GÉOMÉTRIE D'ARAKELOV DES VARIÉTÉS TORIQUES ET FIBRÉS EN DROITES INTÉGRABLES

VINCENT MAILLOT

Table des matières

1. Introduction 3
2. Variétés toriques sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 7
2.1. Cônes et éventails 7
2.2. Construction des variétés toriques sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 8
2.3. Diviseurs invariants sur $\mathbb{P}(\Delta)$ 13
2.4. Variété torique et fibré en droites associé à un polytope 18
2.5. Groupe de Picard et anneau de Chow d'une variété torique projective lisse 20
3. Variétés toriques complexes 23
3.1. Variété à coin associée à une variété torique 23
3.2. Un recouvrement canonique de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ 25
3.3. Métriques canoniques sur les faisceaux inversibles équivariants au-dessus de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ 28
3.4. Métriques canoniques sur les fibrés en droites sur $\mathbb{P}(\Delta)$. 35
4. Produits de courants 35
4.1. Motivation 36
4.2. Théorie de Bedford-Taylor-Demailly 36
4.3. Formes différentielles généralisées 39
4.4. Convergence au sens de Bedford-Taylor et image inverse 44
4.5. Métriques admissibles 51
4.6. Un théorème d'approximation globale 53
4.7. Fibrés en droites intégrables 56
5. Groupes de Chow arithmétiques généralisés 57
5.1. Théorie classique de Gillet-Soulé 57
5.2. Fibrés en droites intégrables sur une variété arithmétique 60
5.3. Groupes de Chow arithmétiques généralisés 62
5.4. L'accouplement $\widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X) \otimes \widehat{CH}^q_{\mathrm{int}}(X) \to \widehat{CH}^{p+q}_{\mathrm{int}}(X)_{\mathbb{Q}}$ 73
5.5. Degré arithmétique et hauteurs 78
6. Courants de Chern canoniques sur les variétés toriques 84

6.1. Préliminaires 84
6.2. Calcul de $c_1(\overline{L})$ 85
6.3. Calcul de $c_1(\overline{L}_1)\cdots c_1(\overline{L}_q)$ 90
6.4. Diviseurs élémentaires 96
7. Géométrie d'Arakelov des variétés toriques 98
7.1. Annulation des multihauteurs 99
7.2. Hauteurs canoniques des hypersurfaces de $\mathbb{P}(\Delta)$ 100
7.3. Un exemple. 100
7.4. L'anneau de Chow arithmétique généralisé d'une variété torique. 103
8. Un théorème de Bernstein-Koushnirenko arithmétique 105
8.1. A propos d'une constante associée à un polytope convexe 105
8.2. Un théorème de Bernstein-Koushnirenko arithmétique. 110
Références 115

1. Introduction

Le but de cet article est l'étude, dans le cadre de la géométrie d'Arakelov, des variétés toriques projectives et lisses. Chemin faisant, nous étendons sur certains points la théorie développée dans [GS1].

Grâce à Demazure (cf. [Dema]), on sait associer à tout éventail Δ de $\mathbb{Z}^d$ un schéma $\pi : \mathbb{P}(\Delta) \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ que l'on appelle *variété torique* associée à Δ. On trouve dans la littérature (cf. [Da], [Oda] et [Fu2] pour des références précises) une description explicite de la variété complexe $\mathbb{P}(\Delta)_{\mathbb{C}}$ en terme des propriétés combinatoires de Δ. Revenant au point de vue originel de Demazure, nous montrons que cette description s'étend sans difficulté à la situation sur $\mathbb{Z}$. En particulier, on dispose lorsque $\mathbb{P}(\Delta)$ est projective et lisse, d'une description agréable basée sur un théorème de Jurkiewicz et Danilov, de l'anneau de Chow $CH^*(\mathbb{P}(\Delta))$ en terme de générateurs et relations (théorème 2.5.7). Plus précisément, nous montrons que $CH^*(\mathbb{P}(\Delta))$ est engendré en tant qu'anneau par la première classe de Chern $c_1(L) \in CH^1(\mathbb{P}(\Delta))$ des fibrés en droites L sur $\mathbb{P}(\Delta)$.

