ÉQUIVALENCE DE CATÉGORIES ENTRE SYSTÈMES DE COEFFICIENTS ET D'IDEMPOTENTS

THOMAS LANARD

Résumé. Les systèmes d'idempotents cohérents de Meyer et Solleveld permettent de construire des sous-catégories de Serre de $\mathrm{Rep}_R(G)$, la catégorie des représentations lisses d'un groupe p-adique G à coefficients dans R. Ils ont en particulier servi à construire des décompositions en niveau 0 lorsque $R = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$, $\ell \neq p$, par Dat pour GL_n et l'auteur pour un groupe plus général. Wang a démontrer dans le cas de GL_n que la sous-catégorie associée à un système d'idempotents est équivalente à une catégorie de systèmes de coefficients sur l'immeuble de Bruhat-Tits. Ce résultat à servi à Dat pour démontrer une équivalence entre un bloc arbitraire de niveau zéro de GL_n et un bloc unipotent d'un autre groupe. Dans cet article, nous généralisons l'équivalence de catégorie de Wang à un groupe réductif connexe sur un corps local non archimédien.

Abstract. The consistent systems of idempotents of Meyer and Solleveld allow to construct Serre subcategories of $\mathrm{Rep}_R(G)$, the category of smooth representations of a p-adic group G with coefficients in R. In particular, they were used to construct level 0 decompositions when $R = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$, $\ell \neq p$, by Dat for GL_n and the author for a more general group. Wang proved in the case of GL_n that the sub-category associated with a system of idempotents is equivalent to a category of coefficient systems on the Bruhat-Tits building. This result was used by Dat to prove an equivalence between an arbitrary level zero block of GL_n and a unipotent block of another group. In this paper, we generalize Wang's equivalence of category to a connected reductive group on a non-archimedean local field.

Introduction

Soit F un corps local non archimédien et G les F-points d'un groupe réductif connexe sur F. On note BT l'immeuble de Bruhat-Tits semi-simple associé à G. L'immeuble est un complexe polysimplicial, partiellement ordonné par la relation d'ordre $\sigma \leq \tau$ si σ est une facette de τ.

Soit R un anneau commutatif dans lequel p est inversible. On appelle Γ un système de coefficients sur BT à coefficients dans R un foncteur contravariant de la catégorie $(\mathrm{BT}, \leq)$ vers la catégorie des R-modules. Autrement dit, c'est la donnée de R-modules $(V_\sigma)_{\sigma \in \mathrm{BT}}$ et de R-morphismes $\varphi_\tau^\sigma : V_\sigma \to V_\tau$ si $\tau \leq \sigma$, soumis aux conditions : $\varphi_\sigma^\sigma = id$, et $\varphi_\omega^\tau \circ \varphi_\tau^\sigma = \varphi_\omega^\sigma$ si $\omega \leq \tau \leq \sigma$. Un système de coefficients est dit G-équivariant si pour tout $g \in G$ et pour tout $\sigma \in \mathrm{BT}$ il existe un isomorphisme $\alpha_{g,\sigma} : V_\sigma \to V_{g\sigma}$ compatible avec les φ_τ^σ et tel que $\alpha_{1,\sigma} = id$, $\alpha_{g,h\sigma} \circ \alpha_{h,\sigma} = \alpha_{gh,\sigma}$. À Γ l'on associe un complexe de chaînes cellulaire gradué $C_*(\mathrm{BT}, \Gamma) = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{BT}} V_\sigma$ (voir le chapitre 1 pour plus de détails et la définition de la différentielle). L'homologie de $C_*(\mathrm{BT}, \Gamma)$ est alors notée $H_*(\mathrm{BT}, \Gamma)$.

Un exemple fondamental de systèmes de coefficients est donné par les travaux de Schneider et Stuhler [SS97]. Soit $\sigma \in \mathrm{BT}$ et nommons G_σ° le sous-groupe parahorique de G en σ. Schneider et Stuhler ont alors construit une filtration de G_σ° par des sous-groupes ouverts compacts $G_\sigma^\circ \supseteq U_\sigma^{(0)} \supseteq U_\sigma^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq U_\sigma^{(r)} \supseteq \cdots$. On associe alors à $r \in \mathbb{N}$ et V un RG-module lisse, le système de coefficients G-équivariant

$\sigma \mapsto V^{U_\sigma^{(r)}}$. Le complexe de chaines de ce système de coefficient fournit alors une résolution projective de V.

Meyer et Solleveld généralisent ce procédé dans [MS10]. Notons $\mathcal{H}_R(G)$ l'algèbre de Hecke de G à coefficients dans R. Soit $e = (e_\sigma)_{\sigma \in \mathrm{BT}}$ un système d'idempotents de $\mathcal{H}_R(G)$ vérifiant des propriétés de "cohérence" (voir [MS10, Def 2.1] ou Définition 1.1). Alors le foncteur $\sigma \to e_\sigma(V)$ fournit un système de coefficients G-équivariant. Ils ont alors montré que si l'on note $\mathrm{Rep}_R(G)$ la catégorie abélienne des représentations lisses de G à coefficients dans R et $\mathrm{Rep}_R^e(G)$ la sous-catégorie pleine des objets V de $\mathrm{Rep}_R(G)$ tels que $V = \sum_{x \in \mathrm{BT}_0} e_x V$, alors $\mathrm{Rep}_R^e(G)$ est une sous-catégorie de Serre ([MS10, Thm 3.1]).

Ce résultat a permis à Dat dans [Dat18] de reconstruire les blocs de niveau 0 de $\mathrm{GL}_n(F)$ pour $R = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$. Par la suite, des décompositions sur $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ ont été obtenues pour G se déployant sur une extension non-ramifiée de F dans [Lan18a] et [Lan18b].

Soit e un système d'idempotents cohérent. On suppose de plus que si x est un sommet de σ alors $e_\sigma \in \mathcal{H}_R(G_x)$, où G_x est le fixateur de x dans G. On appelle un e-système de coefficients, un système de coefficients G-équivariant tel que $\varphi_x^\sigma : V_\sigma \to V_x$ induise un isomorphisme $V_\sigma \xrightarrow{\sim} e_\sigma(V_x)$. On note $\mathrm{Coef}_e(G, R)$ la catégorie des e-systèmes de coefficients.

Pour V une R-représentation lisse de G, notons $\Gamma(V)$ le e-système de coefficients défini par $V_\sigma = e_\sigma(V)$. Nous démontrons alors le théorème suivant

Théorème. *Le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_R^e(G) & \to & \mathrm{Coef}_e(G,R) \\ V & \mapsto & \Gamma(V) \end{array}$$

admet un quasi-inverse $\Gamma \mapsto H_0(\mathrm{BT}, \Gamma)$, donc induit une équivalence de catégories.

Remarque.
(1) Dans le cas de $\mathrm{GL}_n(F)$, ce résultat a été prouvé par Wang dans [Wan17].
(2) L'équivalence sur $\mathrm{GL}_n(F)$ a été utilisée par Dat dans [Dat18] pour construire une équivalence de catégories entre un bloc arbitraire de $\mathrm{GL}_n(F)$ est un bloc unipotent d'un autre groupe réductif p-adique. Ainsi, nous pouvons espérer que ce théorème puisse servir pour montrer une équivalence entre les blocs dans un contexte plus général.
(3) Ce théorème s'applique en particulier à toutes les catégories construites dans [Lan18a] et [Lan18b].

