Géométrie différentielle – Corrigé de la feuille 7 : produit extérieur, formes différentielles.

Exercice 1 (*Premiers pas*)**.** Soit un espace vectoriel E^* de dimension 1, 2 ou 3, muni d'une base (e_i). Donner la dimension de $\wedge^k E^*$ et sa base déduite de la base (e_i). Expliquer comment on calcule le produit extérieur dans ces bases.

Corrigé. Notons n la dimension de E et (f_i) la base duale de (e_i). Une base de $\wedge^k E^*$ est alors donnée par la famille (f_I) indexée par les parties I à k éléments dans $\{1, \dots, n\}$ données par

$$f_I = f_{i_1} \wedge f_{i_2} \wedge \dots \wedge f_{i_k},$$

où $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ et $i_1 < \dots < i_k$. L'espace vectoriel $\wedge^k E^*$ a donc pour dimension le coefficient binomial $\binom{n}{k}$. En particulier, pour $k > n$, $\wedge^k E^* = \{0\}$. On déduit facilement les cas particuliers suivants.

Si $\dim E = 1$, $\wedge^0 E^* = \mathbb{R}$ et $\wedge^1 E^* = E^*$ est de dimension 1 et engendré par f_1.

Si $\dim E = 2$, $\wedge^0 E^* = \mathbb{R}$, $\wedge^1 E^* = E^*$ est de dimension 2 engendré par (f_1, f_2) et $\wedge^2 E^*$ est de dimension 1 engendré par $f_1 \wedge f_2$.

Si $\dim E = 3$, $\wedge^0 E^* = \mathbb{R}$, $\wedge^1 E^* = E^*$ est de dimension 3 engendré par (f_1, f_2, f_3), $\wedge^2 E^*$ est de dimension 3 engendré par $(f_1 \wedge f_2, f_2 \wedge f_3, f_1 \wedge f_3)$ et $\wedge^3 E^*$ est de dimension 1 engendré par $f_1 \wedge f_2 \wedge f_3$.

Pour calculer des produits extérieurs dans ces bases, il suffit (par linéarité) de savoir calculer les produits extérieurs des éléments des bases, ce qui est immédiat si l'on se souvient du fait que si l, l' sont des formes linéaires, $l \wedge l' = -l' \wedge l$ et en particulier $l \wedge l = 0$.

Ainsi par exemple, $f_2 \wedge (f_1 \wedge f_3) = -f_1 \wedge f_2 \wedge f_3$.

Exercice 2 (*Famille libre et produit extérieur*)**.** Montrer qu'une famille de formes linéaires $(l_1, \dots, l_k)$ est libre si et seulement si $l_1 \wedge \dots \wedge l_k \neq 0$. Montrer que $x_1, \dots, x_k$ sont linéairement dépendants si et seulement si $\alpha(x_1, \dots, x_k) = 0$ pour toute forme alternée α de degré k.

Corrigé. Rappelons le fait suivant : si $w_1, \dots w_p$ sont des formes linéaires et $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs, alors

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_p(u_1, \dots, u_p) = \det((w_i(u_j))_{i,j \in \{1,\dots,p\}}).$$

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base et $(f_1, \dots, f_n)$ sa base duale.

La famille $(l_1, \cdots, l_k)$ est libre si et seulement si la matrice $k \times n$ dont les lignes représentent les l_i dans la base (e_i) est de rang k, c'est à dire si et seulement si cette matrice admet un mineur d'ordre k non nul, autrement dit ss'il existe une partie I de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal k telle que $\det((l_i(e_j)_{i \in \{1,\dots k\}, j \in I})) \neq 0$. Le rappel fait plus haut montre que cette condition est équivalente à $l_1 \wedge \dots \wedge l_k \neq 0$.

De manière analogue, la famille $(x_1, \dots, x_k)$ est liée ssi tous les mineurs d'ordre k de la matrice représentant les x_i en colonne sont nuls. Par le fait rappelé plus haut, cela signifie que pour toute partie I de $\{1, \dots, n\}$, de cardinal k, on a $f_I(x_1, \dots, x_k) = 0$. Comme les f_I forment une base de $\wedge^k E^*$, c'est équivalent à dire que $\alpha(x_1, \dots, x_k) = 0$ pour tout $\alpha \in \wedge^k E^*$.

Exercice 3. Soient α, β des 2-formes alternées sur un espace vectoriel E et $X_1, X_2, X_3, X_4 \in E$. Exprimer $\alpha \wedge \beta(X_1, X_2, X_3, X_4)$ en fonction des valeurs de α et β sur chaque couple de vecteurs.

