Feuilletages et résidu non commutatif longitudinal

Opérateurs pseudo-différentiels classiques

$$\mathcal{S}^{m_0}(U) = \{a(x,\xi) \in \mathcal{C}^\infty(U \times \mathbb{R}^n), \forall K, \alpha, \beta\ \exists C_{K,\alpha,\beta}$$
$$\sup_{x \in K} \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \leq C_{K,\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m_0-|\beta|}\}$$
$$\mathcal{S}^m_{hom}(U) = \{a(x,\xi) \in \mathcal{S}^{m_0}, \exists a_{m-j} \text{ hom. de } d^\circ\ m-j$$
$$a(x,\xi) \sim \sum_j a_{m-j}(x,\xi)\}$$

$P =$ Op$(a) : \mathcal{C}_c^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(U)$ défini par

$$(Pu)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} a(x,\xi)\hat{u}(\xi) e^{i<x,\xi>} d\xi.$$

$\mathcal{P}^m(U)$ invariant par difféomorphismes
$\Rightarrow$ s'étend aux variétés.
a_m est le *symbole principal* de l'opérateur P.
Pour une variété, $a_m \in \mathcal{C}^\infty(S^*M)$.

Résidu de Wodzicki d'un OPD P sur M variété compacte de dim. n.

1. Def. locale : $\mathrm{Res}\,(P) = \int_M \mathrm{res}\,_x(P)$ avec
$$\mathrm{res}\,_x(P) = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi|=1} a_{-n}(x,\xi)d\xi$$
2. Donné par le coef. log. du dvp. asymptotique du noyau de Schwartz $k_P(x,y)$ en $x = y$.
3. Def globale : $\mathrm{Res}\,(P) = m\,\mathrm{res}\,_{z=0}Tr(PA^{-z})$
4. Donné par le coef. log. de $m\mathrm{Tr}(Pe^{-tA})$ quand $t \to 0$.
5. Donne trace résiduelle sur $\mathcal{P}^{\mathbb{Z}}(M)$, unique si M connexe et $n > 1$.

But :
Développer un analogue du résidu de Wodzicki pour les opérateurs pseudo-différentiels *longitudinaux* le long des feuilles d'un feuilletage mesuré et *compact*

1. Feuilletages
2. OPD longitudinaux et C^*-algèbres
3. Puissances complexes
4. Modules de Sobolev
5. Résidu non commutatif longitudinal