Une partie de la preuve de Wang fonctionne de façon générale. Ce qui ne marche pas est la définition des applications locales qui utilisent des propriétés géométrique de l'immeuble de Bruhat-Tits spécifiques à GL_n. Nous nous attachons donc ici à redéfinir ces applications locales. Une fois cela fait et que l'on a montré qu'elles vérifient les mêmes propriétés, il ne nous reste plus qu'à appliquer le reste de la démonstration de Wang pour obtenir le résultat.

1. Systèmes de coefficients et d'impotents

Soit F un corps local non archimédien et G les F-points d'un groupe réductif connexe sur F.

On note BT l'immeuble de Bruhat-Tits semi-simple associé à G. L'immeuble est un complexe polysimplicial et l'on note BT_0 pour l'ensemble des polysimplexes de dimension 0, c'est-à-dire les sommets. Dans la suite on utilisera des lettres latines x,y,$\cdots$ pour parler des sommets et des lettres grecques pour parler des polysimplexes généraux σ,τ, $\cdots$. L'immeuble BT est partiellement ordonné par la relation d'ordre

$\sigma \leq \tau$ si σ est une facette de τ. Un ensemble de polysimplexes $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ est dit adjacent s'il existe un polysimplexe σ tel que $\forall i \in 1, \cdots, k$, $\sigma_i \leq \sigma$. Si x et y sont deux sommets adjacents on notera $[x, y]$ le plus petit polysimplexe contenant $x \cup y$. Notons également, pour σ,τ deux polysimplexes, $H(\sigma, \tau)$ l'enveloppe polysimpliciale de σ et τ, c'est-à-dire l'intersection de tous les appartements contenant $\sigma \cup \tau$.

Soit R un anneau commutatif dans lequel p est inversible. On appelle Γ un système de coefficients sur BT à coefficients dans R un foncteur contravariant de la catégorie $(\mathrm{BT}, \leq)$ vers la catégorie des R-modules. Autrement dit, c'est la donnée de R-modules $(V_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ et de R-morphismes $\varphi_\tau^\sigma : V_\sigma \to V_\tau$ si $\tau \leq \sigma$, soumis aux conditions : $\varphi_\sigma^\sigma = id$, et $\varphi_\omega^\tau \circ \varphi_\tau^\sigma = \varphi_\omega^\sigma$ si $\omega \leq \tau \leq \sigma$.

Pour associer un complexe de chaînes cellulaire à Γ, on équipe chaque polysimplexe d'une orientation qui induit une orientation sur chacune des sous-facettes. On définit

$$\epsilon_{\tau\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau \leq \sigma \text{ avec des orientations compatibles} \\ -1 & \text{si } \tau \leq \sigma \text{ avec des orientations opposées} \\ 0 & \text{si } \tau \text{ n'est pas une facette de } \sigma \end{cases}$$

Le complexe de chaînes cellulaire $C_*(\mathrm{BT}, \Gamma)$ sur BT à coefficients Γ est le complexe de chaînes $\mathbb{N}$-gradué

$$C_*(\mathrm{BT}, \Gamma) := \bigoplus_{\sigma\in\mathrm{BT}} V_\sigma$$

avec V_σ en degré $\deg(\sigma)$, muni de la différentielle

$$\delta((v_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}) = \sum_{\tau\in\mathrm{BT}} \epsilon_{\tau\sigma}\varphi_\sigma^\tau(v_\sigma).$$

L'homologie de $C_*(\mathrm{BT}, \Gamma)$ est alors notée $H_*(\mathrm{BT}, \Gamma)$.

Un système de coefficients est dit G-équivariant si $\forall g \in G, \forall \sigma \in \mathrm{BT}$ il existe un isomorphisme $\alpha_{g,\sigma} : V_\sigma \to V_{g\sigma}$ compatible avec les φ_τ^σ et tel que $\alpha_{1,\sigma} = id$, $\alpha_{g,h\sigma} \circ \alpha_{h,\sigma} = \alpha_{gh,\sigma}$.

Nous pouvons construire des systèmes de coefficients G-équivariants à partir d'un RG-module lisse V et d'un système cohérent d'idempotents. On munit G d'une mesure de Haar et on note $\mathcal{H}_R(G)$ l'algèbre de Hecke à coefficients dans R, c'est-à-dire l'algèbre des fonctions de G dans R localement constantes et à support compact.

1.1. **Définition.** On dit qu'un système d'idempotents $e = (e_x)_{x\in\mathrm{BT}_0}$ de $\mathcal{H}_R(G)$ est cohérent si les propriétés suivantes sont satisfaites :

(1) $e_x e_y = e_y e_x$ lorsque x et y sont adjacents.
(2) $e_x e_z e_y = e_x e_y$ lorsque $z \in H(x, y)$ et z est adjacent à x.
(3) $e_{gx} = g e_x g^{-1}$ quel que soit $x \in \mathrm{BT}_0$ et $g \in G$.

Si e est un système d'idempotents cohérent et V est un RG-module lisse, alors le foncteur $\sigma \to e_\sigma(V)$ fournit un système de coefficients G-équivariant.

Soit e un système d'idempotents cohérent sur BT. On dira que e satisfait la condition $(*)$ si

$(*)$ Pour tout sommet x et tout polysimplexe σ contenant x on a $e_\sigma \in \mathcal{H}_R(G_x)$

où G_x désigne le fixateur de x.

Alors si e satisfait $(*)$ et si Γ est un système de coefficients G-équivariant, la condition $(*)$ assure que e_σ agit sur V_x. On appelle alors un e-système de coefficients, un système de coefficients G-équivariant tel que pour tout $x \leq \sigma$ le morphisme

$\varphi_x^\sigma : V_\sigma \to V_x$ induise un isomorphisme $V_\sigma \xrightarrow{\sim} e_\sigma(V_x)$. On note $\mathrm{Coef}_e(G,R)$ la catégorie des e-systèmes de coefficients.

Soit $\mathrm{Rep}_R(G)$ la catégorie abélienne des représentations lisses de G à coefficients dans R et $\mathrm{Rep}_R^e(G)$ la sous-catégorie pleine des objets V de $\mathrm{Rep}_R(G)$ tels que $V = \sum_{x\in \mathrm{BT}_0} e_x V$. Notons que $\mathrm{Rep}_R^e(G)$ est une sous-catégorie de Serre par [MS10, Thm 3.1].

Pour e un système d'idempotents cohérent vérifiant la condition $(*)$, nous venons de construire un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_R^e(G) & \to & \mathrm{Coef}_e(G,R) \\ V & \mapsto & \Gamma(V) \end{array}$$

où $\Gamma(V)$ est le foncteur $\sigma \to e_\sigma(V)$. Nous souhaitons montrer que ce foncteur induit une équivalence de catégories.

2. Chemins admissibles

Pour définir ses applications locales, Wang utilise dans [Wan17] la notion de chemins tendus entre deux sommets de l'immeuble. Cependant, cette définition fonctionne bien pour GL_n mais pose des problèmes pour un groupe réductif général. Dans cette section nous introduisons alors la notion de chemins admissibles, qui autorise plus de flexibilité que les chemins tendus, et permettra dans la section 3 de définir les applications locales pour G.