Corrigé. D'après le cours,

$$\alpha \wedge \beta(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(2,2)} \varepsilon(\sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}) \beta(X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)}).$$

On dénombre les $\binom{2+2}{2} = 6$ éléments de $\mathfrak{S}(2,2)$ puis on calcule leur signatures. En utilisant l'antisymétrie de α et β, on peut regrouper certains termes. On trouve

$$\alpha \wedge \beta(X_1, X_2, X_3, X_4) = \alpha(X_1, X_2)\beta(X_3, X_4) - 4\alpha(X_1, X_3)\beta(X_2, X_4) + \alpha(X_3, X_4)\beta(X_1, X_2)$$

Exercice 4 (*Formes décomposables*)**.** Une forme de $\wedge^k E^*$ est dite *décomposable* si elle est produit de k formes de degré 1. On note n la dimension de E.

a) Constater que les formes de degré 1 et n sont décomposables.

b) Montrer que les formes de degré $n-1$ sont décomposables (étant donné $\alpha \in \wedge^{n-1}E^*$, on pourra considérer une base du noyau de l'application R_α de E^* dans $\wedge^n E^*$ qui à ℓ associe $\ell \wedge \alpha$).

c) Si $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ sont des formes linéaires de degré 1 linéairement indépendantes, montrer que $\alpha = \ell_1 \wedge \ell_2 + \ell_3 \wedge \ell_4$ n'est pas décomposable (considérer $\alpha \wedge \alpha$).

d) L'annulateur d'une forme $\alpha \in \wedge E^*$ est le sous-espace $\{\ell \in E^* /\ \ell \wedge \alpha = 0\}$. Montrer que si α est non-nulle la dimension de son annulateur est inférieure au degré de k avec égalité si et seulement si α est décomposable.

Corrigé. (a) Les formes de degré 1 sont évidemment décomposables. Les formes de degré n sont toutes des multiples de $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$ et sont donc également décomposables.

(b) Soit α une $n-1$-forme alternée. Comme suggéré par l'énoncé, on considère l'application linéaire $R_\alpha : E^* \to \wedge^n E^*, \ell \mapsto \ell \wedge \alpha$. Comme $\wedge^n E^*$ est de dimension 1, R_α est soit nulle, soit de rang 1, son noyau est donc de dimension n ou $n-1$. Soit $(h_1, \ldots, h_{n-1})$ une famille libre à $n-1$ éléments appartenant au noyau de R_α. Complétons-la en une base de E en y ajoutant un élément $h_n \in E$.

Ecrivons maintenant α dans la base constituée des (h_I) où I est une partie de $\{1, \ldots, n\}$ à $n-1$ éléments :

$$\alpha = \sum_{|I|=n-1} \alpha_I h_I.$$

Remarquons que si $i \in I$, $h_i \wedge h_I = 0$, ce qui implique que pour tout $i \leq n-1$:

$$0 = R_\alpha(h_i) = \sum_{|I|=n-1} \alpha_I h_i \wedge h_I = \pm\, \alpha_{\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} h_1 \wedge \ldots \wedge h_n.$$

Par conséquent tous les coefficients $\alpha_{\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}}$ s'annulent pour $i \leq n-1$. On en déduit que α est un multiple (éventuellement nul) de $h_1 \wedge \ldots \wedge h_{n-1}$ et donc que α est décomposable.

(c) On vérifie aisément que

$$\alpha \wedge \alpha = 2\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \ell_3 \wedge \ell_4.$$

Comme les formes linéaires sont linéairement indépendantes, l'exercice 2 nous donne $\alpha \wedge \alpha \neq 0$. Or si α était décomposable, on aurait nécessairement $\alpha \wedge \alpha = 0$.

(d) On raisonne comme dans la question (b) : on se donne une base $(h_1, \ldots, h_p)$ de l'annulateur de α, que l'on complète en une base $(h_1, \ldots, h_n)$ de E, puis on décompose α dans la base de $\wedge^k E^*$ associée : $\alpha = \sum_{|I|=k} \alpha_I h_I$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$,

$$0 = h_i \wedge \alpha \sum_{|I|=k} \alpha_I h_i \wedge h_I = \sum_{|I|=k, i \notin I} \alpha_I h_i \wedge h_I.$$

Les coefficients α_I ne faisant pas apparaître i sont donc nuls. Autrement dit tous les termes composants α font apparaître i, ceci pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$. On peut donc mettre $h_1 \wedge \ldots \wedge h_p$ en facteur dans l'écriture de α qui s'écrit donc : $\alpha = h_1 \wedge \ldots \wedge h_p \wedge \beta$, où $\beta \in \wedge^{k-p} E^*$.

En particulier, on remarque que $k \geq p$ et que l'égalité est atteinte seulement lorsque α est décomposable.

Exercice 5 (*Formes de degré 2*)**.** Etant donné une base $\ell = (\ell_i)_{i=1,\ldots,n}$ de E^* et un entier k tel que $2k \leqslant n$, on définit $\omega_{k,\ell} = \ell_1 \wedge \ell_2 + \ldots + \ell_{2k-1} \wedge \ell_{2k}$.

a) Soit (e_i) la base duale de (ℓ_i). Donner la matrice de $\omega_{k,\ell}$ dans la base (e_i).

b) Calculer les puissances extérieures k-ième et $(k+1)$-ième de $\omega_{k,\ell}$.