Afin de donner une description analogue de l'anneau de Chow arithmétique $\widehat{CH}^*(\mathbb{P}(\Delta))$, il nous est nécessaire de munir tout fibré en droites L sur $\mathbb{P}(\Delta)$ d'une métrique $\|.\|_{L,\infty}$ "canonique" permettant entre autre chose le calcul explicite du produit :

$$\hat{c}_1(L, \|.\|_{L,\infty})^p \in \widehat{CH}^p(\mathbb{P}(\Delta)),$$

où $\hat{c}_1(L, \|.\|_{L,\infty})$ désigne la première classe de Chern arithmétique de $(L, \|.\|_{L,\infty})$ (comparer avec [Ma1] où un point de vue analogue est développé pour les grassmanniennes).

Nous donnons plusieurs constructions d'une métrique $\|.\|_{L,\infty}$ qui est canonique dans le sens où l'application $L \mapsto \|.\|_{L,\infty}$ possède des propriétés fonctorielles (proposition 3.3.2) qui permettent de la caractériser entièrement. Malheureusement, la métrique ainsi construite n'est pas C^∞ en général. La première "forme" de Chern $c_1(L, \|.\|_{L,\infty})$ est un courant réel de bidegré (1,1), et donc le produit $c_1(L, \|.\|_{L,\infty})^p$, et *a fortiori* le produit $\hat{c}_1(L, \|.\|_{L,\infty})^p$, ne sont pas définis.

Nous sommes donc amenés dans un premier temps à étendre sur certains points la théorie développée dans [GS1], afin de pouvoir considérer en géométrie d'Arakelov des fibrés en droites munis de métriques non-nécessairement C^∞. Comme, pour autant qu'il nous soit permis d'en juger, ces développements possèdent un intérêt propre, nous avons choisi d'en donner une exposition en toute généralité.

Quittons donc pour quelques temps l'univers torique, et considérons X une variété arithmétique quelconque de dimension absolue $d+1$. Reprenant une terminologie introduite par Zhang [Zha], nous dirons d'un couple $(L, \|.\|)$ formé d'un fibré en droites L sur X et d'une métrique hermitienne continue $\|.\|$ sur $L(\mathbb{C})$ qu'il est *admissible* si L est engendré par ses sections globales, $\|.\|$ est positive et peut être approchée uniformément sur $X(\mathbb{C})$ par des métriques positives C^∞. Plus généralement, un fibré en droites sur X sera dit *intégrable* s'il est différence de deux fibrés en droites admissibles. Tout fibré en droites L sur $\mathbb{P}(\Delta)$ muni de sa métrique canonique $\|.\|_{L,\infty}$ est intégrable (exemple 4.7.2).

Nous développons alors sur $X(\mathbb{C})$ un formalisme de *formes différentielles généralisées*; en particulier la première "forme" de Chern $c_1(\overline{L})$ d'un fibré en droites intégrable $\overline{L}$ est une forme différentielle généralisée à notre sens. En nous appuyant sur une théorie développée par Bedford-Taylor [BeT] puis Demailly [De2], nous montrons comment l'on peut donner un sens au produit de deux telles formes (proposition 4.3.7).

Nous construisons ensuite un groupe gradué $\widehat{CH}^*_{\text{int}}(X)$ contenant l'anneau de Chow arithmétique usuel $\widehat{CH}^*(X)$, de telle sorte que pour tout fibré en droites intégrable $\overline{L}$ sur X, on ait $\hat{c}_1(\overline{L}) \in \widehat{CH}^1_{\text{int}}(X)$. Nous étendons alors partiellement le formalisme développé dans [GS1] au groupe $\widehat{CH}^*_{\text{int}}(X)$, ce qui nous permet de retrouver certains résultats de Zhang [Zha] concernant les fibrés intégrables. Notre principal résultat dans cette direction est le suivant (théorème 5.4.1). Il existe un accouplement :

$$\widehat{CH}^p_{\text{int}}(X) \otimes \widehat{CH}^q_{\text{int}}(X) \longrightarrow \widehat{CH}^{p+q}_{\text{int}}(X)_{\mathbb{Q}},$$