2.1. **Définition.** Soient $\tau, \sigma \in \mathrm{BT}$. On appelle chemin admissible de τ à σ une suite de polysimplexes $\tau_0, \cdots, \tau_n \in \mathrm{BT}$ telle que

(1) $\tau_0 = \tau$ et $\tau_n = \sigma$
(2) $\forall i \in \{0, \cdots, n-1\}$, $\tau_{i+1} \in H(\tau_i, \sigma)$
(3) $\forall i \in \{0, \cdots, n-1\}$, $\tau_i \leq \tau_{i+1}$ ou $\tau_{i+1} \leq \tau_i$

2.2. *Remarque.* Dans [Wan17, (2.2.4)], nous avons la définition de chemins tendus. Nous pouvons alors remarquer que si $(z_0, \cdots, z_m)$ est un chemin tendu, alors $(z_0, [z_0, z_1], z_1, [z_1, z_2], \cdots, z_{m-1}, [z_{m-1}, z_m], z_m)$ est un chemin admissible.

2.3. **Lemme.** *Soient* $\tau_0, \cdots, \tau_n \in \mathrm{BT}$.

(1) Si $\tau_0, \cdots, \tau_n$ est un chemin admissible alors, pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, $\tau_k, \cdots, \tau_n$ est aussi un chemin admissible.

(2) Soit $k \in \{0, \cdots, n\}$ et on suppose que $\tau_0, \cdots, \tau_k$ et $\tau_k, \cdots, \tau_n$ sont des chemins admissibles. Alors $\tau_0, \cdots, \tau_n$ est un chemin admissible si et seulement si pour tout $i \in \{0, \cdots, k\}$, $\tau_k \in H(\tau_i, \tau_n)$.

(3) Soient $k, l \in \{0, \cdots, n\}$ avec $k \leq l$. Alors si $\tau_0, \cdots, \tau_n$ est un chemin admissible et si $\tau_k, \cdots, \tau_l$ sont adjacents alors $\tau_0, \cdots, \tau_k, [\tau_k, \cdots, \tau_l], \tau_l, \cdots, \tau_n$ est encore un chemin admissible.

Démonstration. (1) C'est évident.

(2) Supposons que $\tau_0, \cdots, \tau_n$ est un chemin admissible. Alors pour tout i, comme $\tau_{i+1} \in H(\tau_i, \tau_n)$, on a $H(\tau_{i+1}, \tau_n) \subseteq H(\tau_i, \tau_n)$. Ainsi pour tout $i \leq k$, $\tau_k \in H(\tau_i, \tau_n)$.

Réciproquement supposons que pour tout $i \in \{0, \cdots, k\}$, $\tau_k \in H(\tau_i, \tau_n)$ et montrons que $\tau_0, \cdots, \tau_n$ est un chemin admissible. La seule condition à vérifier et que $\tau_{i+1} \in H(\tau_i, \sigma)$. Ceci est immédiat pour $i \in \{k, n-1\}$ car $\tau_k, \cdots, \tau_n$ est un chemin admissible. Pour $i < k$, $\tau_0, \cdots, \tau_k$ étant un chemin admissible, $\tau_{i+1} \in H(\tau_i, \tau_k)$. Or $\tau_k \in H(\tau_i, \tau_n)$ donc $H(\tau_i, \tau_k) \subseteq H(\tau_i, \tau_n)$ et on a le résultat.

(3) Il n'y a qu'a vérifier les conditions d'être un chemin admissible entre τ_k et $[\tau_k, \cdots, \tau_l]$ et entre $[\tau_k, \cdots, \tau_l]$ et τ_l. Tout d'abord on a $\tau_k \leq [\tau_k, \cdots, \tau_l]$ et $\tau_l \leq [\tau_k, \cdots, \tau_l]$. Comme $\tau_l \leq [\tau_k, \cdots, \tau_l]$, $\tau_l \in H([\tau_k, \cdots, \tau_l], \tau_n)$. Il ne reste à vérifier que $[\tau_k, \cdots, \tau_l] \in H(\tau_k, \tau_n)$, c'est-à-dire que pour tout $i \in \{k, \cdots, l\}$, $\tau_i \in H(\tau_k, \tau_n)$. Or cette condition est vérifiée par 2, ce qui achève la preuve. $\square$

2.4. **Lemme.** *Soient $\sigma, \tau, \omega \in \mathrm{BT}$ tels que $\omega \in H(\sigma, \tau)$. Alors il existe un chemin admissible $\tau_0 = \tau, \cdots, \tau_k = \omega$ de τ à ω tel que pour tout i, $\omega \in H(\tau_i, \sigma)$.*

En particulier, il existe un chemin admissible $\tau_0 = \tau, \cdots, \tau_k = \omega, \cdots, \tau_n = \sigma$ de τ à σ tel que $\tau_0, \cdots, \tau_k$ soit un chemin admissible de τ à ω.

Démonstration. La première assertion est le lemme 2.15 de [MS10] et la seconde découle de 2. dans le lemme 2.3. $\square$

3. Les applications locales

Les chemins admissibles nous permettent de redéfinir les applications locales de [Wan17]. Le but principale de cette section sera de montrer que la définition donnée ci-dessous est bien indépendante du choix du chemin admissible effectué.

Fixons e un système d'idempotents cohérent qui satisfait $(*)$. Soit $\Gamma = (V_\sigma)_{\sigma \in \mathrm{BT}}$ un e-système de coefficients. Lorsque $x \leq \sigma$, on identifie V_σ à $e_\sigma(V_x)$ via le morphisme φ_x^σ. Pour deux polysimplexes τ, σ tels que $\tau \leq \sigma$, on a $V_\sigma = e_\sigma(V_\tau)$ et on note p_σ^τ le projecteur $V_\tau \twoheadrightarrow e_\sigma(V_\tau) = V_\sigma$.

Soient $\tau, \sigma \in \mathrm{BT}$ tels que $\tau \leq \sigma$. On a alors deux applications

$$p_\sigma^\tau : V_\tau \twoheadrightarrow e_\sigma V_\tau = V_\sigma,$$
$$\varphi_\tau^\sigma : V_\sigma \hookrightarrow V_\tau.$$

On définit alors si $\tau \leq \sigma$ ou $\sigma \leq \tau$

$$\varepsilon_\sigma^\tau : V_\tau \to V_\sigma$$

par $\varepsilon_\sigma^\tau = p_\sigma^\tau$ si $\tau \leq \sigma$ et $\varepsilon_\sigma^\tau = \varphi_\sigma^\tau$ si $\tau \geq \sigma$.

3.1. **Définition.** Soient $\tau, \sigma \in \mathrm{BT}$. Prenons $\tau_0 = \tau, \cdots, \tau_n = \sigma$ un chemin admissible reliant τ à σ. On définit alors $\varepsilon_\sigma^\tau : V_\tau \to V_\sigma$ par

$$\varepsilon_\sigma^\tau = \varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}.$$

3.2. *Remarque.* Si $(z_0, \cdots, z_m)$ est un chemin tendu selon [Wan17], alors la définition de $\varepsilon_{z_m}^{z_0}$ donnée dans [Wan17] section 2.2 est la même que celle donnée ici, si l'on considère le chemin admissible $(z_0, [z_0, z_1], z_1, \cdots, z_{m-1}, [z_{m-1}, z_m], z_m)$.

Le but de ce qui suit est de montrer que cette définition est indépendante du chemin admissible choisi. Nous avons besoin de lemmes préliminaires.