Soit une forme ω de degré 2. On se propose de montrer qu'il existe un unique entier k et une base (ℓ_i) tels que $\omega = \omega_{k,\ell}$. Soit B_ω l'application $E \to E^*$ qui à x associe $\omega(x, \cdot)$.

c) Quel est le rang de $B_{\omega_{k,\ell}}$?

On dit qu'un sous-espace F de E est ω-symplectique si la restriction de ω à F est non-dégénérée, c'est à dire que pour tout $x \in F$ non nul il existe $y \in F$ tel que $\omega(x, y) \neq 0$.

d) Montrer qu'un supplémentaire du noyau de B_ω est symplectique.

e) On suppose ω non-dégénérée. Montrer que si $F \subset E$ est symplectique, alors

$$F^{\perp\omega} = \{x \in E/\ \omega(x, y) = 0,\ \forall y \in F\}$$

est symplectique et est en somme directe avec F.

f) Montrer que $\omega = \omega_{k,\ell}$ avec k et (ℓ_i) convenablement choisis.

g) Montrer que ω est décomposable ssi $k = 1$.

Corrigé. (a) Il est facile de vérifier que $\ell_{2k-1} \wedge \ell_{2k}(e_i, e_j)$ vaut 1 si $(i, j) = (2k-1, 2k)$, -1 si $(i, j) = (2k, 2k-1)$ et 0 sinon. Par conséquent, la matrice de $\omega_{k,\ell}$, qui rappelons-le est la matrice $A_{k,\ell} = (\omega_{k,\ell}(e_i, e_j))_{i,j}$, est la matrice dont tous les coefficients sont nuls exceptés k blocs 2×2 diagonaux comme suit :

$$A_{k,\ell} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Cette question généralise le calcul fait dans la question (c) de l'exercice 4. On obtient de manière analogue

$$\omega_{k,\ell}^{\wedge k} = k!\, \ell_1 \wedge \ldots \wedge \ell_{2k}$$

et donc $\omega_{k,\ell}^{\wedge(k+1)} = 0$.

(c) Par définition la matrice de B_ω dans les bases (e_i) et (ℓ_i) est exactement la matrice de ω dans la base (e_i). Le rang de $B_{\omega_{k,\ell}}$ est donc celui de sa matrice $A_{k,\ell}$ soit $2k$.

(d) Soit V un supplémentaire du noyau de ω. Soit $x \in V$, x non nul. Comme x n'est pas dans le noyau de B_ω, il existe un élément $y \in E$ tel que $\omega(x, y) \neq 0$. Un tel y s'écrit de manière unique $y = u + v$, où $u \in \ker(b_\omega)$ et $v \in V$. Alors

$$\omega(x, v) = \omega(x, y) - \omega(x, u) = \omega(x, y) \neq 0,$$

et on a bien prouvé que la restriction de ω à V est non dégénérée.

(e) Commençons par prouver que la somme est directe. Si $x \in F \cap F^{\perp\omega}$, alors $\omega(x, y) = 0$ pour tout y dans F. Comme F est symplectique, un tel x doit être nul. La somme est donc directe.

Montrons mieux : F et $F^{\perp\omega}$ sont supplémentaires. Pour cela, montrons que la somme de leur dimensions vaut n. Considérons l'application $C : E \mapsto F^*$, telle que $C(x)$ est la forme linéaire $y \mapsto \omega(x, y)$ (remarquer que C ne diffère de B_ω que par son espace d'arrivée). Le noyau de C est clairement $F^{\perp\omega}$. Par ailleurs, le fait que F soit symplectique implique que la restriction de C à F est injective. La restriction de C à F est donc isomorphisme (car $\dim(F) = \dim(F^*)$) et en particulier C est surjective. Le théorème de rang appliqué à C nous donne $\dim \ker C + \dim \operatorname{im} C = n$ et donc $\dim(F^{\perp\omega}) + \dim(F) = n$.

Il reste à montrer que $F^{\perp\omega}$ est symplectique. Soit $x \in F^{\perp\omega}$, non nul. Comme ω est non dégénérée, il existe un vecteur $y \in E$ pour lequel $\omega(x, y) \neq 0$. Par ailleurs, y se décompose sous la forme $y = u + v$, $u \in F$, $v \in F^{\perp\omega}$. On a alors,

$$\omega(x, v) = \omega(x, y) - \omega(x, u) = \omega(x, y) \neq 0.$$

La restriction de ω à $F^{\perp\omega}$ est donc non dégénérée.