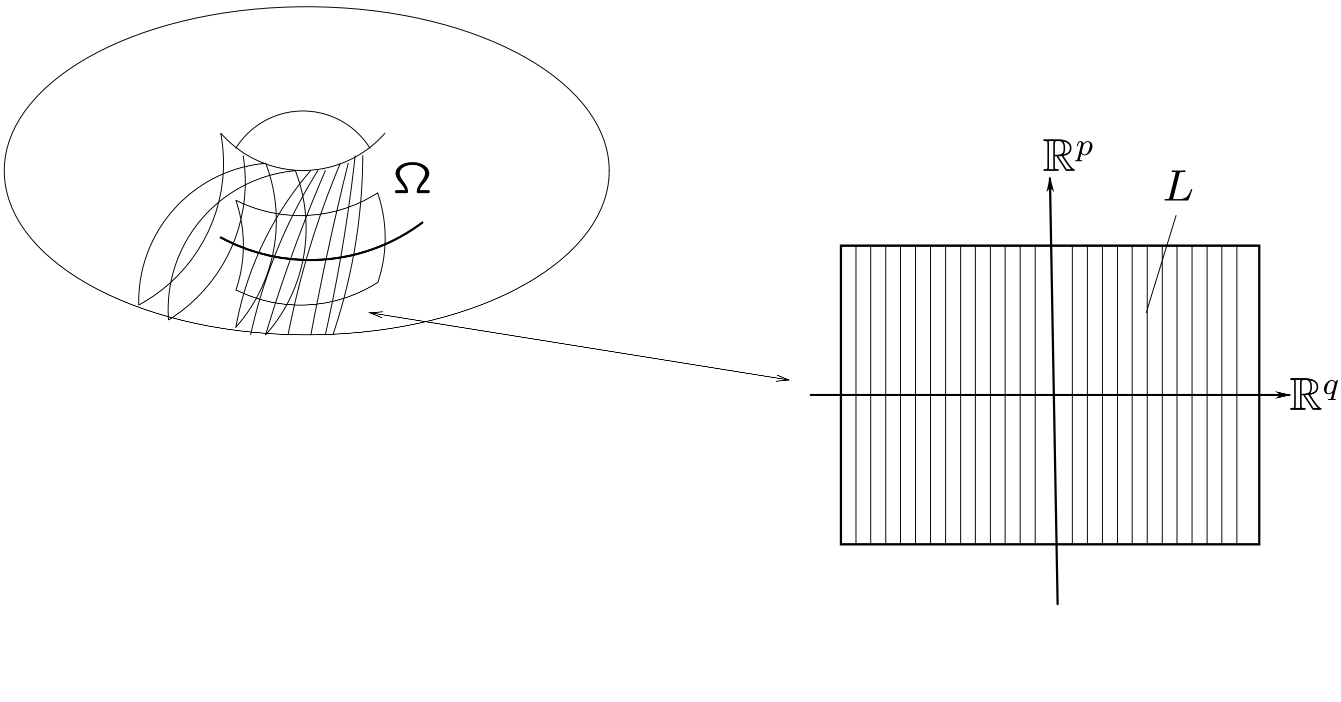
Feuilletages

Définition

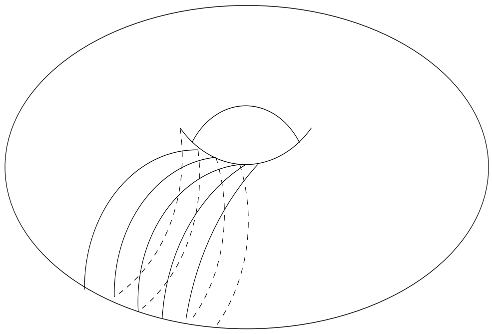
Feuilletage $= (M, \mathcal{F})$ avec M variété lisse de dim $p+q$ et atlas d'*ouverts trivialisants* $\Omega \simeq L \times T$, $L \subset \mathbb{R}^p$ et $T \subset \mathbb{R}^q$ tq les changements de cartes sont de la forme

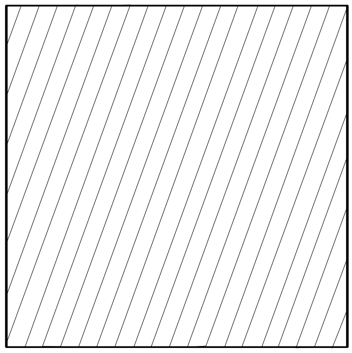
$$l' = \psi(l,t) \quad t' = \Gamma(t)$$

ψ $\mathcal{C}^\infty$ et Γ difféo. local.