qui prolonge celui défini par Gillet-Soulé sur $\widehat{CH}^*(X)$ et qui munit $\widehat{CH}^*_{\text{int}}(X)$ d'une structure d'anneau commutatif, associatif et unifère. De plus, on dispose d'un morphisme $\widehat{\deg} : \widehat{CH}^{d+1}_{\text{int}}(X) \to \mathbb{R}$ qui prolonge celui défini dans [GS1], et tel que (théorème 5.5.6) si $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{d+1}$ sont des fibrés intégrables sur X et $h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_{d+1}}(X)$ est la hauteur de X relativement à $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{d+1}$ telle qu'elle est définie dans [Zha], alors :

$$h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_{d+1}}(X) = \widehat{\deg}(\hat{c}_1(\overline{L}_1) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_{d+1})).$$

Revenons au cas particulier des variétés toriques : Soient $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q$ des fibrés en droites sur $\mathbb{P}(\Delta)$ munis de leur métrique canonique; nous donnons une formule explicite pour le produit généralisé $c_1(\overline{L}_1) \cdots c_1(\overline{L}_q)$ en terme de la combinatoire de Δ (théorème 6.3.1). Nous montrons que cette formule conduit à un algorithme particulièrement simple pour le calcul du volume mixte de polytopes convexes (remarque 6.3.7).

Lorsque $q = d + 1$, nous montrons que la hauteur canonique $h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_{d+1}}(\mathbb{P}(\Delta))$ est nulle (proposition 7.1.1), puis nous approfondissons ce résultat en montrant (théorème 7.4.1) que le sous-anneau de $\widehat{CH}^*_{\text{int}}(\mathbb{P}(\Delta))$ engendré par les premières classes de Chern arithmétiques $\hat{c}_1(L, \|.\|_{L,\infty})$ des fibrés en droites L sur $\mathbb{P}(\Delta)$ est isomorphe canoniquement à $CH^*(\mathbb{P}(\Delta))$. Ce résultat est l'analogue arithmétique du théorème de Jurkiewicz et Danilov. Nous en déduisons que la hauteur canonique d'une hypersurface dans $\mathbb{P}(\Delta)$ (i.e. sa hauteur relativement à des fibrés en droites sur $\mathbb{P}(\Delta)$ munis de leur métrique canonique) est donnée essentiellement par la mesure de Mahler du polynôme qui la définit (proposition 7.2.1).

En nous appuyant sur les résultats précédents, nous concluons cet article par la démonstration d'un analogue arithmétique du théorème de Bernstein-Koushnirenko (théorème 8.2.1 et corollaire 8.2.3) donnant une majoration de la hauteur des points d'intersections de d hypersurfaces de $\mathbb{P}(\Delta)$ en fonction de leur hauteur canonique et de leur polyhèdre de Newton.

Passons maintenant en revue l'organisation de cet article.

Le chapitre 2 est consacré aux variétés toriques sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. Nous rappelons au 2.1 quelques propriétés simples des cônes et des éventails, et au 2.2 la construction d'après Demazure des variétés toriques et de leurs morphismes canoniques. Nous introduisons au 2.3 la notion de diviseur invariant et de fonction support associée. Nous rappelons en les adaptant à la situation sur $\mathbb{Z}$ certains critères pour l'amplitude d'un diviseur invariant. Au 2.4 nous montrons comment l'on peut construire de manière canonique une variété torique projective à partir d'un polytope convexe entier. Enfin le 2.5 est consacré à la structure de l'anneau de Chow d'une variété torique projective lisse. En utilisant une décomposition cellulaire sur $\mathbb{Z}$ d'une telle variété, nous montrons comment la plupart des résultats classiques (sur $\mathbb{C}$) s'étendent à la situation sur $\mathbb{Z}$; nous en profitons pour prouver un théorème d'annulation des groupes $CH^{p,p-1}(\mathbb{P}(\Delta))$. C'est là le seul point vraiment nouveau de ce chapitre.