3.3. **Lemme.** *Soient $\tau_0, \cdots, \tau_n \in \mathrm{BT}$ des polysimplexes tels que pour tout i on ait $\tau_i \leq \tau_{i+1}$ ou $\tau_{i+1} \leq \tau_i$. On suppose de plus que $\tau_0, \cdots, \tau_n$ sont adjacents. Alors*

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau_n}^{[\tau_0, \cdots, \tau_n]} \circ \varepsilon_{[\tau_0, \cdots, \tau_n]}^{\tau_0}.$$

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur n.

Le résultat est clair pour $n = 1$. Prenons donc $\tau_0, \cdots, \tau_n$ comme dans l'énoncé et supposons le résultat vrai au rang $n - 1$. Le chemin $\tau_1, \cdots, \tau_n$ vérifie les conditions de l'énoncé donc par hypothèse de récurrence

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_2}^{\tau_1} = \varepsilon_{\tau_n}^{[\tau_1, \cdots, \tau_n]} \circ \varepsilon_{[\tau_1, \cdots, \tau_n]}^{\tau_1}$$

donc

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau_n}^{[\tau_1, \cdots, \tau_n]} \circ \varepsilon_{[\tau_1, \cdots, \tau_n]}^{\tau_1} \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}.$$

Deux cas se présentent :

(1) Si $\tau_0 \leq \tau_1$, alors $\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}$ correspond à l'application

$$V_{\tau_0} \twoheadrightarrow e_{\tau_1}(V_{\tau_0}) = V_{\tau_1} \twoheadrightarrow e_{[\tau_1,\cdots,\tau_n]}(V_{\tau_1}) = e_{[\tau_1,\cdots,\tau_n]}(e_{\tau_1}(V_{\tau_0})) = V_{[\tau_1,\cdots,\tau_n]} \hookrightarrow V_{\tau_n}.$$

Or $e_{[\tau_1,\cdots,\tau_n]}e_{\tau_1} = e_{[\tau_1,\cdots,\tau_n]}$ mais comme $\tau_0 \leq \tau_1$, $[\tau_1, \cdots, \tau_n] = [\tau_0, \cdots, \tau_n]$ et on a le résultat voulu.

(2) Si $\tau_0 \geq \tau_1$, alors $\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}$ correspond à l'application

$$V_{\tau_0} \hookrightarrow e_{\tau_0}(V_{\tau_1}) \twoheadrightarrow e_{[\tau_1,\cdots,\tau_n]}(e_{\tau_0}(V_{\tau_1})) \hookrightarrow V_{\tau_n}.$$

Or

$$e_{[\tau_1,\cdots,\tau_n]}(e_{\tau_0}(V_{\tau_1})) = e_{[\tau_1,\cdots,\tau_n]}e_{\tau_0}(V_{\tau_0})$$

car $V_{\tau_0} = e_{\tau_0}(V_{\tau_1})$ et $e_{[\tau_1,\cdots,\tau_n]}e_{\tau_0} = e_{[[\tau_1,\cdots,\tau_n],\tau_0]} = e_{[\tau_0,\cdots,\tau_n]}$. Donc les deux premières flèches correspondent à l'application

$$V_{\tau_0} \twoheadrightarrow e_{[\tau_0,\cdots,\tau_n]}(V_{\tau_0})$$

et on a le résultat.

□

3.4. **Corollaire.** *Soient τ et σ des polysimplexes adjacents. Alors ε_σ^τ ne dépend pas du chemin admissible choisi.*

Démonstration. Soit $\tau_0, \cdots, \tau_n$ un chemin admissible reliant τ à σ. Les polysimplexes τ et σ étant adjacents, $H(\sigma, \tau)$ est l'adhérence de $[\sigma, \tau]$. Le chemin $\tau_0, \cdots, \tau_n$ étant admissible, pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, nous avons $\tau_i \in H(\sigma, \tau)$ et donc $\tau_i \leq [\sigma, \tau]$. Par conséquent les polysimplexes $\tau_0, \cdots, \tau_n$ sont adjacents et $[\tau_0, \cdots, \tau_n] \leq [\sigma, \tau]$. Comme $\sigma, \tau \leq [\tau_0, \cdots, \tau_n]$, on a $[\sigma, \tau] \leq [\tau_0, \cdots, \tau_n]$ et donc $[\tau_0, \cdots, \tau_n] = [\sigma, \tau]$. Le lemme 3.3, nous dit alors que $\varepsilon_\sigma^\tau = \varepsilon_\sigma^{[\sigma,\tau]} \circ \varepsilon_{[\sigma,\tau]}^\tau$ qui est bien indépendant du chemin choisi. □

3.5. **Lemme.** *Soient $\tau_0, \cdots, \tau_n \in \mathrm{BT}$ et $k, l \in \{0, \cdots, n\}$ avec $k \leq l$. Supposons que $\tau_0, \cdots, \tau_n$ est un chemin admissible et que $\tau_k, \cdots, \tau_l$ sont adjacents. Alors*

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \varepsilon_{\tau_{l+1}}^{\tau_l} \circ \varepsilon_{\tau_l}^{[\tau_k,\cdots,\tau_l]} \circ \varepsilon_{[\tau_k,\cdots,\tau_l]}^{\tau_k} \circ \varepsilon_{\tau_k}^{\tau_{k-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}.$$

Démonstration. Le lemme 2.3 3. assure que $\tau_0, \cdots, \tau_k, [\tau_k, \cdots, \tau_l], \tau_l, \cdots, \tau_n$ est bien un chemin admissible. Maintenant

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \varepsilon_{\tau_{l+1}}^{\tau_l} \circ \varepsilon_{\tau_l}^{\tau_{l-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} \circ \varepsilon_{\tau_k}^{\tau_{k-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}.$$

Comme $\tau_k, \cdots, \tau_l$ sont adjacents le lemme 3.3 nous donne

$$\varepsilon_{\tau_l}^{\tau_{l-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} = \varepsilon_{\tau_l}^{[\tau_k,\cdots,\tau_l]} \circ \varepsilon_{[\tau_k,\cdots,\tau_l]}^{\tau_k}.$$

Et on a le résultat voulu. □

3.6. **Définition.** Soient $\tau, \sigma \in \mathrm{BT}$. On définit $\rho(\tau, \sigma)$ comme le nombre de polysimplexes dans $H(\tau, \sigma)$.

3.7. **Lemme.** *Soient $\tau_0, \cdots, \tau_n$ un chemin admissible et $\omega \in \mathrm{BT}$ tels que pour tout i, $\tau_n \in H(\tau_i, \omega)$. Alors il existe un autre chemin admissible $\tau'_0, \cdots, \tau'_m$ tel que*

(1) $\tau'_0 = \tau_0$ et $\tau'_m = \tau_n$

(2) $\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau'_m}^{\tau'_{m-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau'_1}^{\tau'_0}$

(3) si $\tau'_i > \tau'_{i+1}$ et $i + 1 < m$ alors $\rho(\tau'_{i+1}, \omega) < \rho(\tau'_i, \omega)$

(4) Pour tout i, $\tau'_m \in H(\tau'_i, \omega)$

Démonstration. Posons $k_1 = \max\{i > 0 | \tau_0, \cdots, \tau_i \text{ sont adjacents}\}$ (cet ensemble est non vide car τ_1 et τ_0 sont adjacents). De même si k_i est défini et différent de n, on pose $k_{i+1} = \max\{j > k_i | \tau_{k_i}, \cdots, \tau_j \text{ sont adjacents}\}$. On vient donc de définir m' entiers, $k_1, \cdots, k_{m'}$ avec $k_{m'} = n$. Posons $k_0 = 0$ et $m = 2m'$.

