$$

antilinéaire en la premiere variable et linéaire en la seconde telle que pour tout $x \in E$, $\langle x,\ x\rangle \geq 0$. Un *produit scalaire* sur E est une application sesquilinéaire positive telle que l'application $y \to \langle x,\ y\rangle$ est A-linéaire.

Propriété B.1.2 — Soit $\langle\ ,\ \rangle$ une application sesquilinéaire positive.

1. Pour tous $x, y \in E$, on a $\langle y,\ x\rangle = \langle x,\ y\rangle^*$.
2. L'application $p : x \mapsto \|\langle x,\ x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$ est une semi-norme sur E.
3. La forme sesquilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ se prolonge en une forme sesquilinéaire positive au séparé complété E_p de E pour la semi-norme p.

Définition B.1.3 — Un *A-module préhilbertien* est un A-module muni d'un produit scalaire et un *A-module hilbertien* est un A-module préhilbertien séparé et complet.

Exemples —

1. Si $A = \mathbb{C}$, un module hilbertien est un espace de Hilbert.
2. La C*-algèbre A munie du produit scalaire $\langle a,\ b\rangle = a^*b$ est un A module hilbertien.
3. Si E et E' sont deux A-modules hilbertiens, la somme hilbertienne $E \oplus E'$ des deux modules est le module hilbertien défini sur le A-module $E \oplus E'$ par le produit scalaire

$$\langle x \oplus y,\ x' \oplus y'\rangle = \langle x,\ x'\rangle + \langle y,\ y'\rangle.$$

On peut généraliser cette construction et définir une somme directe infinie de modules hilbertiens.

4. En particulier, si E est un A-module hilbertien, on note $\mathcal{H}_E$ le module hilbertien $\ell^2(\mathbb{N}, E)$ formé des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E telles que la série de terme général $\langle x_n,\, x_n\rangle$ converge dans A :
$$\mathcal{H}_E = \ell^2(\mathbb{N}, E) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E$$
est un module hilbertien pour le produit scalaire
$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_n,\, y_n\rangle.$$
5. Un sous-module fermé d'un A-module hilbertien est un A-module hilbertien.

Soit E un A-module hilbertien. On définit l'orthogonal $S^\perp$ d'une partie S de E comme le sous-module fermé de E tel que
$$S^\perp = \{y \in E,\, \forall x \in S,\, \langle x,\, y\rangle = 0\}\,.$$
Notons que même si F est un sous-module fermé de E, on n'a pas nécessairement $F \oplus F^\perp = E$.

B.2 Morphismes de A-modules hilbertiens

B.2.1 Définition et propriétés des morphismes

Définition B.2.2 — Soient A une C*-algèbre, E et E' des A-modules hilbertiens ; une application $T : E \to E'$ est appelée un morphisme de E vers E' s'il existe une application $S : E' \to E$ telle que pour tous $(x, y) \in E \times E'$, on ait
$$\langle Tx,\, y\rangle = \langle x,\, Sy\rangle.$$
On note $\mathrm{Mor}(E, E')$ l'ensemble de ces morphismes et $\mathrm{Mor}(E) = \mathrm{Mor}(E, E)$

Proposition B.2.3 — Soient E et E' deux A-modules hilbertiens, et $T \in \mathrm{Mor}(E, E')$.

1. L'application S de E' dans E vérifiant la propriété que pour tous $(x, y) \in E \times E'$, on ait
$$\langle Tx,\, y\rangle = \langle x,\, Sy\rangle$$
est unique. On l'appelle adjoint de T et on la note T^*. On a $T^* \in \mathrm{Mor}(E', E)$ et $(T^*)^* = T$.
2. L'application T est linéaire, A-linéaire, continue ; de plus, on a
$$\|T\|^2 = \|T^*\|^2 = \|T^*T\|\,.$$
3. L'ensemble $\mathrm{Mor}(E, E')$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, E')$.
4. Soient E'' un autre A-module hilbertien et $T' \in \mathrm{Mor}(E', E'')$, alors $T'T \in \mathrm{Mor}(E, E'')$ et $(T'T)^* = T^*T'^*$.

5. L'ensemble $\mathrm{Mor}(E)$, muni des lois ci-dessus pour l'addition, la composition et l'involution est une C*-algèbre pour la norme d'opérateur.

Notons que dans le cas particulier $A = E$, on a $\mathrm{Mor}(A) = \mathcal{M}(A)$ l'algèbre des multiplicateurs de A.

Proposition B.2.4 — Soit E un A module hilbertien.

1. Un élément $T \in \mathrm{Mor}(E)$ est auto-adjoint s.s.i pour tout $x \in E$, on a $\langle Tx,\, x\rangle = \langle x,\, Tx\rangle^*$.
2. Un élément $T \in \mathrm{Mor}(E)$ est positif s.s.i pour tout $x \in E$, on a $\langle Tx,\, x\rangle \in A_+$.

Un sous-module fermé F d'un A-module hilbertien E est dit *orthocomplémenté* lorsque $F \oplus F^\perp = E$.

Proposition B.2.5 — Un opérateur T, A-linéaire d'un A module E dans un A module E', est un morphisme de E dans E' si et seulement si le graphe $G(T)$ de T est un sous-module orthocomplémenté de $E \oplus E'$.

Proposition B.2.6 — Soit $T \in \mathrm{Mor}(E,\, E')$.

1. (a) Si T est surjectif alors TT^* est inversible dans $\mathrm{Mor}(E')$ et $E = \mathrm{Ker}T \oplus \mathrm{Im}T^*$.
   (b) Si T est bijectif, il en va de même pour T^*. On a $T^{-1} \in \mathrm{Mor}(E',\, E)$ et
   $$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}.$$
2. Les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) $\mathrm{Im}T$ est fermé dans E'.
   (b) $\mathrm{Im}T^*$ est fermé dans E.
   (c) 0 est isolé dans le spectre de T^*T.
   (d) 0 est isolé dans le spectre de TT^*.

   Si ces conditions sont satisfaites, $\mathrm{Im}T$ et $\mathrm{Ker}T^*$ sont des sous-modules orthocomplémentés de E' et $\mathrm{Im}T^*$ et $\mathrm{Ker}T$ sont des sous-modules orthocomplémentés de E.

Nous pouvons définir comme dans le cas des opérateurs linéaires sur des espaces hilbertiens une notion d'isométrie partielle.

Définition B.2.7 —

1. On appelle *isométrie partielle* de E dans E' un élément u de $\mathrm{Mor}(E, E')$ tel que $u = uu^*u$.
2. On appelle *module* d'un morphisme $T \in \mathrm{Mor}(E, E')$ le morphisme $|T| \in \mathrm{Mor}(E, E')$ défini par $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$.

Ces définitions nous permettent de définir la décomposition polaire.