Au chapitre 3 nous nous intéressons plus particulièrement aux variétés toriques complexes. La variété torique à coin $\mathbb{P}(\Delta)_{\geqslant}$ est définie au 3.1. Nous présentons au 3.2 un recouvrement canonique de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ introduit par Batyrev et Tschinkel [BaT] puis étudions certaines de ses propriétés. Nous utilisons ce recouvrement pour construire au 3.3 la métrique canonique $\|.\|_{L,\infty}$. Nous montrons que cette métrique vérifie certaines propriétés de multiplicativité et de fonctorialité (proposition 3.3.2). Nous en donnons ensuite deux autres constructions, l'une basée sur un théorème de Zhang (théorème 3.3.3), l'autre par image inverse (proposition 3.3.8). Nous déduisons de cette dernière construction un théorème d'approximation globale pour $\|.\|_{L,\infty}$ (proposition 3.3.12).

Le chapitre 4 est centré sur l'étude des formes différentielles généralisées sur une variété complexe arbitraire. Après avoir rappelé au 4.2 la théorie développée par Bedford-Taylor [BeT] puis Demailly [De2], nous définissons au 4.3 et au 4.4 plusieurs types remarquables de courants qui, grâce à cette théorie, peuvent être multipliés. Nous introduisons aux sections 4.5 et 4.7 les notions de fibrés en droites admissibles et de fibrés en droites intégrables, et montrons au 4.6 que tout fibré en droites ample muni d'une métrique positive sur une variété projective est admissible.

Nous abordons au chapitre 5 le cœur de notre sujet, à savoir la construction de l'anneau $\widehat{CH}^*_{\mathrm{int}}(X)$ pour toute variété arithmétique X. Après avoir rappelé au 5.1 la théorie classique de Gillet-Soulé et introduit au 5.2 le groupe de Picard arithmétique généralisé $\widehat{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{int}}(X)$, nous définissons au 5.3 les groupes de Chow arithmétiques généralisés $\widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X)$ (définition 5.3.11) puis nous construisons au 5.4 l'accouplement $\widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X) \otimes \widehat{CH}^q_{\mathrm{int}}(X) \to \widehat{CH}^{p+q}_{\mathrm{int}}(X)_{\mathbb{Q}}$. Finalement nous relions au 5.5 cette construction à celle de Zhang [Zha] (théorème 5.5.6), puis nous démontrons un résultat général de positivité (proposition 5.5.7) qui nous servira au chapitre 8 lors de la démonstration d'un analogue arithmétique du théorème de Bernstein-Koushnirenko.

Nous retournons à partir du chapitre 6 aux variétés toriques. Après avoir donné au 6.2 une expression explicite, pour tout fibré en droites $\overline{L}$ sur $\mathbb{P}(\Delta)$ muni de sa métrique canonique, du courant $c_1(\overline{L})$, nous généralisons ce résultat en donnant au 6.3 une formule explicite pour le produit généralisé de tels courants de Chern (théorème 6.3.1). Nous démontrons enfin au 6.4 un résultat d'annulation pour un tel produit (corollaire 6.4.2).

Le chapitre 7 est consacré à l'étude de la géométrie d'Arakelov des variétés toriques. Nous démontrons au 7.1 un théorème d'annulation des multihauteurs canoniques de $\mathbb{P}(\Delta)$ (proposition 7.1.1) et établissons au 7.2 une formule reliant la hauteur canonique d'une hypersurface dans $\mathbb{P}(\Delta)$ à la hauteur de Mahler du polynôme qui la définit (proposition 7.2.1). Le 7.3 présente un exemple intéressant : le calcul de la mesure de Mahler d'une droite dans $\mathbb{P}^2$. Nous exhibons au 7.4 une section canonique du morphisme d'anneaux application cycle $\zeta : \widehat{CH}^*_{\mathrm{int}}(\mathbb{P}(\Delta)) \to CH^*(\mathbb{P}(\Delta))$.

Au 8.1, nous associons de manière fonctorielle une constante réelle positive $L(\nabla)$ à tout polytope convexe entier ∇ de $\mathbb{R}^d$, puis nous en donnons une majoration explicite dans le cas où ∇ est absolument simple (proposition 8.1.6). Finalement nous démontrons par récurrence au 8.2 un analogue arithmétique du théorème de Bernstein-Koushnirenko faisant intervenir dans son énoncé les constantes $L(\nabla)$ précédemment introduites (théorème 8.2.1 et corollaire 8.2.3).