Définissons pour $i \in \{0, \cdots, m'\}$, $\tau'_{2i} = \tau_{k_i}$, et pour $i \in \{0, \cdots, m'-1\}$, $\tau'_{2i+1} = [\tau_{k_i}, \cdots, \tau_{k_{i+1}}]$.

Le lemme 2.3 3. appliqué m' fois assure que $\tau'_0, \cdots, \tau'_m$ est un chemin admissible. Vérifions que ce chemin vérifie les propriétés demandées.

(1) Il est clair que $\tau'_0 = \tau_0$ et $\tau'_m = \tau_n$.

(2) Le lemme 3.5 appliqué m' fois nous donne le résultat.

(3) On ne peut avoir $\tau'_i > \tau'_{i+1}$ que si $i = 2l+1$ est impair. Il nous suffit donc de montrer que $H(\tau'_{2l+2}, \omega) \subsetneq H(\tau'_{2l+1}, \omega)$.

Par définition de k_{l+1}, $\tau_{k_{l+1}+1}$ et τ'_{2l+1} ne sont pas adjacents ($\tau_{k_{l+1}+1}$ existe bien car $i+1 < m$ par hypothèse). Prenons $\mathcal{A}$ un appartement contenant $H(\tau_{k_l}, \omega)$. Par hypothèse $\tau_n \in H(\tau_{k_l}, \omega)$ et donc $H(\tau_{k_l}, \tau_n) \subseteq H(\tau_{k_l}, \omega)$. Ainsi $\tau_{k_l}, \cdots, \tau_n \in \mathcal{A}$. Comme $\tau_{k_{l+1}+1}$ et τ'_{2l+1} ne sont pas adjacents, il existe une racine affine a qui sépare $\tau_{k_{l+1}+1}$ et τ'_{2l+1}. Disons par example $a_{|\tau_{k_{l+1}+1}} > 0$ et $a_{|\tau'_{2l+1}} < 0$. Remarquons que $\tau_{k_{l+1}+1} \in H(\tau_{k_{l+1}}, \tau_n) \subseteq H(\tau_{k_{l+1}}, \omega) = H(\tau'_{2l+2}, \omega) \subseteq H(\tau'_{2l+1}, \omega)$. Ainsi si $a_{|\omega} < 0$, comme $\tau_{k_{l+1}+1} \in H(\tau'_{2l+1}, \omega)$ on aurait $a_{|\tau_{k_{l+1}+1}} \leq 0$ ce qui n'est pas. Donc $a_{|\omega} \geq 0$ et a est une racine affine qui sépare τ'_{2l+1} de $H(\tau_{k_{l+1}+1}, \omega)$ et donc $\tau'_{2l+1} \notin H(\tau_{k_{l+1}+1}, \omega)$. Or $\tau_{k_{l+1}+1} \leq \tau_{k_{l+1}}$ ou $\tau_{k_{l+1}+1} \geq \tau_{k_{l+1}}$. Mais on ne peut pas avoir $\tau_{k_{l+1}+1} \leq \tau_{k_{l+1}}$ car sinon $\tau_{k_l}, \cdots, \tau_{k_{l+1}+1}$ seraient adjacents. Donc $\tau_{k_{l+1}+1} \geq \tau_{k_{l+1}}$. Mais alors $H(\tau_{k_{l+1}+1}, \omega) \supseteq H(\tau_{k_{l+1}}, \omega) = H(\tau'_{2l+2}, \omega)$. Donc $\tau'_{2l+1} \notin H(\tau'_{2l+2}, \omega)$ ce qui achève la preuve.

(4) On souhaite montrer que pour tout i, $\tau_n \in H(\tau'_i, \omega)$. Si $i = 2l$ est pair le résultat est immédiat puisque $\tau'_{2l} = \tau_{k_l}$. Il nous reste donc le cas $i = 2l+1$ impair, c'est-à-dire que l'on veut montrer que $\tau_n \in H([\tau_{k_l}, \cdots, \tau_{k_{l+1}}], \omega)$. Mais $\tau_{k_l} \leq [\tau_{k_l}, \cdots, \tau_{k_{l+1}}]$ donc $H(\tau_{k_l}, \omega) \subseteq H([\tau_{k_l}, \cdots, \tau_{k_{l+1}}], \omega)$ et $\tau_n \in H([\tau_{k_l}, \cdots, \tau_{k_{l+1}}], \omega)$.

□

3.8. **Lemme.** *Soient $\tau, \sigma \in$ BT. Alors il existe un unique polysimplexe maximal $\overline{\tau} \in H(\tau, \sigma)$ avec $\tau \leq \overline{\tau}$. C'est-à-dire qu'un polysimplexe ω satisfait $\omega \in H(\tau, \sigma)$ et $\tau \leq \omega$ si et seulement si $\tau \leq \omega \leq \overline{\tau}$.*

Démonstration. La preuve est identique à celle du lemme 2.9 de [MS10] en remplaçant x par σ. □

3.9. **Lemme.** *Soient $\tau, \sigma, \overline{\tau}$ comme dans le lemme 3.8. Soit $\mathcal{A}$ un appartement contenant $H(\sigma, \tau)$ et a une racine affine. Alors si $a_{|\overline{\tau}} = 0$ on a $a_{|H(\sigma,\tau)} = 0$.*

Démonstration. Supposons que $a_{|\overline{\tau}} = 0$. Notons $H = \ker(a)$ un hyperplan affine de $\mathcal{A}$. Il faut alors montrer que $H(\sigma, \tau) \subseteq H$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $H(\sigma, \tau) \nsubseteq H$. Prenons alors $x \in H(\sigma, \tau) \backslash H$.

Soit $\varphi : [0,1] \to$ BT une géodésique entre un point intérieur à $\overline{\tau}$ et x. Comme $\varphi(0) \in H$ s'il existait $t \in]0,1]$ tel que $\varphi(t) \in H$, on aurait que pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi(t) \in H$ et en particulier que $x \in H$ ce qui n'est pas. Donc $\varphi(]0,1]) \cap H = \emptyset$. Chaque $\varphi(t)$ appartient à un polysimplexe $\tau(t)$ et l'application $t \mapsto \tau(t)$ est constante par morceaux, on peut donc choisir t_0 le premier réel strictement positif où l'on a un saut. Notons $\omega = \tau(t_0/2)$. On doit avoir $\overline{\tau} \leq \omega$ ou $\omega \leq \overline{\tau}$. Mais $\omega \nsubseteq H$ et $\overline{\tau} \subseteq H$ donc $\overline{\tau} < \omega$. Or $\varphi(t_0/2) \in H(\tau, \sigma)$ donc $\omega \in H(\tau, \sigma)$ ce qui contredit la définition de $\overline{\tau}$. □

3.10. **Lemme.** *Soient $\tau, \omega, \sigma \in \mathrm{BT}$ des polysimplexes avec $\omega \in H(\tau,\sigma)$. Prenons comme dans le lemme 3.8, $\overline{\tau}$ maximal dans $H(\tau,\sigma)$ tel que $\tau \leq \overline{\tau}$ et $\overline{\omega}$ maximal dans $H(\omega,\sigma)$ tel que $\omega \leq \overline{\omega}$. Alors $\overline{\tau} \in H(\tau,\overline{\omega})$.*

Démonstration. Notons $\overline{\tau}'$ le polysimplexe maximal de $H(\tau,\overline{\omega})$ tel que $\tau \leq \overline{\tau}'$. Alors $H(\tau,\overline{\omega}) \subseteq H(\tau,\sigma)$ et donc $\overline{\tau}' \leq \overline{\tau}$.