Proposition B.2.8 — Soit $T \in \mathrm{Mor}(E, E')$, tel que les adhérences de $\mathrm{Im}T$ et $\mathrm{Im}T^*$ soient orthocomplémentés respectivement dans E' et E, alors il existe un unique $u \in$ Mor(E, E') dont la restriction à Ker$T$ est nulle et tel que

$$T = u\,|T|\,.$$

De plus, u est une isométrie partielle de support initial l'adhérence de ImT^* et de support final l'adhérence de ImT, et l'on a

$$|T| = u^*T = T^*u,\ |T^*| = Tu^* = uT^* \text{ et } T^* = |T|\,u = u^*Tu^* = u^*\,|T^*|\,.$$

B.2.2 Composition de modules hilbertiens

Proposition B.2.9 — Soient A et B deux C*-algèbres, E un A module hilbertien et H un B-module hilbertien, et $\varphi : A \to$ Mor(H) un homomorphisme involutif positif. Pour $x, y \in E$, $\xi, \eta \in H$ et $b \in B$, posons

$$(x \otimes \xi)b = x \otimes \xi b \text{ et } \langle x \otimes \xi,\, y \otimes \eta\rangle = \langle \xi,\, \varphi(\langle x,\, y\rangle)\eta\rangle.$$

Le produit tensoriel algébrique $E \otimes H$ muni de la structure de B-module à droite et du produit scalaire ainsi défini est un B-module prehilbertien

On notera $E \otimes_\varphi H$ (ou $E \otimes_A H$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'homomorphisme φ le B-module hilbertien séparé complété du B-module préhilbertien $E \otimes B$. Le lemme suivant permet de montrer le résultat principal sur la composition de modules hilbertiens.

Lemme B.2.10 — Soient A et B des C*-algèbres et H_0 un B-module préhilbertien. Appelons H le module hilbertien séparé complété de H_0 et $\rho : H_0 \to H$ l'application canonique. Supposons donné un homorphisme d'algèbres φ de A dans l'algèbre $\mathrm{End}_B(H_0)$ des endomorphismes du B-module à droite H_0 qui vérifie, pour tout $a \in A$ et tous $x, y \in H_0$,

$$\langle \varphi(a)x,\, y\rangle = \langle x,\, \varphi(a^*)y\rangle.$$

Il existe alors une unique représentation $\pi : A \to \mathrm{Mor}(H)$ telle que, pour tout $a \in A$, on a

$$\pi(a) \circ \rho = \rho \circ \phi(a).$$

Proposition B.2.11 — Soient A et B deux C*-algèbres, E un A module hilbertien et H un B-module hilbertien, et $\varphi : A \to$ Mor(H) une représentation.

- Pour tout $T \in$ Mor(E) l'application $x \otimes \xi \mapsto Tx \otimes \xi$ définit un morphisme
$$T \otimes_\pi 1 \in \text{Mor}(E \otimes_\pi H).$$
L'application $T \mapsto T \otimes_\pi 1$ est un homorphisme de C*-algèbres, injectif si π l'est.
- Si $S \in$ Mor(H) commute à $\pi(A)$, l'application $x \otimes \xi \mapsto x \otimes S\xi$ définit un morphisme
$$1 \otimes_\pi S \in \text{Mor}(E \otimes_\pi H)$$
qui commute à $T \otimes_\pi 1$ pour tout $T \in$ Mor(E).

Notons que dans le cas particulier où $E = A$, le module hilbertien $E \otimes_\pi H$ est égal à $\pi(A)H$. Ainsi, si π est non dégénérée, tout $T \in \mathrm{Mor}(A) \simeq \mathcal{M}(A)$ définit par ce procédé un opérateur borné sur H.

B.3 Opérateurs non bornés dans les modules hilbertiens

B.3.1 Rappels sur les opérateurs non bornés dans les espaces de Banach

Définition B.3.2 — Soient E et F des espaces de Banach.

1. Un *opérateur* de E dans F est donné par un sous-espace vectoriel $\mathrm{Dom}T$ de E appelé *domaine* de T et par une application linéaire de $\mathrm{Dom}T$ dans F.
2. Le *noyau* et l'*image* de T sont les sous-espaces vectoriels respectifs de E et de F donnés par
$$\mathrm{Ker}T = \{x \in \mathrm{Dom}T,\, Tx = 0\} \text{ et } \mathrm{Im}T = T(\mathrm{Dom}T).$$
3. Le *graphe* de T est le sous-espace de $E \times F$ défini par $G(T) = \{(x, Tx),\ x \in \mathrm{Dom}T\}$.

Rappelons qu'il existe une correspondance bi-univoque entre les opérateurs de E dans F et les sous-espaces G de $E \times F$ tels que $G \cap (\{0\} \times F) = \{0\}$. On appelle alors *extension* de l'opérateur T tout opérateur S tel que $G(T) \subset G(S)$, ce que l'on note $T \subset S$.

Opérations sur les opérateurs

Restriction Soit T un opérateur et D un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Dom}T$. On note $T_{|D}$ l'opérateur tel que $T_{|D} \subset T$ et $\mathrm{Dom}T_{|D} = D$.

Somme Soient S et T des opérateurs de E dans F. On définit l'opérateur $S + T$ en posant $\mathrm{Dom}(S+T) = \mathrm{Dom}S \cap \mathrm{Dom}T$, et pour $x \in \mathrm{Dom}(S+T)$, $(S+T)(x) = S(x) + T(x)$. On a $S + T = T + S$, et $(R+S)+T = R+(S+T)$ si R est un autre opérateur de E dans F.

Produit Soient T un opérateur de E dans F et S un opérateur de F dans G. On définit l'opérateur ST en posant $\mathrm{Dom}ST = \{x \in \mathrm{Dom}T, Tx \in \mathrm{Dom}S\}$ et, pour tout $x \in \mathrm{Dom}ST$, $(ST)(x) = S(T(x))$. Si R est un opérateur de G dans H, on a $(RS)T = R(ST)$.

Distributivité Soient T et U des opérateurs de E dans F et R et S des opérateurs de F dans G. On a $(R+S)T = RT + ST$ et, en général, seulement $RT + RU \subset R(T+U)$.

Inverse Un opérateur T de E dans F est dit *injectif* lorsque l'application $T : \mathrm{Dom}T \to F$ est injective. L'*inverse* T^{-1} d'un opérateur injectif est l'opérateur de F dans E de domaine $\mathrm{Dom}T^{-1} = \mathrm{Im}T$ et de graphe $G(T^{-1}) = \{(y,x) \in F \times E, (x,y) \in G(T)\}$. L'opérateur T^{-1} est injectif, et on a $(T^{-1})^{-1} = T$. Si $S : F \to G$ est injectif, alors ST est injectif, et $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Un opérateur T de E dans F est *densément défini* lorsque $\mathrm{Dom}T$ est un sous-espace dense de E.

