

DIFFÉRENTIELLE, DÉRIVÉES PARTIELLES, GRADIENT

I Différentielle, dérivées partielles, gradient**I.1 Assimilation du cours**

Exercice 1.— Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{xy} - 2e^2xy$. Calculer, pour tout vecteur $\vec{v} = (h, k)$, le nombre $Df(2, 1) \cdot \vec{v}$.

Exercice 2.—

1. Montrer que l'application "produit" $(x, y) \mapsto xy$, définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , est différentiable sur \mathbb{R}^2 , et donner sa différentielle en un point (x, y) .
 2. Plus généralement, montrer que l'application "produit scalaire" $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$, définie de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ dans \mathbb{R} , est différentiable sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et donner sa différentielle.
-

Exercice 3.— Calculer la différentielle de l'application $f \mapsto \int_0^1 (f(t))^2 dt$, définie de $C([0, 1], \mathbb{R})$ dans \mathbb{R} , en un point α quelconque.

Exercice 4.— Montrer l'unicité de la différentielle en un point. *On pourra suivre les indications du poly.*

I.2 Exercices de niveau standard

Exercice 5.—

1. Soit $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable, et $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ une courbe paramétrée dérivable. Rappeler la formule pour la dérivée de $g \circ \gamma$ en $t = 0$ en terme de gradient de g .
 2. On suppose maintenant que g admet un maximum local en un point P_0 . Montrer que le gradient de g s'annule au point P_0 . *Indication : on pourra utiliser le résultat pour les fonctions d'une variable : si $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ admet un maximum en $t = 0$ alors $f'(0) = 0$; voir aussi le poly.*
 3. Soit $f : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable sur un ouvert O de \mathbb{R}^m . On suppose que le gradient de f s'annule sur O .
 - a. On suppose d'abord que O est une boule ouverte. Montrer que f est constante sur O . *Indication : on pourra énoncer et utiliser le résultat pour les fonctions d'une variable, ainsi que la convexité des boules ouvertes.*
 - b. En déduire le cas où O est un ouvert connexe.
-

Exercice 6.—(Examen deuxième session 2014-2015) On considère une application $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. On suppose que $f(0) = 0$ et que f est différentiable en 0.

1. (Question de cours) Compléter la phrase suivante :

Puisque f est différentiable en 0 et $f(0) = 0$, on peut écrire, pour tout $\vec{h} \in \mathbb{R}^N$,

$$f(\vec{h}) = \dots\dots\dots$$

avec $o(\vec{h})$ négligeable devant \vec{h} , ce qui signifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \dots\dots\dots .$$

Pour chaque entier $n > 0$, on définit une application $g_n : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ par la formule

$$g_n(x) = nf\left(\frac{x}{n}\right).$$

2. On se donne un point x de \mathbb{R}^N . Déterminer la limite de la suite $(g_n(x))_{n>0}$.

3. Soit $R > 0$. Montrer que la convergence de la question précédente est uniforme sur la boule $B(0, R)$ de \mathbb{R}^N .

Exercice 7.—[Examen 2019] Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

1. La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
 2. Déterminer les dérivées partielles de f , là où elles existent.
 3. Déterminer l'ensemble Ω des points où elle est différentiable.
 4. Est-elle de classe C^1 sur Ω ? Sinon, sur quel ensemble l'est-elle ?
-

I.3 Compléments et challenges

Exemple IV : inversion de matrice Pour toute matrice H de norme matricielle $\|H\| < 1$, la matrice $\text{Id} + H$ est inversible et on a

$$(\text{Id} + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-H)^k = \text{Id} - H + o(H)$$

en posant

$$o(H) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-H)^k.$$

Exercice 8.—

1. On admet provisoirement que $o(H)$ est négligeable devant H . Interpréter très précisément ce qui précède en terme de différentielle de l'application $M \mapsto M^{-1}$.
 2. Pour montrer que $o(H)$ est négligeable devant H , majorer la norme de $o(H)$, par exemple pour tout $\|H\| < \frac{1}{2}$. On commencera par mettre H^2 en facteur.
-