Supposons que $\overline{\tau}' \neq \overline{\tau}$. Alors $\overline{\tau}'$ est une facette de $\overline{\tau}$ et si l'on prend $\mathcal{A}$ un appartement contenant $H(\tau,\sigma)$ il existe une racine affine a telle que $a_{|\overline{\tau}'} = 0$ et $a_{|\overline{\tau}} > 0$. Comme $a_{|\overline{\tau}'} = 0$ par le lemme 3.9 $a_{|H(\tau,\overline{\omega})} = 0$ et en particulier $a_{|\tau} = 0$ et $a_{|\overline{\omega}} = 0$. Encore par le lemme 3.9, comme $a_{|\overline{\omega}} = 0$ on a $a_{|H(\omega,\sigma)} = 0$ et donc $a_{|\sigma} = 0$. On a donc $a_{|\tau} = 0$ et $a_{|\sigma} = 0$ donc $a_{|H(\tau,\sigma)} = 0$. Mais $\overline{\tau} \in H(\tau,\sigma)$ donc $a_{|\overline{\tau}} = 0$ ce qui est absurde. □

3.11. **Lemme.** *Soient $\tau, \sigma \in \mathrm{BT}$. Prenons $\overline{\tau}$ maximal dans $H(\tau,\sigma)$ tel que $\tau \leq \overline{\tau}$. Soit $\tau_0 = \tau, \cdots, \tau_n = \sigma$ un chemin admissible reliant τ à σ. Alors $\tau, \overline{\tau}, \tau_0, \cdots, \tau_n$ est encore un chemin admissible et*

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} \circ \varepsilon_{\tau_0}^{\overline{\tau}} \circ \varepsilon_{\overline{\tau}}^{\tau}.$$

Démonstration. Nous avons que $\tau \leq \overline{\tau}$ et donc $H(\tau,\sigma) \subseteq H(\overline{\tau},\sigma)$. Puis comme $\overline{\tau} \in H(\tau,\sigma)$ nous en déduisons que $H(\overline{\tau},\sigma) \subseteq H(\tau,\sigma)$. Par conséquent $H(\tau,\sigma) = H(\overline{\tau},\sigma)$ et $\tau, \overline{\tau}, \tau_0, \cdots, \tau_n$ est bien un chemin admissible.

Démontrons par récurrence sur n, que pour touts polysimplexes σ et τ et pour tout chemin admissible $\tau_0, \cdots, \tau_n$ reliant τ à σ alors $\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} \circ \varepsilon_{\tau_0}^{\overline{\tau}} \circ \varepsilon_{\overline{\tau}}^{\tau}$. Le cas $n = 1$ est évident. Supposons donc le résultat vrai au rang $n-1$ et montrons le au rang n.

Notons $\varphi = \varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}$. L'application $\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} \circ \varepsilon_{\tau_0}^{\overline{\tau}} \circ \varepsilon_{\overline{\tau}}^{\tau}$ correspond à l'application

$$V_\tau \overset{p_{\overline{\tau}}^{\tau}}{\twoheadrightarrow} V_{\overline{\tau}} \overset{\varphi_{\tau}^{\overline{\tau}}}{\hookrightarrow} V_\tau \overset{\varphi}{\to} V_\sigma.$$

Soit $v \in V_\tau$, nous souhaitons donc montrer que $\varphi(v) = \varphi(e_{\overline{\tau}}(v))$. Le résultat que l'on souhaite démontrer est donc équivalent à dire que si $u \in V_\tau$ est tel que $e_{\overline{\tau}}(u) = 0$ alors $\varphi(u) = 0$.

Posons alors $\psi = \varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_2}^{\tau_1}$. Notons $\overline{\tau_1}$ le polysimplexe maximal de $H(\tau_1,\sigma)$ tel que $\tau_1 \leq \overline{\tau_1}$. Alors par hypothèse de récurrence on sait que si $v \in V_{\tau_1}$ est tel que $e_{\overline{\tau_1}}(v) = 0$, $\psi(v) = 0$. Soit $u \in V_\tau$ tel que $e_{\overline{\tau}}(u) = 0$, comme $\varphi = \psi \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}$, il nous suffit de montrer que $e_{\overline{\tau_1}}(\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(u)) = 0$. Deux cas se présentent :

— $\tau_0 \leq \tau_1$

Alors $\tau_1 \in H(\tau_0,\sigma)$ et $\tau_0 \in H(\tau_1,\sigma)$ donc $H(\tau_0,\sigma) = H(\tau_1,\sigma)$. Par conséquent $\overline{\tau_1} = \overline{\tau}$. Ainsi $e_{\overline{\tau_1}}(\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(u)) = e_{\overline{\tau}}(\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(u)) = \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(e_{\overline{\tau}}u) = 0$.

— $\tau_0 \geq \tau_1$

Alors $\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varphi_{\tau_1}^{\tau_0} : V_{\tau_0} \hookrightarrow V_{\tau_1}$ et $e_{\overline{\tau_1}}(\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(u)) = e_{\overline{\tau_1}} e_\tau(\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(u))$. Or $\overline{\tau} \in H(\tau,\overline{\tau_1})$ par le lemme 3.10, donc la proposition 2.2 (e) de [MS10] nous dit que $e_{\overline{\tau_1}} e_\tau = e_{\overline{\tau_1}} e_{\overline{\tau}} e_\tau = e_{\overline{\tau_1}} e_\tau e_{\overline{\tau}}$ et par conséquent $e_{\overline{\tau_1}}(\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(u)) = e_{\overline{\tau_1}} e_\tau e_{\overline{\tau}}(\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(u)) = e_{\overline{\tau_1}} e_\tau(\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(e_{\overline{\tau}}u)) = 0$.

□

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété que pour tout $\tau, \sigma \in \mathrm{BT}$ tels que $\rho(\tau,\sigma) \leq n$ alors ε_σ^τ ne dépend pas du choix du chemin admissible.

3.12. **Lemme.** *Soient $\tau, \sigma \in \mathrm{BT}$ tels que $\rho(\tau,\sigma) > 1$. Soient $\tau_0, \cdots, \tau_n$ et $\tau_0', \cdots, \tau_m'$ deux chemins admissibles reliant τ à σ. On suppose que*

— *$\mathcal{P}(\rho(\tau,\sigma) - 1)$ est vraie*
— *$\rho(\tau_1,\sigma) < \rho(\tau,\sigma)$ et $\rho(\tau_1',\sigma) < \rho(\tau,\sigma)$*
— *Il existe $\omega \in H(\tau_1,\sigma) \cap H(\tau_1',\sigma)$*
— *$\rho(\tau,\omega) < \rho(\tau,\sigma)$*

— $\tau_1 \in H(\tau,\omega)$ *et* $\tau_1' \in H(\tau,\omega)$

Alors

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau_m'}^{\tau_{m-1}'} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1'}^{\tau_0'}.$$