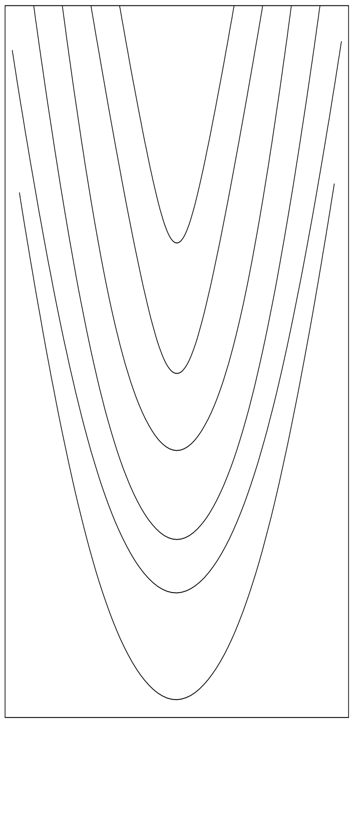


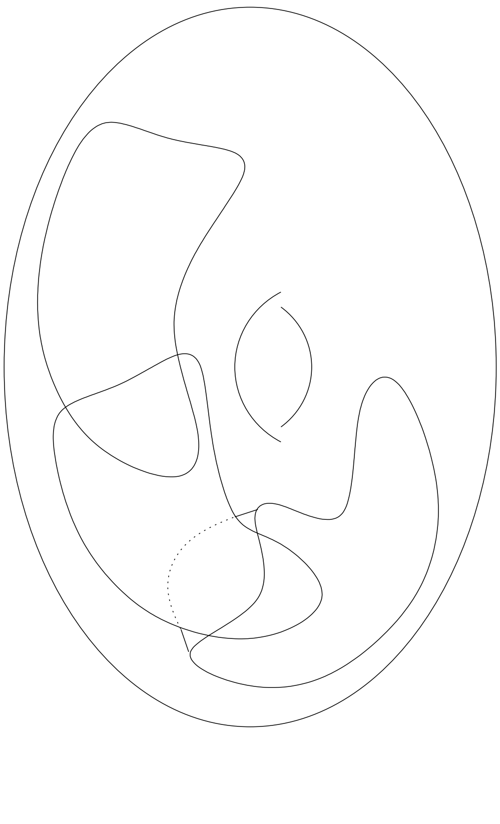
Le feuilletage de Kronecker de $\mathbb{T}^2$





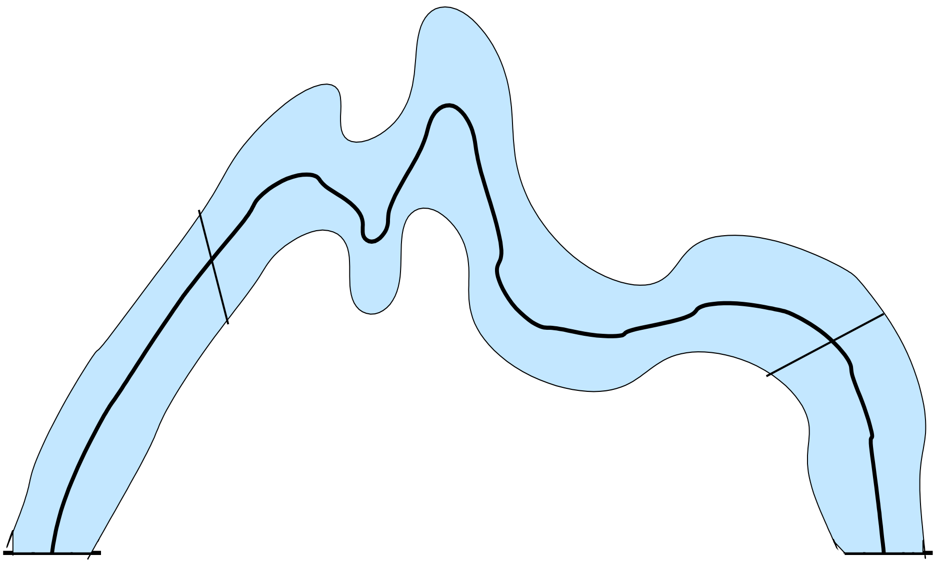
Le feuilletage de Reeb de $D^2 \times S^1$