(f) Etudions d'abord le cas où ω est non dégénérée E. On peut alors construire un sous-espace symplectique de dimension 2 de la façon suivante. Soit e_1 un vecteur non nul. Alors, il existe un vecteur e_2 tel que $\omega(e_1, e_2) \neq 0$. Quitte à multiplier e_2 par un scalaire, on peut même supposer que $\omega(e_1, e_2) = 1$. Comme ω est antisymétrique, e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires et la matrice de ω restreint à $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, dans la base (e_1, e_2) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le sous espace $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est donc symplectique et il en est de même de son orthogonal $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)^{\perp\omega}$.

On peut donc effectuer à nouveau cette construction et construire un nouveau sous-espace analogue $\mathrm{Vect}(e_3, e_4)$ inclus dans $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)^{\perp\omega}$. En itérant le procédé on construit ainsi une base (e_i) dans laquelle la matrice de ω est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Traitons enfin le cas général. On fixe un supplémentaire V du noyau de B_ω. La restriction de ω à V est non dégénérée et on peut appliquer la construction précédente et obtenir une base $(e_1, \ldots, e_{2k})$ de V. En la complétant avec une base de $\ker B_\omega$, on obtient une base de E dans laquelle la matrice de ω est $A_{k,\ell}$. Autrement dit, dans cette base, $\omega = \omega_{k,\ell}$.

(g) Si $k = 1$, il est clair que ω est décomposable. Sinon, d'après la question (b), $w^{\wedge k} \neq 0$, ce qui ne peut pas arriver si ω est décomposable.

Exercice 6 *(Sur la sphère)***.** Rappelons que l'on définit sur la sphère par projection stéréographique deux systèmes de coordonnées $(U_N = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, x_N, y_N)$ et $(U_S = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, x_S, y_S)$. L'on a

$$(x_S, y_S) = \frac{(x_N, y_N)}{\rho_N} \text{ avec } \rho_N = x_N^2 + y_N^2.$$

a) Exprimer dx_S, dy_S, $dx_S \wedge dy_S$ en fonction de dx_N, dy_N et $dx_N \wedge dy_N$.

b) Décrire les formes différentielles de la sphère à l'aide des repères $(1, dx_S, dy_S, dx_S \wedge dy_S)$ et $(1, dx_N, dy_N, dx_N \wedge dy_N)$ de $\wedge T^*\mathbb{S}^2$

c) Vérifier que la deux-forme ω donnée sur U_S et U_N par

$$\omega|_{U_N} = -4\frac{dx_N \wedge dy_N}{(1+\rho_N)^2}, \qquad \omega|_{U_S} = 4\frac{dx_S \wedge dy_S}{(1+\rho_S)^2}$$

est bien définie sur la sphère.

Corrigé. (a) Rappelons que par définition des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ sur un ouvert U d'une variété différentiable M sont des fonctions définies sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que l'application $x \mapsto (x_1(x), \ldots, x_n(x))$, $U \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme sur son image (autrement dit une carte). Alors, en tout point $x \in U$, la famille des différentielles $(dx_1(x), \ldots, dx_n(x))$ forme une base de l'espace cotangent T_x^*M.

Calculer dx_S revient à appliquer les formules de différentiation de fonctions composées. On a $x_S = \frac{x_N}{\rho_N}$ donc

$$\begin{aligned} dx_S &= \frac{1}{\rho_N^2}(\rho_N dx_N - x_N d\rho_N) \\ &= \frac{1}{\rho_N^2}((y_N^2 - x_N^2)dx_N - 2x_N y_N dy_N). \end{aligned}$$

De manière analogue,
$$dy_S = \frac{1}{\rho_N^2}((x_N^2 - y_N^2)dx_N - 2x_N y_N dx_N).$$

Pour calculer $dx_S \wedge dy_S$, on remplace dx_S et dy_S par les formules ci-dessus puis on développe. On utilise ensuite les identités $dx_N \wedge dx_N = 0$, $dy_N \wedge dy_N = 0$ et $dx_N \wedge dy_N = -dy_N \wedge dx_N$. On obtient

$$\begin{aligned} dx_S \wedge dy_S &= \frac{-1}{\rho_N^4}((x_N^2 - y_N^2)^2 + 4x_N y_N)dx_N \wedge dy_N \\ &= \frac{-1}{\rho_N^2}\, dx_N \wedge dy_N. \end{aligned}$$

(b) Les 0-formes sont simplement les fonctions (lisses bien-sûr) sur la sphère.