Une partie des résultats présentés ici avaient été annoncés dans [Ma2].

L'auteur tient à exprimer sa profonde gratitude à J.-B. Bost sans l'aide duquel ce travail n'aurait jamais vu le jour. Il lui est également agréable de remercier J. Cassaigne, A. Chambert-Loir, D. Harari, M. Laurent, E. Leichtnam, J. Pfeiffer, C. Soulé et B. Teissier pour des discussions intéressantes.

2. Variétés toriques sur Spec $\mathbb{Z}$

2.1. Cônes et éventails.

Pour plus de détails sur les définitions et les démonstrations des propositions énoncées ici, on peut consulter ([Oda], §1.1) et aussi ([Fu2], §1.1 et 1.2).

Soit $N \simeq \mathbb{Z}^d$ un $\mathbb{Z}$-module libre de rang d dans lequel on a choisi une base $e_1, \ldots, e_d$. On note $M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ son $\mathbb{Z}$-module dual. On obtient un accouplement non dégénéré :

$$< \, , \, > : M \times N \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

On pose $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Ce sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension d. L'accouplement ci-dessus s'étend en une forme bilinéaire non-dégénérée :

$$< \, , \, > : M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Définition 2.1.1. On appelle *cône polyhédral rationnel dans* N ou plus simplement *cône* tout ensemble $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ de la forme :

$$\sigma = \sum_{i \in I} \mathbb{R}^+ n_i,$$

où $(n_i)_{i \in I}$ est une famille finie d'éléments de N. La *dimension* de σ est définie comme la dimension de l'espace vectoriel réel engendré par les points du cône σ :

$$\dim \sigma = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Vect}(\sigma)) = \dim_{\mathbb{R}}(\sigma + (-\sigma)).$$

Remarque 2.1.2. On définit de la même façon les *cônes polyhédraux rationnels dans* M.

On définit le *dual* σ^* (resp. *l'orthogonal* $\sigma^\perp$) du cône σ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \{v \in M_{\mathbb{R}} \, : < v, x > \geqslant 0, \quad \forall x \in \sigma\} \subseteq M_{\mathbb{R}}, \\ \sigma^\perp &= \{v \in M_{\mathbb{R}} \, : < v, x > = 0, \quad \forall x \in \sigma\} \subseteq M_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Définition 2.1.3. On dit que $\tau \subseteq \sigma$ est une *face* de σ, et on note $\tau < \sigma$, si l'on peut trouver $v \in \sigma^*$ tel que :

$$\tau = \sigma \cap \{v\}^\perp$$

Remarque 2.1.4. Dans un tel cas, on peut toujours choisir $v \in \sigma^* \cap M$ (voir par exemple [Oda], prop. 1.3 ou [Fu2], p. 13).

Définition 2.1.5. Un cône σ est dit *strict* s'il ne contient aucune droite réelle.

Les assertions suivantes découlent aisément des définitions :

Proposition 2.1.6.

– *Toute face d'un cône est un cône.*

– *Le dual d'un cône* σ *est un cône, et de plus* $(\sigma^*)^* = \sigma$.
– *Pour tout cône strict* σ, $\dim \sigma^* = n$.
– *On a* $\dim \sigma + \dim \sigma^{\perp} = n$ *pour tout cône* σ.

Définition 2.1.7. Un *éventail* de $N_{\mathbb{R}}$ est une famille finie $\Delta = \{\sigma\}$ de cônes stricts de $N_{\mathbb{R}}$ tels que :
– Si $\sigma \in \Delta$, alors toute face τ de σ appartient à Δ.
– Si $\sigma, \sigma' \in \Delta$, alors $\sigma \cap \sigma'$ est une face à la fois de σ et de σ'.

La réunion $|\Delta| = \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma$ est appelée *support* de Δ. On note :

$$\Delta(j) = \{\sigma\}_{\substack{\sigma \in \Delta \\ \dim \sigma = j}}$$

le j*-squelette* de Δ. On notera également $\Delta_{\max} = \Delta(d)$.

Définition 2.1.8. Soit σ un cône strict de $N_{\mathbb{R}}$, on note $\mathscr{S}_\sigma = M \cap \sigma^*$.