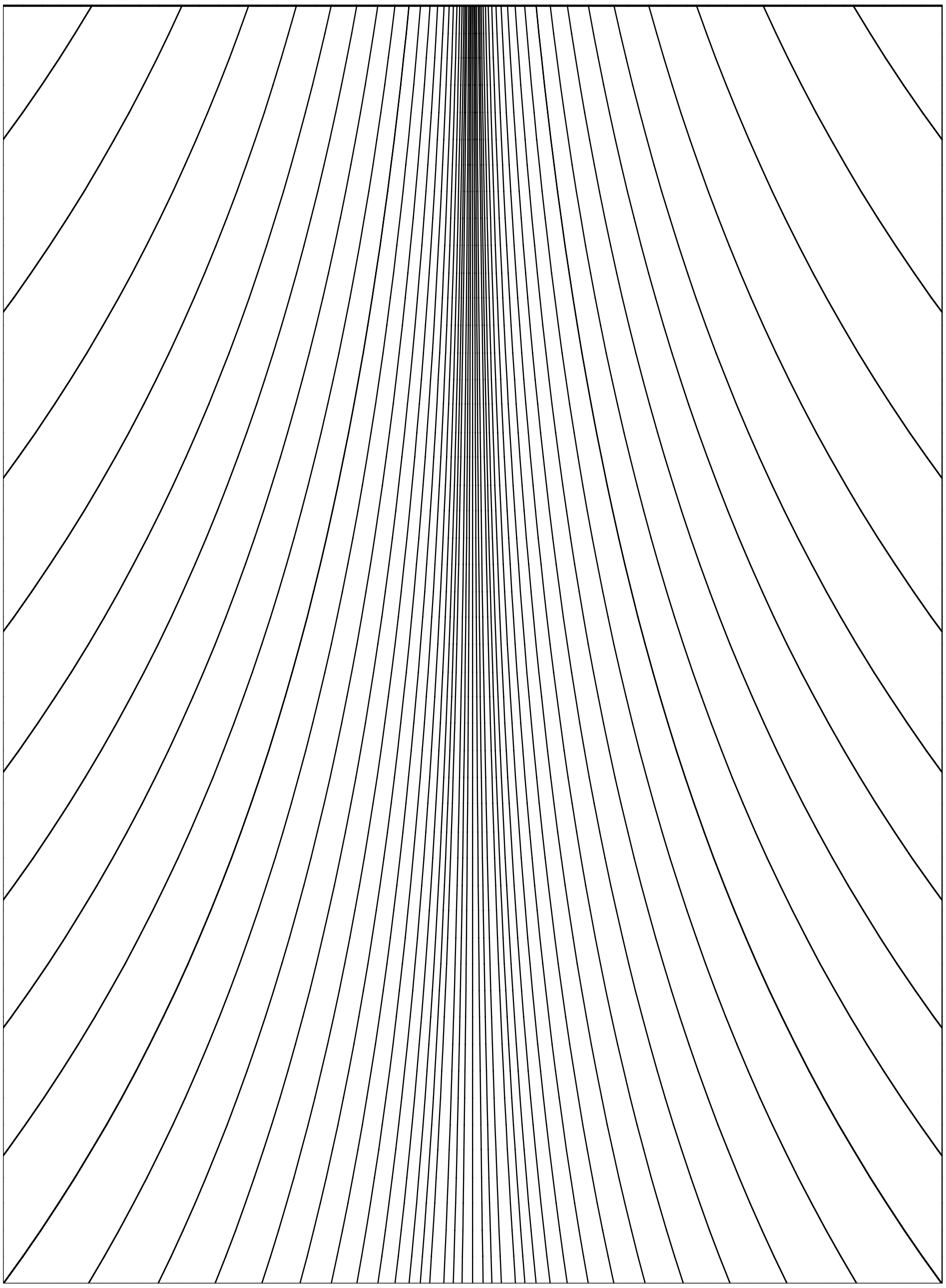


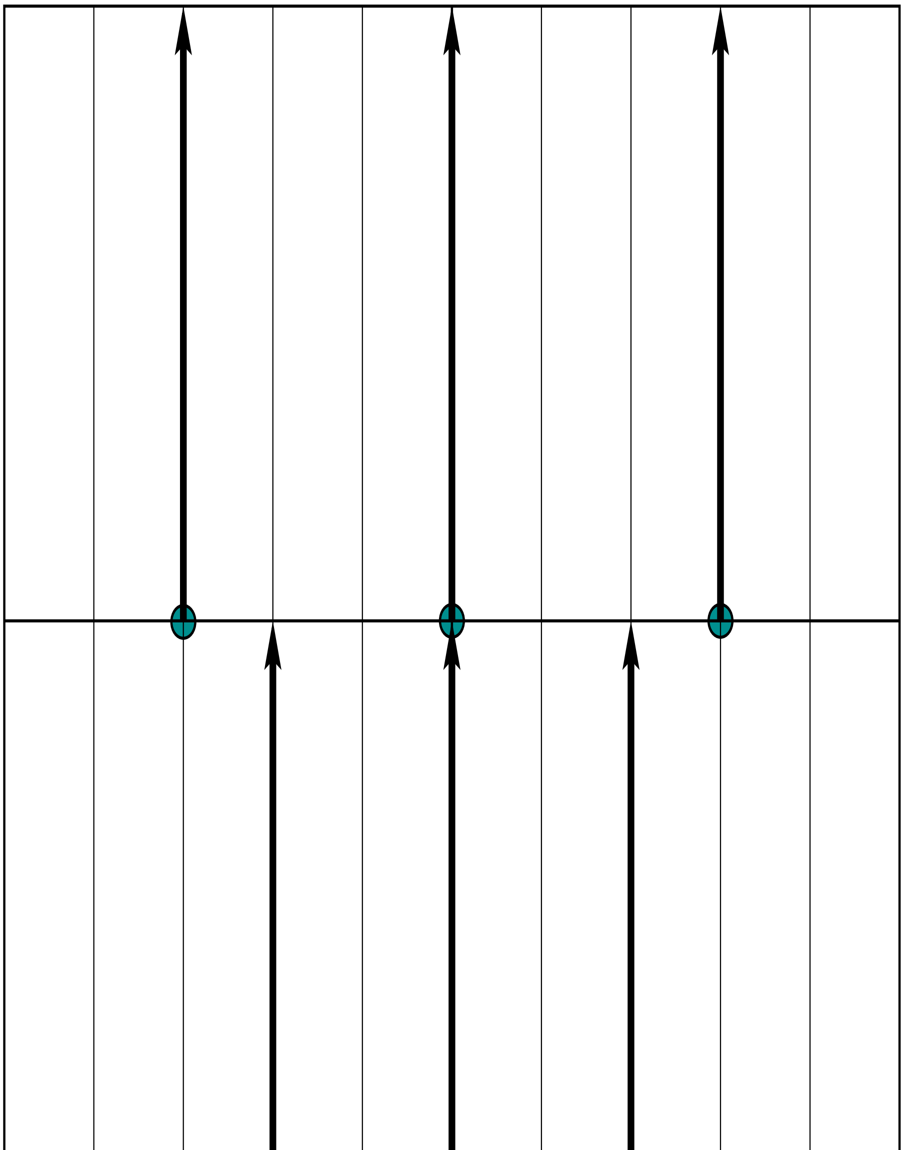
Groupoïde d'holonomie

Holonomie d'un chemin =
"Transport parallèle du voisinage transverse"



$G = \mathcal{G}^{fond}/\{h(\gamma_1) = h(\gamma_2)\}$.
G groupoïde de Lie de dim $2p+q$, non séparé en général.
G^x revêtement d'holonomie au-dessus de la feuille de x.
1-densité sur $\mathcal{F}$
$\rightsquigarrow$ Système de Haar λ fixé $\mathcal{C}^\infty$ sur G.
$G \rightsquigarrow\ C_r^*(G),\ C^*(G)$.





Courants de Ruelle-Sullivan et distributions transverses

Courant de dim. $d =$ Forme linéaire sur $\Omega^d_{\mathbb{C}}(M)$.

Courant feuilleté= dim p et tq :

$$\langle C, \omega \rangle = 0 \text{ si } \omega_{|F} = 0.$$

Théorème[R-S] (1) $\Leftrightarrow$ (2)

1. Courant fermé feuilleté
2. Distribution transverse invariante par holonomie

Positivité $\Longleftrightarrow$ (Distribution = Mesure)

Mesure transverse μ + Système de Haar λ

$\rightsquigarrow$ Mesures ν sur M et $\nu \circ \lambda$ sur G

$\rightsquigarrow$ Trace s.c.i. sur $C^*_r(G)$:

$$\mathrm{Tr}(f^* * f) = \int_{x \in M} (f^* * f) d\nu(x) = \|f\|^2_{\mathcal{L}^2(G, \nu \circ \lambda)}$$

Opérateurs pseudo-différentiels longitudinaux [C]

Définition Globale

P op. sur $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ tq

- $\exists (P_x)_{x\in M},\ (Pf)(\gamma) = (P_{s(\gamma)}f)(\gamma)$,
- $P_{s(\gamma)}U_\gamma = U_\gamma P_{r(\gamma)}$,
- $(P_x)_{x\in M}$ famille $\mathcal{C}^\infty$ OPD à supp. uniforme.