Définition B.3.3 — Soit T un opérateur de E dans F. On dit que T est *fermé* si son graphe est un sous-espace fermé de $E \times F$. Un opérateur est dit *fermable* lorsqu'il admet une extension fermée.

Soient T un opérateur fermable et S une extension fermée de T. On a $G(T) \subset \overline{G(T)} \subset G(S)$. On déduit de cette suite d'inclusions que $\overline{G(T)}$ est le graphe d'un opérateur fermé, appelé *fermeture* de T et noté $\bar{T}$. Un sous-espace D de $\mathrm{Dom}T$ est un *domaine essentiel* pour T si les opérateurs T et $T_{|D}$ ont même fermeture.

La proposition suivante est une conséquence directe des définitions.

Proposition B.3.4 — L'inverse d'un opérateur injectif fermé est fermé

Nous pouvons à présent définir le spectre d'un opérateur.

Définition B.3.5 — On appelle *valeur régulière* d'un opérateur T d'un espace de Banach E dans lui-même tout nombre complexe λ tel que l'application $T - \lambda I_E$ est une application linéaire bijective de Dom$T$ dans E, dont l'application réciproque $R_\lambda(T)$, appelée *résolvante*, est une application linéaire continue de E dans lui-même. Le *spectre* de T, SpT, est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des valeurs régulières.

En utilisant le théorème du graphe fermé, on a la proposition suivante.

Proposition B.3.6 — Donnons-nous un opérateur T densément défini et fermé d'un espace de Banach E dans lui-même.

1. Le spectre de T est formé des complexes λ tel que $T - \lambda$ n'est pas bijectif de Dom$T$ dans E.
2. Si T est injectif, et si λ est une valeur régulière non nulle de T, alors λ^{-1} est une valeur régulière de T^{-1} et on a :

$$R_{\lambda^{-1}}(T^{-1}) = -\lambda T R_\lambda(T) = -\lambda I_E - \lambda^2 R_\lambda(T).$$

On en déduit la proposition suivante.

Proposition B.3.7 — Soit T un opérateur densément défini fermé d'un espace de Banach E dans lui-même.

1. Le spectre de T est une partie fermée de $\mathbb{C}$.
2. L'application $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ est analytique de $\mathbb{C} -$ SpT dans $\mathcal{L}(E)$, l'ensemble des endomorphismes continus de E dans lui-même.
3. La famille $\{R_\lambda(T),\, \lambda \in \mathbb{C} - \text{Sp}T\}$ est une partie commutative de $\mathcal{L}(E)$, et on a :

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu) R_\lambda(T) R_\mu(T).$$

B.3.2 Cas des modules hilbertiens

Opérateurs réguliers

Soit A une C*-algèbre, E et E' des A-modules hibertiens. Un opérateur de E dans E' est dit A-linéaire si son graphe est un sous-A-module de $E \oplus E'$. Soit maintenant T un opérateur de E dans E', tel que l'orthogonal dans E de Dom$T$ soit réduit à $\{0\}$. On définit l'*adjoint* T^* de T comme étant l'opérateur A-linéaire de E' dans E dont le graphe est

$$G(T^*) = \left\{(y, x) \in E' \times E, \forall z \in \text{Dom}T, \langle x,\, z\rangle = \langle y,\, Tz\rangle\right\}.$$

Soit $U_0 \in \text{Mor}(E' \oplus E,\, E \oplus E')$ qui à $(y, x) \in E' \oplus E$ associe $(x, -y)$. Alors $G(T^*)$ est l'orthogonal dans $E' \oplus E$ de $U_0^*(G(T)$.

Remarquons que, par définition, T^* est A-linéaire et fermé. Alors si $(\mathrm{Dom}T)^\perp = \{0\}$ et $(\mathrm{Dom}T^*)^\perp = \{0\}$, on a $T \subset (T^*)^*$ et donc T est fermable.

Proposition B.3.8 — Soient E, E', E'' des A-modules hilbertiens.

1. Soient S et T des opérateurs de E dans E' tels que $(\mathrm{Dom}S \cap \mathrm{Dom}T)^\perp = \{0\}$. Alors $S^* + T^* \subset (S+T)^*$. Si $S \in \mathrm{Mor}(E, E')$ alors $S^* + T^* = (S+T)^*$.
2. Soit T un opérateur injectif de E dans E' tel que $(\mathrm{Dom}T)^\perp = \{0\}$ et $(\mathrm{Im}T)^\perp = \{0\}$. Alors T^* est injectif et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
3. Soient T un opérateur de E dans E' et S un opérateur de E' dans E'' tels que

$$(\mathrm{Dom}ST)^\perp = \{0\} \text{ et } (\mathrm{Dom}S)^\perp = \{0\}.$$

   Alors on a $T^*S^* \subset (ST)^*$. Si S est un morphisme ou si T est l'inverse d'un morphisme injectif, alors $T^*S^* = (ST)^*$.

Un opérateur T de E dans lui-même est *autoadjoint* si $T = T^*$. Un tel opérateur est positif si pour tout $x \in \mathrm{Dom}T$, on a $\langle x, Tx\rangle \in A^+$.

Proposition B.3.9 — Donnons-nous à présent un opérateur densément défini et fermé T de E dans E', tel que T^* est densément défini. Notons $U_0 \in \mathrm{Mor}(E' \oplus E, E \oplus E')$ le morphisme $(y, x) \mapsto (x, -y)$. L'image de $(1 + T^*T)$ est alors $\{x \in E, (x, 0) \in G(T) + U_0G(T^*)\}$. De plus les propriétés suivantes sont équivalentes

1. L'image de $(1 + T^*T)$ est dense dans E.
2. $1 + T^*T$ est une application surjective.
3. Le graphe de T est un sous-module orthocomplémenté de $E \oplus E'$.

Si ces conditions sont vérifiées, elles le sont aussi pour T^*, et on a $(T^*)^* = T$. Un opérateur T vérifiant ces conditions est appelé *régulier*.

Opérations sur les opérateurs réguliers

Somme Soient $S \in \mathrm{Mor}(E, E')$ et T un opérateur régulier de E dans E'. L'opérateur $S+T$ est régulier.

Produit Soient T un opérateur régulier de E dans E' et $S \in \mathrm{Mor}(E', E')$, un morphisme inversible. L'opérateur ST est régulier. Il en va de même si S est un opérateur régulier de E' dans E'' et T un morphisme inversible de E dans E'.

Inverse Soit T un opérateur régulier de E dans E'.