La proposition suivante donne une caractérisation algébrique des ensembles $\mathscr{S}_\sigma$.

Proposition 2.1.9. *Soit* σ *un cône strict de* $N_{\mathbb{R}}$. *L'ensemble* $\mathscr{S}_\sigma$ *est un semi-groupe (additif), saturé, de type fini. De plus,* $\mathscr{S}_\sigma$ *engendre* M *en tant que groupe. Réciproquement, si* $\mathscr{S} \subset M$ *est un tel semi-groupe, alors il existe* σ *un cône strict de* $N_{\mathbb{R}}$ *tel que* $\mathscr{S} = \mathscr{S}_\sigma$.

Dans toute la suite du texte, N est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang d fixé une fois pour toute.

2.2. **Construction des variétés toriques sur Spec $\mathbb{Z}$.**

On suit ici essentiellement ([Dema], §4). Demazure s'intéresse aux variétés toriques lisses, mais les démonstrations des propositions données ici s'étendent immédiatement au cas général. On peut également consulter ([Oda], §1) et ([Fu2], §1 et §2) pour les démonstrations de ces propositions dans le cas où le corps de base est $\mathbb{C}$.

Définition 2.2.1. (Variétés toriques affines associée à un cône σ). Soit σ un cône strict de $N_{\mathbb{R}}$, on note U_σ le $\mathbb{Z}$-schéma :

$$U_\sigma = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\mathscr{S}_\sigma])$$

Proposition 2.2.2. *Le* $\mathbb{Z}$*-schéma* U_σ *est affine, normal, plat sur* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$*, à fibres géométriquement intègres.*

Proposition 2.2.3. *Soit* $\tau < \sigma$*, l'inclusion* $\mathscr{S}_\sigma \subseteq \mathscr{S}_\tau$ *induit un morphisme canonique* $U_\tau \to U_\sigma$ *; c'est une immersion ouverte de* $\mathbb{Z}$*-schémas.*

Démonstration. Voir ([Dema], §4, lemme 1), et aussi ([Oda], th. 1.4).

Exemple 2.2.4. Prenons $\sigma = \{0\}$, on obtient $U_{\{0\}} = T$, le $\mathbb{Z}$-tore dual de N.

Soient σ et σ' deux cônes d'un même éventail Δ. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & U_\sigma \\ U_{\sigma\cap\sigma'} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\ & U_{\sigma'} \end{tikzcd}$$

La proposition précédente permet de recoller U_σ et $U_{\sigma'}$ le long de $U_{\sigma\cap\sigma'}$. Plus généralement on pose la définition suivante :

Définition 2.2.5. Soit Δ un éventail. On appelle *variété torique associée à l'éventail* Δ et on note $\mathbb{P}(\Delta)$ le schéma obtenu par recollement des U_σ, σ parcourant Δ, à l'aide des immersions ouvertes $U_{\sigma\cap\sigma'} \hookrightarrow U_\sigma$ et $U_{\sigma\cap\sigma'} \hookrightarrow U_{\sigma'}$, pour σ, $\sigma' \in \Delta$.

Proposition 2.2.6. *Le $\mathbb{Z}$-schéma $\mathbb{P}(\Delta)$ est plat sur* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$*, normal, séparé, intègre, de dimension absolue $d+1$, à fibres géométriquement intègres.*

Démonstration. Voir ([Dema], §4, prop. 1), et aussi ([Oda], th. 1.4); on peut également consulter ([Fu2], §1.4) pour certains aspects.

La proposition suivante justifie le nom de *variété torique* pour un $\mathbb{Z}$-schéma de la forme $\mathbb{P}(\Delta)$:

Proposition 2.2.7. *Notons T le $\mathbb{Z}$-tore dual de N; l'action :*

$$T \otimes_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} U_{\{0\}} \simeq T \otimes_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} T \longrightarrow T$$

de T sur $U_{\{0\}}$, définie par la structure de schéma en groupe de T, se prolonge en une action :

$$T \otimes_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \mathbb{P}(\Delta) \longrightarrow \mathbb{P}(\Delta)$$

de T sur $\mathbb{P}(\Delta)$.

