

TD 1

Exercice 1. *Convolution*

Décrire le produit de convolution d'une bosse de support $[0, 1]$ (par exemple $x \mapsto \exp[(x(x-1))^{-1}]$ entre 0 et 1 et 0 ailleurs) avec l'indicatrice de $[0, 10]$, $\chi_{[0,10]}$.

Exercice 2. *Intégrable ou pas ?*

Soient les fonctions définies sur \mathbb{R} et à valeurs réelles suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, & f_2(x) &= x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ f_3(x) &= \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} & f_4(x) &= \begin{cases} 1/x & \text{si } x \leq 1, x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ f_5(x) &= \begin{cases} 1/x & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} & f_6(x) &= \begin{cases} 1/\sqrt{|x|} & \text{si } x \leq 1, x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$f_7(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Déterminer si ces fonctions sont dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 3. *Distribution ou pas ?*

Les applications $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont-elles des distributions ?

1. $\langle T, \varphi \rangle = 1$,
2. $\langle T, \varphi \rangle = |\varphi(0)|$,
3. $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{10} \varphi^{(n)}(0)$,
4. $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(0)$,
5. $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(5)}(n)$,
6. $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$,
7. $[f]$ si f est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$? $L^1(\mathbb{R})$? $L^2(\mathbb{R})$?