Une 1-forme α de la sphère est la donnée de fonctions $f_S, g_S : U_S \to \mathbb{R}$ et $f_N, g_N : U_N \to \mathbb{R}$ telle que
$$\alpha|_{U_S} = f_S dx_S + g_S dy_S,$$
$$\alpha|_{U_N} = f_N dx_N + g_N dy_N$$
et telle que sur l'intersection $U_S \cap U_n$ on ait, d'après les formules obtenues en (a),
$$\begin{cases} f_S(y_N^2 - x_N^2) - 2g_S x_N y_N = f_N \rho_N^2 \\ g_S(x_N^2 - y_N^2) - 2f_S x_N y_N = g_N \rho_N^2 \end{cases}$$

De manière similaire, se donner une 2-forme β sur la sphère revient à se donner deux fonctions $h_S : U_s \to \mathbb{R}$ et $h_N \to \mathbb{R}$ telles que
$$\beta|_{U_S} = h_S dx_S \wedge dy_S \text{ et } \beta|_{U_N} = h_N dx_N \wedge dy_N$$
et telles que sur l'intersection $U_S \cap U_N$, on ait
$$h_S = -\rho_N^2 h_N.$$

(c) D'après la description donnée dans la question précédente, il suffit de prouver que
$$\frac{4}{(1+\rho_S)^2} = -\rho_N^2 \frac{-4}{(1+\rho_N)^2},$$
ce qui se vérifie aisément, étant donné que $\rho_S = \frac{1}{\rho_N}$.

Exercice 7 (*Formes invariantes sur la sphère)*. Déterminer la dimension du sous-espace de $\wedge^k T^*\mathbb{S}^2$ composé des formes invariantes par rotation. En degré 2, on pourra considérer la forme définie par
$$\alpha_x(Y, Z) = \det(x, Y, Z)$$
pour tout $x \in \mathbb{S}^2$ et $Y, Z \in T_x\mathbb{S}^2$.

Corrigé. Rappelons que l'ensemble des rotations de $\mathbb{R}^3$ agit de manière transitive sur la sphère : pour tout couple de points (x, y) de la sphère, il existe une rotation envoyant x sur y. Ainsi, une fonction sur la sphère invariante par rotation est nécessairement constante. L'espace des 0-formes (i.e., l'espace des fonctions) invariantes est donc de dimension 1.

Considérons à présent l'espace des 1-formes invariantes par rotations, autrement dit l'espace des 1-formes α telles que pour toute rotation R de $\mathbb{R}^3$, on ait $R^*\alpha = \alpha$. Nous allons montrer qu'une telle forme est forcément nulle. Soit P un point de la sphère. Considérons la projection stéréographique $\phi : \mathbb{S}^2\backslash\{-P\} \to \mathbb{R}^2$ construite à partir du point $-P$ antipode de P, de sorte que $\phi(P) = 0$. Considérons la rotation particulière R d'angle π et d'axe dirigé par P. L'hypothèse $R^*\alpha = \alpha$ transportée par ϕ donne $(\phi^{-1})^*R^*\alpha = (\phi^{-1})^*\alpha$. En notant $\beta = (\phi^{-1})^*\alpha$ et $g =$

$\phi \circ R \circ \phi^{-1}$, on obtient $g^*\beta = \beta$. Remarquons que g n'est rien d'autre que l'application $x \mapsto -x, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Par conséquent, $-\beta(-x) = \beta(x)$ et en particulier, $\beta(0) = 0$. Ceci implique par construction $\alpha(P) = 0$.

Considérons enfin le cas des 2-formes invariantes par rotations. L'énoncé suggère de considérer dans un premier temps la forme α donnée par

$$\alpha_x(Y, Z) = \det(x, Y, Z).$$

Il s'agit bien d'une 2-forme puisque que pour tout x, α_x est alternée et que α dépend de manière lisse de x. De plus, α est invariante par rotation : si R est une rotation de $\mathbb{R}^3$, son application linéaire tangente en tout point x est $T_xR = R$ donc

$$\begin{aligned}(R^*\alpha)_x(Y, Z) &= \alpha_{R(x)}(T_xR(Y), T_xR(Z)) = \det(R(x), R(Y), R(Z)) \\ &= \det(R)\det(x, Y, Z) = \alpha_x(Y, Z).\end{aligned}$$

Comme α ne s'annule en aucun point de la sphère, tout 2-forme β de la sphère s'écrit comme le produit de α par une fonction f (qui est lisse mais c'est inutile ici). Si β est invariante par rotation, on peut écrire

$$(f \circ R)\alpha = (f \circ R)R^*\alpha = R^*\beta = \beta = f\alpha,$$

ce qui montre que f est invariante par rotation donc constante. L'ensemble des deux formes invariantes par rotation n'est donc constitué que des multiples de α et est donc de dimension 1.

Exercice 8 (*Forme angulaire*)**.** Vérifier que la forme α de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

est fermée. Déterminer l'image réciproque $\varphi^*\alpha$ où φ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$

$$\theta \in \mathbb{R} \to (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$$

Montrer que α n'est pas exacte.

Corrigé. Vérifions que α est fermée :

$$d\alpha = d\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \wedge dy - d\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \wedge dx.$$

La formule

$$d\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}((y^2 - x^2)dx - 2xy\,dy),$$

donne ensuite

$$d\alpha = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}dx \wedge dy - \frac{-y^2 + x^2}{(x^2 + y^2)^2}dy \wedge dx = 0,$$

et α est donc bien fermée.