$\exists k$ distribution à support compact tq

$$Pf(\gamma) = \int_{G_x} k(\gamma\gamma'^{-1})f(\gamma')d\lambda_x(\gamma') = k * f(\gamma).$$

Définition locale

$\Omega \simeq L \times T$, $P = (P_t)_{t\in T}$ famille $\mathcal{C}^\infty$ OPD sur $L \times \{t\}$ à support compact ($\subset L \times L \times T$).

Symbole principal

$a_m(P) \in C^\infty(T^*\mathcal{F} - \{0\})$ hom. de d°m.

Ellipticité

Si P est elliptique $\exists Q$ G-OPD de d'ordre $-m$ tq

$$PQ - I \text{ et } QP - I \in \Psi_c^{-\infty}(G).$$

Interprétation C^*-algébrique

$E = C^*(G)$ mod. de Hilbert pour $\langle a, b \rangle = a^* b$.

Proposition[Connes,Monthubert-Pierrot]
$P \in \Psi_c^m(G)$

1. Si $\Re e\, m < 0$, P s'étend en $\overline{P} \in \mathcal{K}(E)$.
2. Si $\Re e\, m = 0$, P s'étend en $\overline{P} \in$ Mor(E).

Proposition
P elliptique $\Rightarrow$ P régulier [Baaj]

$\Rightarrow$ $(1 + P^* P)^{-\frac{1}{2}} \in C^*(G)$

$\Rightarrow$ Calcul fonctionnel continu

$\Rightarrow$ Image de P/repr. $\rightsquigarrow$ $P \otimes_\pi 1$ op. régulier tq
$(P \otimes_\pi 1)^* = P^* \otimes_\pi 1$,égalités du spectre,...

Régularisants à support non compact
$R \in C^*(G)$, $PRP \in C^*(G)$

Puissances complexes

G-opérateurs dépendant d'un paramètre = généralisation du travail de Shubin.
Symboles dépendant de 2 paramètres : $\sigma(x,\xi,\lambda,t)$
$\lambda \in$ cône = variable cotangente suppl.
$t \mapsto \sigma(x,\xi,\lambda,t)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition

A op. diff. ell. à s.c. , $\mathrm{Sp}(A) \subset [\varepsilon, +\infty[$.
$(A-\lambda)$ G-op à par. ell. $\Rightarrow \exists B_\lambda \in \Psi_c^{-m}(G,\Lambda)$

$$(A-\lambda)B_\lambda = I + R_\lambda \text{ et } B_\lambda(A-\lambda) = I + S_\lambda$$

$R_\lambda P$ et $S_\lambda P$ rég. à support compact indép. de λ

$$\|PR_\lambda P\| = \bigcirc(|\lambda|^{-N}) \text{ et } \|PS_\lambda P\| = \bigcirc(|\lambda|^{-N}).$$

Théorème

$$A^s = B(s) + R(s)$$

$B(s)$ G-OPD à support compact,
$R(s)$ régularisant (généralisé).

Modules de Sobolev

$H^s(P) =$ Dom$(1 + P^*P)^{s/2m}$ prod scal :

$$\langle x,\, y\rangle_s = \langle (1 + P^*P)^{\frac{s}{2m}} x,\, (1 + P^*P)^{\frac{s}{2m}} y\rangle.$$

Théorème

$H^s(P)$ ne dépend pas de P.

Propriétés des modules de Sobolev

– Régularisants : R rég. $\Leftrightarrow R \in \cap_{s,t}$ Mor(H^s, H^t).

– Inclusions : $s > s'$, $H^s \hookrightarrow H^{s'}$ compact.

– Dualité : H^s dual de H^{-s}.

– Action d'un OPD : Si $P \in \Psi^m(G)$,
$P \in$ Mor(H^s, H^{s-m_0}).

Algèbre des OPD longitudinaux

$\Psi^m(G)$ eng. par $\Psi^{-\infty}(G)$ et $\Psi^m_c(G)$.

$\Psi^m(G) \circ \Psi^n(G) \subset \Psi^{m+n}(G)$.

$\rightsquigarrow$ Action nat. sur $H^{-\infty}$

$\Psi^{-\infty}(G)$ idéal de l'alg. inv. $\Psi(G)$.