1. Si $\mathrm{Dom}T = E$, alors $T \in \mathrm{Mor}(E, E')$.
2. Si les images de T et T^* sont denses dans E' et E respectivement, alors T est injectif et T^{-1} est un opérateur régulier de E' dans E.
3. Si T est bijectif de $\mathrm{Dom}T$ dans E', $T^{-1} \in \mathrm{Mor}(E', E)$.
4. Si $E = E'$, l'application $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ est analytique de $\mathbb{C} - \mathrm{Sp}T$ dans $\mathrm{Mor}(E)$.

Transformation de Woronowicz

Proposition B.3.10 — Soit T un opérateur régulier de E dans E'. Notons $p : G(T) \to E$ la première projection, $e, g \in \mathsf{Mor}(E \oplus E')$ les projecteurs orthogonaux d'images respectives E et $G(T)$ et $q = e + g - 1 \in \mathsf{Mor}(E \oplus E')$.

1. -1 est une valeur régulière de T^*T et $(1 + T^*T)^{-1} = pp^* \in \mathsf{Mor}(E)$. On définit alors $(1 + T^*T)^{-\frac{1}{2}}$ par $(1 + T^*T)^{-\frac{1}{2}} = \left[(1 + T^*T)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} = |p^*|$.
2. Le domaine de T^*T est un domaine essentiel pour T.
3. L'opérateur T^*T est autoadjoint régulier et $\mathsf{Sp}(T^*T) \subset \mathbb{R}_+$.
4. L'image de q est dense dans $E \oplus E'$, et q admet une décomposition polaire $q = w\,|q|$, où w est un morphisme unitaire de carré 1 de $\mathsf{Mor}(E \oplus E')$.
5. On a $\mathsf{Dom}T = \mathsf{Im}(1 + T^*T)^{-\frac{1}{2}}$ et $T(1 + T^*T)^{-\frac{1}{2}} \in \mathsf{Mor}(E, E')$.
6. On a $wE = G$, et la matrice de w est donnée par

$$w = \begin{pmatrix} (1 + T^*T)^{-\frac{1}{2}} & T^*(1 + TT^*)^{-\frac{1}{2}} \\ T(1 + T^*T)^{-\frac{1}{2}} & -(1 + TT^*)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Cette proposition nous permet d'énoncer le théorème suivant, essentiel pour la compréhension des opérateurs réguliers.

Théorème B.1 — Soit T un opérateur régulier de E dans E'. On pose $Q(T) = T(1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}$.

1. On a $Q(T) \in \mathsf{Mor}(E)$, $1 - Q(T)^*Q(T) = (1 + T^*T)^{-1}$ et $Q(T)^* = Q(T^*)$.
2. La correspondance $T \mapsto Q(T)$ est une correspondance bi-univoque entre l'ensemble des opérateurs réguliers de E dans E' et l'ensemble des opérateurs $Q \in \mathsf{Mor}(E, E')$ tels que $\|Q\| \leq 1$ et $\mathsf{Im}(1 - Q^*Q)$ est dense dans E. L'application réciproque est

$$Q \mapsto Q(1 - Q^*Q)^{-\frac{1}{2}}$$

De ce théorème, nous pouvons déduire les propriétés suivantes pour un opérateur régulier.

Image On a $\mathrm{Im}T = \mathrm{Im}Q(T)$ et $\mathrm{Ker}T = \mathrm{Ker}Q(T)$. Donc T est bijectif si et seulement si $Q(T)$ l'est.

Eléments autoadjoints Si $E = E'$, T est autoadjoint (repectivement normal) si et seulement si $Q(T)$ l'est.

Décomposition polaire Si $E = E'$, il existe un unique opérateur régulier $|T|$ tel que $Q(|T|) = |Q(T)|$. Cet opérateur est autoadjoint, positif, de domaine $\mathrm{Dom}T$, et $|T|^2 = T^*T$. Si $Q(T)$ admet une décomposition polaire $Q(T) = u\,|Q(T)|$, alors T admet une décomposition polaire $T = u\,|T|$.

Image d'un opérateur régulier par composition de modules hilbertiens

Soient A et B des C*-algèbres, E et F des A-modules hilbertiens, T un opérateur régulier de E dans F, H un B-module hilbertien, $\pi : A \to \mathrm{Mor}(H)$ une représentation de A et $\mathcal{H}$ un sous-espace dense de H.

Proposition B.3.11 — Il existe un opérateur T_0 de $E \otimes_\pi H$ dans $F \otimes_\pi H$, de domaine l'image dans $E \otimes_\pi H$ du produit tensoriel algébrique de $\mathrm{Dom}T$ par $\mathcal{H}$ tel que pour tous $x \in \mathrm{Dom}T$ et $\xi \in \mathcal{H}$, on ait

$$T_0(x \otimes \xi) = Tx \otimes \xi.$$

Cet opérateur est fermable et sa fermeture est un opérateur régulier de $E \otimes_\pi H$ dans $F \otimes_\pi H$ noté $T \otimes_\pi 1$. On a, de plus, $Q(T \otimes_\pi 1) = Q(T) \otimes_\pi 1$ et $(T \otimes_\pi 1)^* = T^* \otimes_\pi 1$.

Cette proposition nous permet de déduire la proposition suivante pour $E = F$:

Proposition B.3.12 —

1. Si T est normal ou autoadjoint, il en va de même pour $T \otimes_\pi 1$.
2. On a $(T \otimes_\pi 1)^* = T^* \otimes_\pi 1$ et $(T \otimes_\pi 1)^*(T \otimes_\pi 1) = T^*T \otimes_\pi 1$.
3. Si $D \subset \mathrm{Dom}T$ est un domaine essentiel pour T, alors l'image dans $E \otimes_\pi H$ du produit tensoriel algébrique de D par $\mathcal{H}$ est un domaine essentiel pour $T \otimes_\pi 1$.
4. On a $\mathrm{Sp}(T \otimes_\pi 1) \subset \mathrm{Sp}T$, avec égalité si π est injective.

B.3.3 Calcul fonctionnel pour les opérateurs réguliers normaux

Soient A et B des C*-algèbres, H un B-module hilbertien, et $\pi : A \in \mathrm{Mor}(H)$ une représentation non dégénérée. Notons $\bar{\pi} : \mathcal{M}(A) \to \mathrm{Mor}(H)$ son extension aux multiplicateurs. Le B-module $A \otimes_\pi H$ s'identifie à H au moyen de l'opérateur unitaire $a \otimes x \mapsto \pi(a)x$.

Pour un morphisme $T \in \mathrm{Mor}(A) = \mathcal{M}(A)$, on a $\bar{\pi}(T) = T \otimes_\pi 1$ par cette identification. Si T est maintenant un opérateur régulier sur le A-module hilbertien A, on note $\tilde{\pi}(T) = T \otimes_\pi 1$ l'opérateur régulier correspondant sur le B-module hilbertien H. Le domaine de cet opérateur régulier est l'image de $\bar{\pi}\left[(1 + T^*T)^{-\frac{1}{2}}\right]$ soit l'ensemble $\{\pi(a)x,\ a \in \mathrm{Dom}T,\ x \in H\}$. On a alors $\tilde{\pi}(T)\pi(a)x = \pi(Ta)x$.