Démonstration. $\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = (\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_2}^{\tau_1}) \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}$. Comme $\rho(\tau_1,\sigma) < \rho(\tau,\sigma)$ et que $\mathcal{P}(\rho(\tau,\sigma)-1)$ est vraie, $\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_2}^{\tau_1} = \varepsilon_{\sigma}^{\tau_1}$ ne dépend pas du chemin admissible choisi. De plus $\omega \in H(\tau_1,\sigma)$ donc d'après le lemme 2.4 il existe un chemin admissible reliant τ_1 à σ passant par ω tel que les chemins reliant τ_1 à ω et ω à σ soit admissibles. Ainsi $\varepsilon_{\sigma}^{\tau_1} = \varepsilon_{\sigma}^{\omega} \circ \varepsilon_{\omega}^{\tau_1}$. On a donc $\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\sigma}^{\omega} \circ \varepsilon_{\omega}^{\tau_1} \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}$. Comme $\rho(\tau,\omega) < \rho(\tau,\sigma)$ et que $\mathcal{P}(\rho(\tau,\sigma)-1)$ est vraie, $\varepsilon_{\omega}^{\tau}$ ne dépend pas du choix du chemin admissible choisi. En particulier, comme $\tau_1 \in H(\tau,\omega)$, on peut compléter le chemin τ_0,τ_1 en un chemin admissible reliant τ à ω. Le chemin reliant τ_1 à ω est alors lui aussi admissible et il en est de même pour le chemin τ_0,τ_1. Ainsi $\varepsilon_{\omega}^{\tau_1} \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\omega}^{\tau_0}$. On vient donc de montrer que

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\sigma}^{\omega} \circ \varepsilon_{\omega}^{\tau}.$$

Mais les hypothèses sur les chemins $\tau_0,\cdots,\tau_n$ et $\tau_0',\cdots,\tau_m'$ sont symétriques, on a donc aussi $\varepsilon_{\tau_m'}^{\tau_{m-1}'} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1'}^{\tau_0'} = \varepsilon_{\sigma}^{\omega} \circ \varepsilon_{\omega}^{\tau}$. Et finalement

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau_m'}^{\tau_{m-1}'} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1'}^{\tau_0'}.$$

□

3.13. **Lemme.** *Soient* $\tau,\sigma \in \mathrm{BT}$. *Prenons* $\mathcal{A}$ *un appartement contenant* $H(\sigma,\tau)$. *On suppose qu'il existe une racine affine* a *telle que* $a_{|\tau} > 0$ *et* $a_{|\sigma} < 0$. *Alors si* $\omega \in H(\tau,\sigma)$ *est un polysimplexe contenant un point intérieur* x *avec* $a(x) = 0$, *on a* $\rho(\omega,\sigma) < \rho(\tau,\sigma)$ *et* $\rho(\tau,\omega) < \rho(\tau,\sigma)$.

Démonstration. La situation étant sysmétrique en τ et σ il nous suffit de montrer que $\rho(\omega,\sigma) < \rho(\tau,\sigma)$. Comme $\omega \in H(\tau,\sigma)$ on a $H(\omega,\sigma) \subseteq H(\tau,\sigma)$ et $\rho(\omega,\sigma) \leq \rho(\tau,\sigma)$. Il ne nous reste plus qu'à montrer que $H(\omega,\sigma) \subsetneq H(\tau,\sigma)$.

Puisque $a(x) = 0$ et x est un point intérieur à ω on a $a_{|\omega} = 0$. Ainsi $a_{|\omega} \leq 0$, $a_{|\sigma} < 0$ et $a_{|\tau} > 0$ donc a sépare τ de ω et σ et par conséquent $\tau \notin H(\omega,\sigma)$ ce qui achève la preuve. □

3.14. **Proposition.** *Soient* $\tau,\sigma \in \mathrm{BT}$ *alors* $\varepsilon_{\sigma}^{\tau}$ *ne dépend pas du choix du chemin admissible choisi.*

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $\rho(\tau,\sigma)$. Le résultat est vrai si $\rho(\tau,\sigma) = 1$. On suppose alors que $\rho(\tau,\sigma) > 1$ et que $\mathcal{P}(\rho(\tau,\sigma)-1)$ est vraie.

Prenons alors deux chemins admissibles $\tau_0,\cdots,\tau_n$ et $\tau_0',\cdots,\tau_m'$. Le lemme 3.11 nous permet de supposer que $\tau = \overline{\tau}$ où $\overline{\tau}$ est le polysimplexe maximal de $H(\tau,\sigma)$ tel que $\tau \leq \overline{\tau}$. En appliquant le lemme 3.7 (avec $\omega = \sigma$) on peut supposer que $\tau_0,\cdots,\tau_n$ et $\tau_0',\cdots,\tau_m'$ vérifient les conditions énoncées dans ce dernier. De plus quitte à retirer les premiers simplexes s'ils sont égaux, on peut supposer que $\tau_0 \neq \tau_1$ et $\tau_0' \neq \tau_1'$. En particulier on a que $\rho(\tau_1,\sigma) < \rho(\tau,\sigma)$ et $\rho(\tau_1',\sigma) < \rho(\tau,\sigma)$. Le cas où τ et σ sont adjacents est réglé par le corollaire 3.4, on supposera donc pour la suite que τ et σ ne sont pas adjacents.

Soit $\mathcal{A}$ un appartement contenant $H(\tau,\sigma)$. Comme τ et σ sont deux polysimplexes non adjacents, il existe une racine affine a telle que $a_{|\tau} > 0$ et $a_{|\sigma} < 0$. Comme τ est maximal, $\tau_1 < \tau$ et donc $a_{|\tau_1} \geq 0$. On déduit de $a_{|\tau_1} \geq 0$ et $a_{|\sigma} < 0$ qu'il existe $x \in H(\tau_1,\sigma)$ tel que $a(x) = 0$. De même il existe $y \in H(\tau_1',\sigma)$ tel que $a(y) = 0$. Soit $\varphi : [0,1] \to \mathrm{BT}$ une géodésique reliant x à y. Comme $x,y \in H(\tau,\sigma)$, $\varphi([0,1]) \subseteq H(\tau,\sigma)$. Chaque $\varphi(t)$ est un point intérieur à un certain polysimplexe

$\omega(t)$. La fonction $t \mapsto \omega(t)$ est constante par morceaux, prenons alors $0 = t_0 < t_2 < \cdots < t_{2k-2} < t_{2k} = 1$ les instants où il y a un saut de la fonction $\omega(t)$. Choisissons également $t_1, \cdots, t_{2k-1}$ tels que $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{2k-1} < t_{2k}$. Posons $\omega_i = \omega(t_i)$. Alors ω_{2i} et ω_{2i+2} doivent être des facettes de ω_{2i+1} et donc pour tout i on a, soit $\omega_i \leq \omega_{i+1}$, soit $\omega_{i+1} \leq \omega_i$. Maintenant $a(x) = a(y) = 0$ donc pour tout t, $a(\varphi(t)) = 0$. Ainsi ω_i contient un point intérieur $\varphi(t_i)$ tel que $a(\varphi(t_i)) = 0$. Le lemme 3.13 nous assure que $\rho(\omega_i, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$ et $\rho(\tau, \omega_i) < \rho(\tau, \sigma)$. Pour résumer, on vient de construire une suite de polysimplexes $\omega_0, \cdots, \omega_{2k}$ telle que pour tout i, $\omega_i \in H(\tau, \sigma)$, $\rho(\omega_i, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$, $\rho(\tau, \omega_i) < \rho(\tau, \sigma)$, $\omega_i \leq \omega_{i+1}$ ou $\omega_{i+1} \leq \omega_i$, $\omega_0 \in H(\tau_1, \sigma)$ et $\omega_{2k} \in H(\tau_1', \sigma)$.