Calculons maintenant le pull back de α par ϕ. Pour cela, remarquons que

$$(\phi^*dx)_\theta(\xi) = dx_{\phi(\theta)}(d\phi_\theta(\xi)) = -\sin(\theta)\xi.$$

Autrement dit, en écrivant $d\theta$ pour la forme linéaire canonique sur $\mathbb{R}$ donnée par $\xi \mapsto \xi$, on a $\phi^*dx = -\sin(\theta)\,d\theta$. De même, $\phi^*dy = \cos(\theta)\,d\theta$. Nous pouvons à présent effectuer notre calcul :

$$\phi^*\alpha(\theta) = \frac{\cos\theta(\cos\theta)d\theta - \sin\theta(-\sin\theta)d\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = d\theta.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons α exacte. Alors, il existe une fonction lisse $f : \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ telle que $\alpha = df$. Alors, $d\theta = \phi^*\alpha = \phi^*(df) = d(\phi^*f) = d(f \circ \phi)$. Autrement dit, l'application, $f \circ \phi$ est de dérivée partout 1. Mais par ailleurs, comme ϕ est 2π-périodique, il doit en être de même de $f \circ \phi$. Il y a donc une contradiction : une fonction de $\mathbb{R}$ strictement croissante ne peut pas être périodique.

Exercice 9 (*Forme volume de la sphère*)**.** On note $X = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ le champ d'Euler de $\mathbb{R}^3$, ω la forme volume $dx \wedge dy \wedge dz$ de $\mathbb{R}^3$ et i le plongement de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que X, ω et $\beta = \iota_X\omega$ sont invariants par rotation.

b) Vérifier que la restriction à $\mathbb{S}^2$ de β est une forme volume.

c) Comparer $i^*\beta$ avec la forme ω de l'exercice 6. On rappelle que

$$i \circ p_S^{-1} : (x_S, y_S) \to (x, y, z) = \Big(\frac{2x_S}{1+\rho_S}, \frac{2y_S}{1+\rho_S}, \frac{1-\rho_S}{1+\rho_S}\Big)$$

ou $(U_S, p_S, \mathbb{R}^2)$ est la carte de $\mathbb{S}^2$ obtenue par projection stéréographique par rapport au pôle sud.

Corrigé. (a) Une rotation R étant linéaire, son application linéaire tangente vérifie en tout point $T_xR = R$, où l'on a identifié $\mathbb{R}^3$ avec $T_x\mathbb{R}^3$. Sous la même identification, $X(x) = x$. Par conséquent, $R_*X(x) = R(X(R^{-1}(x)) = R(R^{-1}(x)) = x = X(x)$.

Rappelons que la 3-forme $dx \wedge dy \wedge dz$ n'est rien d'autre que l'application déterminant. Ainsi,

$$R^*(dx \wedge dy \wedge dz)(u, v, w) = \det(R(u), R(v), R(w)) = \det R \det(u, v, w) = dx \wedge dy \wedge dz(u, v, w),$$

car $\det(R) = 1$.

Enfin, on vérifie aisément en revenant aux définitions que $R^*(\iota_X\omega) = \iota_{R_*^{-1}X}(R^*\omega)$. Comme X et ω sont R-invariants, on en déduit que β l'est également.

(b) La forme β n'est rien d'autre que la forme α de l'exercice 7 dont il est clair qu'elle ne s'annule pas et est donc une forme volume.

(c) La difficulté principale de cette question consiste à se débarasser de la confusion induite par les abus de notation ! (abus néanmoins courants et auxquels il est donc nécessaire de s'habituer). En effet, ici, x_S et y_S sont tout simplement des réels auxquels on applique l'application $i \circ p_S^{-1}$. En revanche, dans l'exercice 6, ce sont des applications $U_S \to \mathbb{R}$. Pour éviter les confusions, le mieux est de noter $i \circ p_S^{-1}$ plutôt sous la forme

$$i \circ p_S^{-1} : (u, v) \mapsto \Big(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-(u^2+v^2)}{1+u^2+v^2}\Big).$$

Ainsi par exemple $x_S \circ p_S^{-1}(u, v) = u$ donc $du = (p_S^{-1})^*dx_S$.

On veut montrer que $i^*\beta|_{U_S} = 4\frac{dx_S \wedge dy_S}{(1+\rho_S)^2}$, ce qui revient à dire $(i \circ p_S^{-1})^*\beta = 4\frac{du \wedge dv}{(1+u^2+v^2)^2}$

Il ne reste alors qu'un calcul un peu fastidieux mais facile : en posant $g = i \circ p_S^{-1}$, on commence par calculer l'application linéaire tangente $T_{(u,v)}g$, puis on évalue $g^*\beta$ à l'aide du fait que β est la forme α de l'exercice 7.