Théorème B.2 — Soit A une C*-algèbre, E un A-module hilbertien, X un espace localement compact et $\pi : C_0(X) \to \mathrm{Mor}(E)$ une représentation non dégénérée. On note $\bar{\pi} : C_b(X) \to \mathrm{Mor}(E)$ l'extension aux multiplicateurs de cette représentation et $\tilde{\pi}$ l'application de $C(X)$ dans les opérateurs réguliers de E dans lui-même définie comme précédemment.

1. Pour toute fonction $f \in C(X)$, l'opérateur $\tilde{\pi}(f)$ est normal. On a
$$\tilde{\pi}(f)^* = \tilde{\pi}(\bar{f}),\ \text{et}\ Q(\tilde{\pi}(f)) = \pi[f(1 + |f|^2)^{-\frac{1}{2}}].$$
De plus on a $\mathrm{Sp}(\tilde{\pi}(f)) \subset \overline{f(X)}$ avec égalité si π est injective.
2. Pour toute fonction $g \in C_c(X)$, on a $\tilde{\pi}(f)\pi(g) = \pi(fg)$ et l'ensemble $\{\pi(g)x, g \in C_c(X), x \in E\}$ est un domaine essentiel pour $\tilde{\pi}(f)$.
3. Si $f \in C_b(X),\ \tilde{\pi}(f) = \bar{\pi}(f)$.
4. Si T est un opérateur régulier de E dans E tel que $T\pi(g) = \pi(fg)$ pour toute fonction $g \in C_c(G)$, alors on a $T = \tilde{\pi}(f)$.
5. Pour $f, g \in C(X)$, on a $\tilde{\pi}(f + g) = \overline{\tilde{\pi}(f) + \tilde{\pi}(g)}$ et $\tilde{\pi}(fg) = \overline{\tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(g)}$.
Si $g(|f + g| + 1)^{-1} \in C_b(X)$, alors $\tilde{\pi}(f + g) = \tilde{\pi}(f) + \tilde{\pi}(g)$; si $g(|fg| + 1)^{-1} \in C_b(X)$, alors $\tilde{\pi}(fg) = \tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(g)$.

Proposition B.3.13 — Soient T un opérateur régulier normal d'un A-module hilbertien E dans lui-même et X une partie fermée de $\mathbb{C}$ contenant $\mathrm{Sp}T$. Notons $z \in C(X)$ la fonction identique $\lambda \mapsto \lambda$. Il existe une unique représentation non dégénérée $\pi : C_0(X) \to \mathrm{Mor}(E)$ telle que $\tilde{\pi}(z) = T$. Le noyau de π est formé des fonctions de $C_0(X)$ nulles sur $\mathrm{Sp}T$.

Soit T un opérateur régulier normal d'un A-module hilbertien E dans lui-même, et X une partie fermée de $\mathbb{C}$ contenant $\mathrm{Sp}T$. Notons $z \in C(X)$ la fonction identique $\lambda \mapsto \lambda$ et $\pi : C_0(X) \to \mathrm{Mor}(E)$ la représentation telle que $\tilde{\pi}(z) = T$. Pour $f \in C(X)$, on note $f(T)$ l'opérateur $\tilde{\pi}(f)$. Si f est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{C}$ contenant $\mathrm{Sp}T$ et dont la restriction g à $\mathrm{Sp}T$ est continue, on définit alors $f(T) = g(T)$. On déduit du théorème et de la proposition qui précèdent le théorème suivant.

Théorème B.3 — L'application $f \mapsto f(T)$ ainsi définie possède alors les propriétés suivantes :

1. Pour toute fonction f continue sur X contenant $\mathrm{Sp}T$, l'opérateur $f(T)$ est un opérateur régulier normal de E dans E. De plus, on a $f(T)^* = \bar{f}(T)$.
2. $\mathrm{Sp}f(T)$ est l'adhérence dans $\mathbb{C}$ de $f(\mathrm{Sp}T)$.
3. Pour toute fonction continue bornée f, on a $f(T) \in \mathrm{Mor}(E)$ et $\|f(T)\| = \sup\{|f(\lambda)|, \lambda \in \mathrm{Sp}T\}$.
4. Pour tout couple (f,g) de fonctions continues, $(f+g)(T)$ est la fermeture de $f(T)+g(T)$ et $(fg)(T)$ celle de $f(T)g(T)$. De plus, si $g(|f+g|+1)^{-1}$ est bornée, on a $(f+g)(T) = f(T)+g(T)$. De même, si $g(|fg|+1)^{-1}$ est bornée, on a $(fg)(T) = f(T)g(T)$.
5. Pour $f, g \in C(\mathbb{C})$, on a $f(T) = g(T)$ si et seulement si f et g coïncident sur $\mathrm{Sp}T$.
6. Pour $f, g \in C(\mathbb{C})$, on a $f \circ g(T) = f(g(T))$.
7. Si $T \in \mathrm{Mor}(E)$, l'application ainsi définie coïncide avec le calcul fonctionnel continu défini sur la C^*-algèbre $\mathrm{Mor}(E)$.

Démontrons à présent quelques résultats supplémentaires dont nous avons besoin pour l'étude des G-opérateurs pseudo-différentiels.

Lemme B.3.14 — Soient A et B deux éléments positifs de $\mathrm{Mor}(E)$ vérifiant

$$A \leq B.$$

Pour tout $s \in]0,1[$, on alors

$$A^s \leq B^s$$

.

Démonstration du lemme Pour tout $s \in]0,1[$, on a

$$t^s = f(s) \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^s t}{t+\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda}$$

avec $f(s) = 1/\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^s}{1+\lambda}\frac{d\lambda}{\lambda}$. Or on sait que si $A \leq B$, on a

$$A(A+\lambda)^{-1} \leq B(B+\lambda)^{-1}.$$

En effet $A(A+\lambda)^{-1} = I - \lambda(A+\lambda)^{-1}$ donc la propriété précédente est équivalente à $(B+\lambda)^{-1} \leq (A+\lambda)^{-1}$ qui est claire car $(A+\lambda) \leq (B+\lambda)$. $\boxminus$

Enonçons à présent le lemme principal.

Lemme B.3.15 — Soient S et T des opérateurs réguliers bijectifs sur un module hilbertien E.

(i) $\exists A \in \mathrm{Mor}(E)$, tel que $\|A\| \leq 1$ et $AT \subset S$.