Soit $i \in \{0, 1, \cdots, 2k\}$. Comme $\omega_i \in H(\tau, \sigma)$ prenons grâce au lemme 2.4 un chemin admissible $\tau_0^i = \tau, \cdots, \tau_{l_i}^i = \omega_i$ de τ à ω_i tel que pour tout j, $\omega_i \in H(\tau_j^i, \sigma)$. En appliquant le lemme 3.7 on peut supposer que les τ_j^i vérifient les conditions de ce dernier. On complète le chemin $\tau_0^i, \cdots, \tau_{l_i}^i$ en un chemin admissible $\tau_0^i, \cdots, \tau_{n_i}^i$ reliant τ à σ grâce au lemme 2.3 2. On suppose également $\tau_0^i \neq \tau_1^i$ quitte à retirer les premiers simplexes s'ils sont égaux. Comme $\tau_0^i = \tau$ est maximal, $\tau_0^i > \tau_1^i$. Si $\tau_1^i \neq \omega_i$ alors la condition 3 du lemme 3.7 nous dit que $\rho(\tau_1^i, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$. Et si $\tau_1^i = \omega_i$ alors par construction de ω_i, $\rho(\tau_1^i, \sigma) = \rho(\omega_i, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$. On vient ainsi de construire un chemin admissible $\tau_0^i, \cdots, \tau_{n_i}^i$ reliant τ à σ tel que $\rho(\tau_1^i, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$, $\omega_i \in H(\tau_1^i, \sigma)$ et $\tau_1^i < \tau$. Notons alors

$$\varepsilon_i := \varepsilon_{\tau_{n_i}^i}^{\tau_{n_i-1}^i} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1^i}^{\tau_0^i}$$

l'application locale associée à ce chemin.

Soit $i \in \{0, 1, \cdots, 2k-1\}$. On a $\omega_i \leq \omega_{i+1}$ ou $\omega_{i+1} \leq \omega_i$. Notons ω le plus petit des deux simplexes de sorte que $\omega \leq \omega_i$ et $\omega \leq \omega_{i+1}$. Alors $\tau_0^i, \cdots, \tau_{n_i}^i$ et $\tau_0^{i+1}, \cdots, \tau_{n_{i+1}}^{i+1}$ vérifient les conditions du lemme 3.12. En effet, $\rho(\tau_1^i, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$ et $\rho(\tau_1^{i+1}, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$. Comme $\omega_i \in H(\tau_1^i, \sigma)$ et $\omega \leq \omega_i$, on a que $\omega \in H(\tau_1^i, \sigma)$, et de même $\omega \in H(\tau_1^{i+1}, \sigma)$. Puis $\rho(\tau, \omega_i) < \rho(\tau, \sigma)$ et $\rho(\tau, \omega_{i+1}) < \rho(\tau, \sigma)$, par conséquent, comme $\omega = \omega_i$ ou $\omega = \omega_{i+1}$, $\rho(\tau, \omega) < \rho(\tau, \sigma)$. Enfin $\tau_1^i < \tau$ donc $\tau_1^i \in H(\tau, \omega)$ et de même $\tau_1^{i+1} \in H(\tau, \omega)$. Ainsi le lemme 3.12 nous dit que $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$. Ceci étant vrai pour tout $i \in \{0, \cdots, 2k-1\}$ on obtient $\varepsilon_0 = \varepsilon_{2k}$.

Les chemins admissibles $\tau_0, \cdots, \tau_n$ et $\tau_0^0, \cdots, \tau_{n_0}^0$ vérifient également les conditions de 3.12 avec $\omega = \omega_0$ donc $\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_0$. Il en est de même avec $\tau_0', \cdots, \tau_m'$ et $\tau_0^{2k}, \cdots, \tau_{n_{2k}}^{2k}$ en prenant $\omega = \omega_{2k}$ donc $\varepsilon_{\tau_m'}^{\tau_{m-1}'} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1'}^{\tau_0'} = \varepsilon_{2k}$. On trouve finalement que

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau_m'}^{\tau_{m-1}'} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1'}^{\tau_0'},$$

ce qui achève la preuve. □

4. Équivalence de catégories

Nous pouvons maintenant prouver l'équivalence de catégories qui nous intéresse.

4.1. **Proposition.** *Soient* $\tau, \sigma, \omega \in \mathrm{BT}$ *tels que* $\omega \in H(\tau, \sigma)$. *Alors*

$$\varepsilon_\sigma^\tau = \varepsilon_\sigma^\omega \circ \varepsilon_\omega^\tau.$$

Démonstration. La proposition 3.14 nous dit que ε_σ^τ est indépendant du choix du chemin admissible. Il suffit alors de prendre, grâce au lemme 2.4, un chemin admissible reliant τ à σ passant par ω tel que les deux chemins de τ à ω et de ω à σ soient admissibles. □

4.2. *Remarque.* La proposition 4.1 démontre les lemmes (2.2.8), (2.2.9) et (2.2.10) de [Wan17].

Maintenant que l'on a redéfini ε_σ^τ dans le cas d'un groupe réductif quelconque, et que ces applications vérifient les mêmes propriétés, le reste de la démonstration dans [Wan17] (section 2.3 et 2.4) fonctionne dans ce contexte plus général.

4.3. **Théorème.** *Soient e un système d'idempotents cohérent vérifiant la condition $(*)$ et Γ un e-système de coefficients sur* BT. *Alors*

(1) Le complexe de chaîne $C_*(\mathrm{BT},\Gamma)$ est exact sauf en degré 0.

(2) Γ est isomorphe au système de coefficients $(\sigma \mapsto e_\sigma(H_0(\mathrm{BT},\Gamma)))$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la méthode de démonstration du théorème (2.1.9) de [Wan17] avec la nouvelle définition des applications locales ε_σ^τ. □

Soient e un système d'idempotents et V un RG-module lisse. On définit alors $\Gamma(V)$ un système de coefficients par $V_\sigma := e_\sigma V$ et pour $\tau \leq \sigma$, φ_σ^τ est l'inclusion $V_\sigma \hookrightarrow V_\tau$.

4.4. **Théorème** ([Wan17, Cor (2.1.11)]). *Soit e un système d'idempotents cohérent vérifiant la condition $(*)$. Alors le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_R^e(G) & \to & \mathrm{Coef}_e(G,R) \\ V & \mapsto & \Gamma(V) \end{array}$$

admet un quasi-inverse $\Gamma \mapsto H_0(\mathrm{BT},\Gamma)$, donc induit une équivalence de catégories.

Références

[Dat18] J.-F. Dat, *Equivalences of tame blocks for p-adic linear groups*, Math. Ann. **371**(1-2), 565–613 (2018).

[Lan18a] T. Lanard, *Sur les ℓ -blocs de niveau zéro des groupes p -adiques*, Compositio Mathematica **154**(7), 1473–1507 (2018).

[Lan18b] T. Lanard, *Sur les ℓ-blocs de niveau zéro des groupes p-adiques II*, arXiv e-prints , arXiv :1806.09543 (Jun 2018), 1806.09543.

[MS10] R. Meyer and M. Solleveld, *Resolutions for representations of reductive p-adic groups via their buildings*, J. Reine Angew. Math. **647**, 115–150 (2010).

[SS97] P. Schneider and U. Stuhler, *Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (85), 97–191 (1997).

[Wan17] H. Wang, *L'espace symétrique de Drinfeld et correspondance de Langlands locale II*, Math. Ann. **369**(3-4), 1081–1130 (2017).

Email address: `thomas.lanard@univie.ac.at`