Exercice 10 (*Formes homogènes*)**.** Soit $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et H_t l'homothétie de rapport t de $\mathbb{R}^n$. Une forme $\alpha \in \Omega^k(U)$ est dite homogène de degré p si

$$H_t^*\alpha = t^p\alpha$$

pour tout $t > 0$.

a) Exprimer l'homogénéité de $\alpha \in \Omega^k(U)$ en fonction de ses coefficients dans la base des $(dx_I)_{I\in\mathcal{P}(\{1,\ldots,n\})}$.

b) Soit $X = \sum x^i\partial_{x^i}$ le champ de vecteurs d'Euler. Montrer qu'une forme α est homogène de degré p ssi

$$\mathcal{L}_X\alpha = p\alpha.$$

Corrigé. (a) On vérifie facilement que si I est de cardinal k, dx_I est homogène de degré k. Si l'on décompose α sous la forme

$$\alpha = \sum_{|I|=k} \alpha_I dx_I,$$

on peut alors écrire pour tout $t > 0$,

$$H_t^*\alpha = t^k \sum_{|I|=k} (\alpha_I \circ H_t) dx_I.$$

La forme α sera donc homogène de degré p si toutes les fonctions coeffcients α_I sont homogènes de degré $p - k$.

(b) Rappelons que le flot du champ de Liouville au temps t est H_{e^t}. Par conséquent, $\frac{d}{dt}(H_{e^t}^*\alpha) = H_{e^t}^*\mathcal{L}_X\alpha$.

Or, si α est homogène de degré p alors $\frac{d}{dt}(H_{e^t}^*\alpha) = \frac{d}{dt}(e^{tp}\alpha) = pe^{pt}\alpha$. A $t = 0$, on obtient la formule voulue.

Réciproquement, si la formule d'Euler est vérifiée on voit que $H_{e^t}^*\alpha$ est solution du problème de Cauchy

$$\dot{A} = pA, \quad A(0) = \alpha,$$

défini sur l'espace des k-formes. On en déduit l'expression $H_{e^t}^*\alpha = \exp(pt)\alpha$, comme souhaité.

Exercice 11 (*Coordonnées polaires)***.** Considérons l'application φ de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(\rho, t) = (\rho \cos t, \rho \sin t)$.

a) Soit I un intervalle ouvert de longueur plus petite que 2π. Montrer que φ induit un difféomorphisme φ_I de $\mathbb{R}^+ \times I$ sur $\varphi(\mathbb{R}^+ \times I)$.

b) Soit le système de coordonnées (r, θ) sur $\varphi(\mathbb{R}^+ \times I)$ tel que $\varphi_I^{-1} = (r, \theta)$. Montrer que les formes dr et $d\theta$ s'étendent à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ en des formes indépendantes de I.

Corrigé. (a) L'application φ_I est un difféomorphisme sur son image car d'une part, elle est injective (I est de longueur plus petite que 2π) et d'autre part, sa différentielle est en tout point inversible, de sorte que le théorème d'inversion locale peut être appliqué.

(b) Pour chaque I, on note α_I, β_I les formes dr et $d\theta$ obtenues à partir de φ_I. On souhaite définir des formes α,β sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ qui coïncide avec α_I, β_I sur chaque $\varphi(\mathbb{R}^+ \times I)$. Pour cela il suffit de vérifier que les α_I, β_I coïncident avec α_J, β_J sur toute intersection $\varphi(\mathbb{R}^+ \times I) \cap \varphi(\mathbb{R}^+ \times J)$.

En notant (ρ, t) les coordonnées sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, on a $d\rho = \varphi_I^* d\alpha_I = \varphi_J^* d\alpha_J$ et $dt = \varphi_I^* d\beta_I = \varphi_J^* d\beta_J$. Comme $\varphi_I \circ (\varphi_J)^{-1} = \mathrm{Id}$, on en déduit bien que α_I et α_J coïncident. De même pour β_I et β_J.

Exercice 12 (*Formes différentielles et quotient)***.** Soit M le quotient d'une variété N par l'action propre et libre d'un groupe discret. On note p la projection de N sur M. Montrer que

$$p^* : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(N)$$

est injective et décrire son image. En application décrire les formes différentielles du tore.

Corrigé. Rappelons que p^* est linéaire et qu'il est donc suffisant de montrer que son noyau est trivial. Par ailleurs, on sait que p^* préserve le degré et qu'il suffit donc d'étudier pour chaque degré k, l'application $p^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(N)$.

L'injectivité de p^* va résulter du fait que p est une submersion surjective. Supposons $p^*\alpha = 0$ et soient $y \in M$, $h_1, \ldots, h_k \in T_yM$. Montrons que $\alpha(y)(h_1, \ldots, h_k) = 0$. Comme p est surjective, il existe un point $x \in N$ tel que $p(x) = y$. Comme p est une submersion, il existe des vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_k$ tels que pour tout indice i, $h_i = T_xp(\xi_i)$. Alors,

$$\alpha(y)(h_1, \ldots, h_k) = \alpha(p(x))(T_xp(h_1), \ldots, T_xp(h_k)) = p^*\alpha(x)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = 0.$$

Montrons à présent que l'image de p^* est constituée des formes invariantes par l'action du groupe G (Remarquer que dans le cas des 0-formes, c'est à dire des fonctions, ce fait est bien connu). Pour tout $g \in G$, on note f_g le difféomorphisme $x \mapsto g \cdot x$.