(ii) $\mathrm{Dom}T \subset \mathrm{Dom}S$ et $\forall x \in \mathrm{Dom}T$, $\|T(x)\| \geq \|S(x)\|$.

(iii) $(S^*S)^{-1} \geq (T^*T)^{-1}$.

(iv) $\exists a > 1$, $(S^*S)^{-a} \geq (T^*T)^{-a}$.

On a alors $(iv) \Rightarrow (i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

Démonstration du lemme Posons $T_0 = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ et $S_0 = (S^*S)^{\frac{1}{2}}$ et appelons T_1 et S_1 les morphismes qui sont les inverses respectifs de ces opérateurs réguliers positifs. Nous savons, grâce à la décomposition polaire pour les opérateurs réguliers, que nous pouvons écrire $S = u(S)S_0$ et $T = u(T)T_0$, avec $u(S)$ et $u(T)$ des opérateurs unitaires dans $\mathrm{Mor}(E)$.

1. $(iv) \Rightarrow (i)$ Posons $A = ST^{-1}$ et $A_0 = S_0T_0^{-1}$. L'égalité $A = u(S)A_0u(T)^{-1}$ prouve qu'il suffit, pour montrer que A est un morphisme de norme $\|A\| \leq 1$, de le montrer pour A_0. L'opérateur A_0 est fermable sur E et admet un adjoint A_0^*. Il est densément défini, car il contient $(T_0^{-1})^*S_0^*$, qui est densément défini. Montrons que le domaine de A_0 est dense avec
$$\mathrm{Dom}A_0 = T_0(\mathrm{Dom}S_0 \cap \mathrm{Dom}T_0) = T_0(\mathrm{Im}T_1 \cap \mathrm{Im}S_1).$$
Pour cela, prouvons que la suite $A_n = (S_1 + \frac{1}{n})^{-1}T_1^a$ est une suite de Cauchy pour la topologie de la norme dans $\mathrm{Mor}(E)$. On a par hypothèse $T_1^{2a} \leq S_1^{2a}$ et par conséquent
$$\begin{aligned}(A_n - A_m)(A_n - A_m)^* &= \left[(S_1 + \frac{1}{n})^{-1} - (S_1 + \frac{1}{m})^{-1}\right] T_1^{2a} \left[(S_1 + \frac{1}{n})^{-1} - (S_1 + \frac{1}{m})^{-1}\right] \\ &\leq \left[(S_1 + \frac{1}{n})^{-1} - (S_1 + \frac{1}{m})^{-1}\right] S_1^{2a} \left[(S_1 + \frac{1}{n})^{-1} - (S_1 + \frac{1}{m})^{-1}\right] \\ &\leq [F_n(S_1) - F_m(S_1)]^2\end{aligned}$$
avec $F_n(t)$ la fonction
$$t \mapsto \frac{t^a}{t + \frac{1}{n}}.$$
La suite de fonctions F_n converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$ vers la fonction t^{a-1} par le théorème de Dini. Ainsi la suite A_n est bien de Cauchy. Donnons-nous à présent un $x \in E$, posons $y = T_1^a x$ et $z_n = A_n x$. La suite z_n converge vers $z \in E$. On a alors, puisque S_1 est continue,
$$y = (S_1 + \frac{1}{n})z_n \to S_1 z.$$
Nous obtenons donc $\mathrm{Im}S_1 = \mathrm{Im}T_1^a \subset \mathrm{Im}T_1$, et l'opérateur A_0 est alors bien densément défini, par densité de l'image de l'opérateur S_1. Montrons maintenant que A_0 et A_0^* sont prolongeables par continuité sur E tout entier. Grâce au lemme (B.3.14) nous savons que $(iv) \Rightarrow (iii)$. Donnons-nous $x \in \mathrm{Dom}(T_0^{-1})^*S^*$; on a alors, en posant $y = S_0^*x$

$$\|A_0^*x\|^2 = \langle (T_0^{-1})^*y,\, (T_0^{-1})^*y\rangle = \langle (T^*T)^{-1}y,\, y\rangle \le \langle (S^*S)^{-1}y,\, y\rangle = \langle x,\, x\rangle.$$

On a donc $\|A_0^*x\| \le \|x\|$ sur une partie du domaine dense dans E. A_0^* est donc prolongeable par continuité à E. On peut également montrer que $\|Ax\| \le \|x\|$ pour x dans le domaine de A_0. En effet, on a pour $x \in \mathrm{Dom} A_0^* A_0 = \mathrm{Dom} A_0$,

$$\|A_0x\| = \sup_{\|y\|\le 1} |\langle A_0x,\, y\rangle|\,.$$

Or on sait que

$$|\langle A_0x,\, y\rangle| = |\langle x,\, A_0^*y\rangle| \le \|x\|\,\|A_0^*\|\,\|y\| \le \|x\|\,.$$

L'opérateur $A_0 = S_0T_0^{-1}$ est donc bien un morphisme de norme $\|A_0\| \le 1$.

2. $(i) \Rightarrow (ii)$ Si $AT \subset S$, avec $A \in \mathrm{Mor}(E)$ et $\|A\| \le 1$, alors on a bien $\mathrm{Dom}T \subset \mathrm{Dom}S$ et $\|Sx\| \le \|Tx\|$ pour x dans $\mathrm{Dom}T$.
3. $(ii) \Rightarrow (i)$ Posons $A = ST^{-1}$. Comme T^{-1} est un morphisme de E, et $\mathrm{Dom}T \subset \mathrm{Dom}S$, A est un opérateur de domaine $\mathrm{Dom}A = E$. De plus, on a $\mathrm{Dom}S^* \subset \mathrm{Dom}A^*$, et son adjoint est donc densément défini. Par ailleurs, on a

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\|Sy\|}{\|Ty\|} \le 1.$$

Ceci montre donc que A est bien un morphisme de norme $\|A\| \le 1$, et il est clair que $AT \subset S$.
4. $(i) \Rightarrow (iii)$ On a $AT \subset S$, d'où l'on tire $T^{-1} = S^{-1}A$ et donc

$$(T^*T)^{-1} = T^{-1}(T^{-1})^* = S^{-1}AA^*(S^{-1})^* \le S^{-1}(S^{-1})^* = (S^*S)^{-1}.$$

⊟

Remarquons qu'en modifiant légèrement l'énoncé de ce lemme, nous pouvons démontrer un résultat plus général.

Proposition B.3.16 — Soient S et T des opérateurs réguliers, sur un module hilbertien E, T étant bijectif.

(i) $\exists A \in \mathrm{Mor}(E)$, tel que $\|A\| \le 1$ et $AT \subset S$.

(ii) $\mathrm{Dom}T \subset \mathrm{Dom}S$ et $\forall x \in \mathrm{Dom}T$, $\|T(x)\| \ge \|S(x)\|$.

