

## TD Suites et intégrales – feuille 2 : Méthodes de démonstration, quantificateurs

---

### A méthodes de démonstration

**Exercice 1.** Démontrer par l'absurde que  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

**Exercice 2.** Démontrer par récurrence que la somme des  $n$  premiers entiers naturels non nuls vaut  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Pourrait-on donner une démonstration directe ?

**Exercice 3** (Suite de Fibonacci). On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\rho_+^{n+1} - \rho_-^{n+1})$ , où  $\rho_+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  (le nombre d'or) et  $\rho_- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ .

**Exercice 4.** Que penser de la démonstration suivante :

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on considère la propriété  $P_n$  donnée par "  $n$  points quelconques du plan sont toujours alignés." Nous allons la démontrer par récurrence.

On initialise au rang 2 :  $P_2$  est vraie car 2 points du plan sont toujours alignés.

Supposons maintenant que pour un certain entier naturel  $n$ ,  $P_n$  soit vérifiée pour un certain entier naturel  $n \geq 2$ . Supposons que  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  sont  $n+1$  points quelconques du plan. Par hypothèse de récurrence,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont alignés sur une droite que l'on notera  $D$ . De même  $A_2, \dots, A_{n+1}$  sont alignés sur une droite  $D'$ . Comme  $D$  et  $D'$  contiennent toutes les deux les points  $A_2, \dots, A_n$ , elles sont confondues. Par conséquent, les points  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  sont alignés. On a prouvé que  $P_{n+1}$  est vérifiée.

Conclusion : la propriété  $P_n$  est vraie au rang initial et héréditaire. Elle est donc vraie à tout rang.

### B quantificateurs

**Exercice 5.** Traduire la phrase suivante en langage mathématique quantifié. "Le produit de deux nombres réels négatifs quelconques est positif."

**Exercice 6.** Traduire en français les phrases mathématiques quantifiées suivantes :

- (a)  $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ .
- (b)  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n = 0$ .

**Exercice 7.** Donner la négation des phrases suivantes, puis vérifier le résultat en traduisant en langage mathématique quantifié.

- (a) Toutes les françaises sont rousses.
- (b) Il existe un rang  $n \geq 0$  pour lequel le terme  $u_n$  de la suite  $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est nul.

**Exercice 8.** Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Sinon, énoncer leur négation.

- (a)  $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 5$ .
- (b)  $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 5$ .
- (c)  $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$ .
- (d)  $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y > x^2$ .
- (e)  $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, y > x^2$ .
- (f)  $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}, y > x^2$ .