Résidu non commutatif longitudinal

Déf. Locale $\mathrm{Res}_{\mu}(P) = \int_{t\in T} \mathrm{Res}\,(P_t)d\mu(t)$.

Coef Logarithmique

Le coef $c_P(x,t) \rightsquigarrow$ 1-densité sur $\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} k(x,y,t) &= \sum_{j=0}^{r} a_{j-m-p}(x, x-y, t) \\ &\quad -c_P(x,t)\log|x-y| + R(x,y,t) \end{aligned}$$

Théorème[cf Kontsevich-Vishik]

1. $P \mapsto \mathrm{Tr}(P)$ holom. sur $\Psi^{tr}(G)$
   et $\exists!$ prol. anal. TR sur $\Psi^{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}(G)$.

2. $z \mapsto P(z)$ hol. tq ord $P(z) = z$.
   $z \mapsto \mathrm{TR}(P(z))$ mérom.sur $\mathbb{C}$
   avec pôles simples $\in \mathbb{Z}$.

   $$\mathrm{res}_{z=k_0}\,\mathrm{TR}(P(z)) = -\,\mathrm{Res}_{\mu}(P(k_0)).$$

   En particulier

   $$\mathrm{res}_{s=0}\,\mathrm{TR}(PA^{-s}) = \frac{1}{m}\mathrm{Res}_{\mu}(P).$$

Fonction ζ et Développement du noyau de la chaleur

$s \mapsto \zeta_A(s) = \mathrm{Tr}(A^{-s})$ est méromorphe avec au + des pôles simples en $s_j = \frac{j-p}{m}$ et

$$\mathrm{res}_{\,s=s_j}\zeta_A(s) = \frac{1}{m}\,\mathrm{Res}_{\,\mu}(A^{\frac{p-j}{m}}).$$

On a $\mathcal{M}(Tr(e^{-tA}))(s) = \Gamma(s)\zeta_A(s) \Rightarrow$

$$\mathrm{Tr}(Pe^{-tA}) \overset{t\to 0}{\sim} \alpha_n(P,A) + \sum_{n\neq j=0}^{\infty} \alpha_j(A) t^{\frac{j-n-r}{m}}$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(A,P) t^k \ln t.$$

En particulier $\beta_0(A,P) = \frac{1}{m}\,\mathrm{Res}_{\,\mu}(P)$.

Résidus et traces sur $\Psi^{\mathbb{Z}}(G)$

Proposition

Résidu NC donne trace sur $\Psi^{\mathbb{Z}}(G)$.

Théorème [cf Benameur-Nistor]

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)

1. Trace sur $\Psi^{\mathbb{Z}}_{\infty}(G)$ nulle sur $\Psi^{-\infty}_{\infty}(G)$
2. Distribution transverse invar/holonomie
3. Courant fermé feuilleté

Résidu et trace de Dixmier

Théorème[Benameur-Fack,V]

P OPD d'ordre $-p \Rightarrow P \in L^{(1,\infty)}(W^*_\mu(M,\mathcal{F}))$

$$\mathrm{Tr}_\omega(P) = \frac{1}{p}\,\mathrm{Res}\,(P).$$

Triplet Spectral de vN

$(\mathcal{A}, \mathcal{M}, D)$, de dim d et de spectre de dim. simple Sd avec :

– $\mathcal{M}$ AvN + trace τ fidèle, normale, sf,

– $\mathcal{A}$ sous-alg. de $\mathcal{M}$,

– D auto-adj. non borné aff. $\mathcal{M}$ et τ-mesurable,

1. $a\,\mathrm{Dom}D \subset \mathrm{Dom}D$ et $[D, a] \in \mathcal{M}$;
2. a et $[D, a] \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Dom}(\delta^n)$ avec $\delta(b) = [|D|\,, b]$;
3. $a(D+i)^{-d} \in \mathcal{L}^1(\mathcal{M})$;
4. $\mathcal{B} =$ alg. engendrée par $\delta^n(a)$ et $[D, a]$, Sd discret, $\zeta(b) = \tau(b\,|D|^{-z})$ holom. sur $\mathbb{C} - Sd$ avec au + pôles simples $\in Sd$.