(iii) $(1 + S^*S)^{-1} \ge (1 + T^*T)^{-1}$.

(iv) $\exists a > 1$, $(1 + S^*S)^{-a} \ge (1 + T^*T)^{-a}$.

On a alors $(iv) \Rightarrow (i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

Démonstration— Posons $S_0 = (1 + S^*S)^{\frac{1}{2}}$ et $T_0 = (1 + T^*T)^{\frac{1}{2}}$.

1. $(iv) \Rightarrow (i)$ D'après le lemme précédent, la propriété est vérifiée pour S_0 et T_0 : il existe un morphisme A_0, de norme $\|A_0\| \le 1$ tel que $S_0 = A_0T_0$. Nous savons par le lemme (B.3.14) que $(iv) \Rightarrow (iii)$, et donc $S_0^{-2} \ge T_0^{-2}$. Or les morphismes $Q(S) = SS_0^{-1}$ et $Q(T) = TT_0^{-1}$ vérifient la propriété suivante :

$$Q(T)^*Q(T) + T_0^{-2} = I = Q(S)^*Q(S) + S_0^{-2}.$$

On en tire l'inégalité $Q(T)^*Q(T) \geq Q(S)^*Q(S)$ et donc $\|Q(S)\| \leq \|Q(T)\|$. Or on peut écrire $A = ST^{-1}$ sous la forme $A = Q(S)A_0Q(T)^{-1}$. A est donc bien un morphisme de norme $\|A\| \leq 1$.

2. $(ii) \Leftrightarrow (i)$ se démontre de la même manière que dans le lemme.
3. $(ii) \Rightarrow (iii)$ Nous savons que $\mathrm{Dom} S_0 = \mathrm{Dom} S$ et $\mathrm{Dom} T_0 = \mathrm{Dom} T$. La condition (ii) pour les opérateurs S et T est donc équivalente à la condition (ii) pour les opérateurs S_0 et T_0. Or cette dernière implique, d'après le lemme précédent, la condition $S_0^{-2} \geq T_0^{-2}$, soit la condition (iii).

■

Bibliographie

[AG91] Serge Alinhac and Patrick Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser.* InterEditions, Paris, 1991.

[AS71] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators. IV. *Ann. of Math. (2)*, 93 :119–138, 1971.

[Ati67] M. F. Atiyah. *K-theory.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.

[Baa88a] Saad Baaj. Calcul pseudo-différentiel et produits croisés de C^*-algèbres. I. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 307(11) :581–586, 1988.

[Baa88b] Saad Baaj. Calcul pseudo-différentiel et produits croisés de C^*-algèbres. II. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 307(12) :663–666, 1988.

[BF01] Moulay Benameur and Thierry Fack. On von neumann spectral triples. Preprint, 2001.

[BG87] Jean-Luc Brylinski and Ezra Getzler. The homology of algebras of pseudodifferential symbols and the noncommutative residue. *K-Theory*, 1(4) :385–403, 1987.

[BJ83] Saad Baaj and Pierre Julg. Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C^*-modules hilbertiens. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 296(21) :875–878, 1983.

[BN01] Moulay Benameur and Victor Nistor. Homology of complete symbols and non commutative geometry. Preprint, 2001.

[CL92] Alain Connes and John Lott. The metric aspect of noncommutative geometry. In *New symmetry principles in quantum field theory (Cargèse, 1991)*, pages 53–93. Plenum, New York, 1992.

[CLN85] César Camacho and Alcides Lins Neto. *Geometric theory of foliations.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985. Translated from the Portuguese by Sue E. Goodman.

[CM95] A. Connes and H. Moscovici. The local index formula in noncommutative geometry. *Geom. Funct. Anal.*, 5(2) :174–243, 1995.

[Co79] Alain Connes. Sur la théorie non commutative de l'intégration. In *Algèbres d'opérateurs (Sém., Les Plans-sur-Bex, 1978)*, pages 19–143. Springer, Berlin, 1979.

[Co81] Alain Connes. Feuilletages et algèbres d'opérateurs. In *Bourbaki Seminar, Vol. 1979/80*, pages 139–155. Springer, Berlin, 1981.

[Co82] A. Connes. A survey of foliations and operator algebras. In *Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980)*, pages 521–628. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[Co88a] A. Connes. The action functional in noncommutative geometry. *Comm. Math. Phys.*, 117(4) :673–683, 1988.

[Co88b] A. Connes. Trace de Dixmier, modules de Fredholm et géométrie riemannienne. *Nuclear Phys. B Proc. Suppl.*, 5b :65–70, 1988. Conformal field theories and related topics (Annecy-le-Vieux, 1988).

[Co94] Alain Connes. *Noncommutative geometry.* Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.

[CS81] Alain Connes and Georges Skandalis. Théorème de l'indice pour les feuilletages. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 292(18) :871–876, 1981.

[CS84] A. Connes and G. Skandalis. The longitudinal index theorem for foliations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 20(6) :1139–1183, 1984.

[Deb00] Claire Debord. *Feuilletages singuliers et groupoïdes d'holonomie.* PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2000.

[Dix69] Jacques Dixmier. *Les C^*-algèbres et leurs représentations.* Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1969. Deuxième édition. Cahiers Scientifiques, Fasc. XXIX.

[FGLS96] Boris V. Fedosov, François Golse, Eric Leichtnam, and Elmar Schrohe. The noncommutative residue for manifolds with boundary. *J. Funct. Anal.*, 142(1) :1–31, 1996.

[FS80] Thierry Fack and Georges Skandalis. Structure des idéaux de la C^*-algèbre associée à un feuilletage. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 290(22) :A1057–A1059, 1980.

[FS82a] T. Fack and G. Skandalis. Sur les représentations et idéaux de la C^*-algèbre d'un feuilletage. *J. Operator Theory*, 8(1) :95–129, 1982.

[FS82b] Thierry Fack and Georges Skandalis. Some properties of the C^*-algebra associated with a foliation. In *Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980)*, pages 629–632. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[GI95] Daniele Guido and Tommaso Isola. Singular traces on semifinite von Neumann algebras. *J. Funct. Anal.*, 134(2) :451–485, 1995.

[GI00a] Daniele Guido and Tommaso Isola. Noncommutative Riemann integration and Novikov-Shubin invariants for open manifolds. *J. Funct. Anal.*, 176(1) :115–152, 2000.

[GI00b] Daniele Guido and Tommaso Isola. Singular traces, dimensions and Novikov-Shubin invariants. In *Operator theoretical methods (Timişoara, 1998)*, pages 151–171. Theta Found., Bucharest, 2000.

[Gil95] Peter B. Gilkey. *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem.* CRC Press, Boca Raton, FL, second edition, 1995.