Soit α une k-forme sur M. Montrons que $p^*\alpha$ est invariante. Soit donc $g \in G$. Rappelons que $p \circ f_g = p$ (un point et son image par f_g sont dans la même classe d'équivalence). Par conséquent,

$$f_g^*(p^*\alpha) = (p \circ f_g)^*\alpha = p^*\alpha,$$

et $p^*\alpha$ est bien invariante.

Soit β une forme invariante par G, c'est à dire telle que pour tout $g \in G$, $f_g^*\beta = \beta$. Construisons lui un antécédent par p^*. Soient $y \in M$, $h_1, \dots, h_k \in T_yM$. Choisissons un antécédent x de y par p et des antécédents $\xi_1, \dots, \xi_k$ de $h_1, \dots, h_k$ par T_xp (ceux-ci sont uniques car T_xp est bijective). On pose alors

$$\alpha(y)(h_1, \dots, h_k) = \beta(x)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \beta(x)(T_xp^{-1}(h_1), \dots, T_xp^{-1}(h_k)).$$

Cette définition ne dépend pas du choix de x : en effet, si x' est un autre antécédent de y, il existe un élément $g \in G$ tel que $x' = g \cdot x$ et l'égalité

$$\beta(x')(T_{x'}p^{-1}(h_1), \dots, T_{x'}p^{-1}(h_k)) = \beta(x)(T_xp^{-1}(h_1), \dots, T_xp^{-1}(h_k))$$

résulte alors de l'invariance de β. Il est clair que la forme α ainsi définie vérifie $p^*\alpha = \beta$.

On déduit des résultats précédents que les formes différentielles du tore s'identifient aux formes différentielles de $\mathbb{R}^n$ invariantes par translation entière.

Exercice 13 (*Formes différentielles de l'espace projectif*)**.** Soit p la projection de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Montrer que p^* est injective et que son image est l'ensemble des formes α de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ telle que

$$\iota_X\alpha = 0, \qquad \varphi_\lambda^*\alpha = \alpha,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$$

où X est le champ d'Euler et φ_λ l'homothétie de rapport λ.

Corrigé. L'injectivité de p^* se prouve comme dans l'exercice précédent, en remarquant que p est une submersion surjective. Pour vérifier que p est une submersion, il suffit de l'exprimer dans les cartes usuelles du projectif.

Vérifions que si β est une k-forme sur le projectif, alors $p^*\beta$ satisfait aux deux conditions de l'énoncé. D'abord, comme $p \circ \varphi_\lambda = p$, on a, $\varphi_\lambda^*(p^*\beta) = (p \circ \varphi_\lambda)^*\beta = p^*\beta$. Ensuite, remarquons que

$$\iota_X(p^*\beta)(x)(\xi_2, \dots, \xi_k) = \beta(p(x))(T_xp(X(x)), T_xp(\xi_2, \dots, T_xp(\xi_k)).$$

Or, comme le flot de X au temps t est donnée par φ_{e^t}, on a

$$T_xp(X(x)) = \frac{d}{dt}(p \circ \varphi_{e^t}(x))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(p(x))|_{t=0} = 0.$$

Donc $\iota_X(p^*\beta) = 0$.

Etudions à présent la réciproque : on suppose qu'une k-forme α sur $\mathbb{R}^n$ vérifie les deux conditions et on construit un antécédent β comme suit. Soient y un point du projectif et $h_1, \dots, h_k$ des vecteurs tangents en y. Choisissons un antécédent x de y par p et des antécédents $\xi_1, \dots, \xi_k$ de $h_1, \dots, h_k$ par T_xp. On pose alors $\beta(y)(h_1, \dots, h_k) = \alpha(x)(\xi_1, \dots, \xi_k)$. Cette définition de dépend pas du choix des vecteurs tangents ξ_i. En effet, si ξ_i' est un autre choix, alors $\xi_i' - \xi_i \in \ker T_xp = \mathrm{Vect}(X(x))$ et il existe donc des réels $a_1, \dots, a_k$ tels que

$$\alpha(x)(\xi_1', \dots, \xi_k') = \alpha(x)(\xi_1 + a_1X(x), \dots, \xi_k + a_kX(x)) = \alpha(x)(\xi_1, \dots, \xi_k).$$

La dernière égalité est obtenue en développant (k-linéarité de α) et en utilisant la condition $\iota_X\alpha = 0$ qui élimine tous les termes sauf un. Enfin, cette définition de dépend pas du choix de x : un autre choix x' serait colinéaire à x et cela résulterait de l'invariance de α par homothétie.