[God91] Claude Godbillon. *Feuilletages.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1991. Études géométriques. [Geometric studies], With a preface by G. Reeb.

[GS95] Gerd Grubb and Robert T. Seeley. Weakly parametric pseudodifferential operators and Atiyah-Patodi-Singer boundary problems. *Invent. Math.*, 121(3) :481–529, 1995.

[HS83] M. Hilsum and G. Skandalis. Stabilité des C^*-algèbres de feuilletages. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 33(3) :201–208, 1983.

[Kas89] Christian Kassel. Le résidu non commutatif (d'après M. Wodzicki). *Astérisque*, (177-178) :Exp. No. 708, 199–229, 1989. Séminaire Bourbaki, Vol. 1988/89.

[Kor85] Yu. A. Kordyukov. A theorem on the identity of spectra for tangentially elliptic operators on foliated manifolds. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 19(4) :90–91, 1985.

[Kor93] Yu. A. Kordyukov. Quasiclassical asymptotics of the spectrum of elliptic operators in a foliated manifold. *Mat. Zametki*, 53(1) :145–147, 1993.

[Kor95] Yuri A. Kordyukov. Functional calculus for tangentially elliptic operators on foliated manifolds. In *Analysis and geometry in foliated manifolds (Santiago de Compostela, 1994)*, pages 113–136. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995.

[KV95] Maxim Kontsevich and Simeon Vishik. Geometry of determinants of elliptic operators. In *Functional analysis on the eve of the 21st century, Vol. 1 (New Brunswick, NJ, 1993)*, pages 173–197. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.

[Lan95] E. C. Lance. *Hilbert C^*-modules.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995. A toolkit for operator algebraists.

[Les99] Matthias Lesch. On the noncommutative residue for pseudodifferential operators with log-polyhomogeneous symbols. *Ann. Global Anal. Geom.*, 17(2) :151–187, 1999.

[Lot92a] John Lott. Heat kernels on covering spaces and topological invariants. *J. Differential Geom.*, 35(2) :471–510, 1992.

[Lot92b] John Lott. Higher eta-invariants. *K-Theory*, 6(3) :191–233, 1992.

[LP00] Matthias Lesch and Markus J. Pflaum. Traces on algebras of parameter dependent pseudodifferential operators and the eta-invariant. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(11) :4911–4936, 2000.

[Mel95] Richard B. Melrose. The eta invariant and families of pseudodifferential operators. *Math. Res. Lett.*, 2(5) :541–561, 1995.

[Mon98] Bertrand Monthubert. *Groupoïdes et calcul pseudo-différentiel sur les variétés à coins.* PhD thesis, Université Denis Diderot, Paris, 1998.

[MP97] Bertrand Monthubert and François Pierrot. Indice analytique et groupoïdes de Lie. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(2) :193–198, 1997.

[MS88] Calvin C. Moore and Claude Schochet. *Global analysis on foliated spaces.* Springer-Verlag, New York, 1988. With appendices by S. Hurder, Moore, Schochet and Robert J. Zimmer.

[NWX99] Victor Nistor, Alan Weinstein, and Ping Xu. Pseudodifferential operators on differential groupoids. *Pacific J. Math.*, 189(1) :117–152, 1999.

[Phi87] John Phillips. The holonomic imperative and the homotopy groupoid of a foliated manifold. *Rocky Mountain J. Math.*, 17(1) :151–165, 1987.

[Pla75] J. F. Plante. Foliations with measure preserving holonomy. *Ann. of Math. (2)*, 102(2) :327–361, 1975.

[Pon96] Raphaël Ponge. Résidu de Wodzicki. Mémoire de Magistère, Ecole Normale Supérieure, 1996.

[Pon00] Raphaël Ponge. *Calcul hypoelliptique sur les variétés de Heisenberg, résidu non commutatif et géométrie pseudo-hermitienne.* PhD thesis, Université Paris-Sud, Orsay, 2000.

[Pri95] R. Prinzis. *Traces résiduelles et asymptotiques du spectre d'opérateurs pseudo-différentiels.* PhD thesis, Université de Lyon, 1995.

[Ren80] Jean Renault. *A groupoid approach to C^*-algebras.* Springer, Berlin, 1980.

[Ren82] Jean N. Renault. C^*-algebras of groupoids and foliations. In *Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980)*, pages 339–350. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[RS75] David Ruelle and Dennis Sullivan. Currents, flows and diffeomorphisms. *Topology*, 14(4) :319–327, 1975.

[Sch97a] Elmar Schrohe. Noncommutative residues and manifolds with conical singularities. *J. Funct. Anal.*, 150(1) :146–174, 1997.

[Sch97b] Elmar Schrohe. Wodzicki's noncommutative residue and traces for operator algebras on manifolds with conical singularities. In *Microlocal analysis and spectral theory (Lucca, 1996)*, pages 227–250. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.

[Sch99] Elmar Schrohe. Noncommutative residues, Dixmier's trace, and heat trace expansions on manifolds with boundary. In *Geometric aspects of partial differential equations (Roskilde, 1998)*, pages 161–186. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[See67] R. T. Seeley. Complex powers of an elliptic operator. In *Singular Integrals (Proc. Sympos. Pure Math., Chicago, Ill., 1966)*, pages 288–307. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967.

[Shu87] M. A. Shubin. *Pseudodifferential operators and spectral theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the Russian by Stig I. Andersson.

[Ska96] Georges Skandalis. C^*-algèbres et modules hilbertiens. Cours de DEA, Université Paris 7, 1996.

[Ska01] Georges Skandalis. Géométrie non commutative, opérateur de signature transverse et algèbres de Hopf. Exposé au séminaire Bourbaki n 892, 2001.

[Tay81] Michael E. Taylor. *Pseudodifferential operators.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981.

[Trè80] François Trèves. *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators. Vol. 1.* Plenum Press, New York, 1980. Pseudodifferential operators, The University Series in Mathematics.

[Vas97] Stéphane Vassout. Trace de Dixmier. Rapport de Stage, Ecole Polytechnique, 1997.

[Win83] H. E. Winkelnkemper. The graph of a foliation. *Ann. Global Anal. Geom.*, 1(3) :51–75, 1983.

[WN92] S. L. Woronowicz and K. Napiórkowski. Operator theory in the C^*-algebra framework. *Rep. Math. Phys.*, 31(3) :353–371, 1992.

[Wod82] Mariusz Wodzicki. Spectral asymmetry and zeta functions. *Invent. Math.*, 66(1) :115–135, 1982.

[Wod84] M. Wodzicki. Local invariants of spectral asymmetry. *Invent. Math.*, 75(1) :143–177, 1984.

[Wod87] Mariusz Wodzicki. Noncommutative residue. I. Fundamentals. In *K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986)*, pages 320–399. Springer, Berlin, 1987.