Démonstration. Voir ([Dema], p. 559). On peut également consulter ([Oda], p. 9).

Comme $T = U_{\{0\}}$ est un ouvert dense de $\mathbb{P}(\Delta)$, tout monôme x^m pour $m \in M$ s'étend en une fonction rationnelle sur $\mathbb{P}(\Delta)$. On note χ^m cette fonction que l'on appelle *caractère* associé à m. La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition de $\mathbb{P}(\Delta)$:

Proposition 2.2.8. *Soit $\sigma \in \Delta$ et $m \in M \cap \sigma^* = \mathscr{S}_\sigma$, alors χ^m est régulière sur U_σ. De plus si m', $m'' \in \mathscr{S}_\sigma$ alors $\chi^{m'+m''} = \chi^{m'}\chi^{m''}$ sur U_σ.*

Définition 2.2.9. On notera $\epsilon : \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \to \mathbb{P}(\Delta)$ la section nulle de T vue comme section de $\mathbb{P}(\Delta)$:

$$\begin{tikzcd} T \subseteq \mathbb{P}(\Delta) \\ \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \arrow[u, bend left, "\epsilon"] \end{tikzcd}$$

Les deux propositions suivantes donnent des critères simples sur Δ pour que $\mathbb{P}(\Delta)$ soit propre (resp. lisse) :

Proposition 2.2.10. *La variété torique* $\mathbb{P}(\Delta)$ *est propre sur* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ *si et seulement si* Δ *est complet (i.e.* $|\Delta| = N_{\mathbb{R}}$*).*

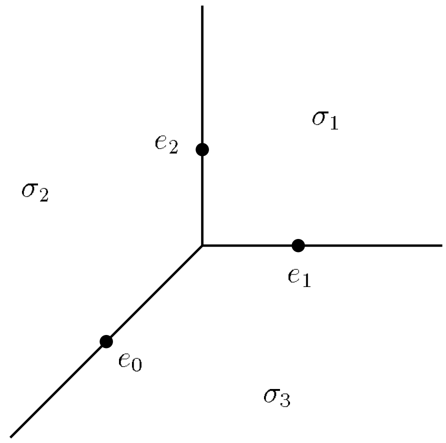
Proposition 2.2.11. *La variété torique* $\mathbb{P}(\Delta)$ *est lisse sur* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ *si et seulement si tout cône* $\sigma \in \Delta$ *est engendré par une partie d'une base de* N*. Dans ce cas,* Δ *est dit régulier.*

Démonstration. Voir ([Dema], §4, prop. 4) et ([Dema], §4, def. 1 et prop. 1). On peut également consulter ([Oda], th. 1.10) et ([Fu2], §2.1 et 2.4).

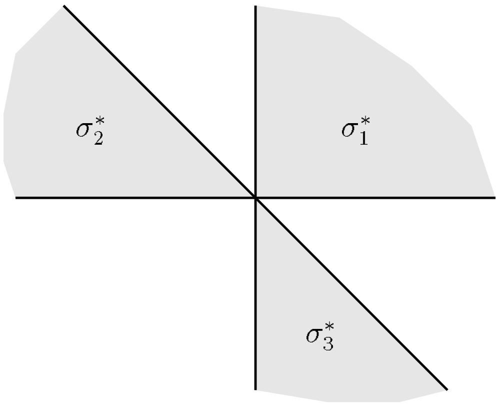
Remarque 2.2.12. Soit k un corps quelconque et notons $\mathbb{P}(\Delta)_k = \mathbb{P}(\Delta) \otimes_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spec} k$ la variété torique sur k associée à Δ comme dans [Da]. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- Le schéma $\mathbb{P}(\Delta)$ est lisse sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.
- Le schéma $\mathbb{P}(\Delta)$ est régulier.
- Le schéma $\mathbb{P}(\Delta)_k$ est lisse sur k.

Exemple 2.2.13. On prend $N = \mathbb{Z}^2$. On note $e_0 = -e_1 - e_2$ et on pose $\sigma_1 = \mathbb{R}^+e_1 + \mathbb{R}^+e_2$, $\sigma_2 = \mathbb{R}^+e_0 + \mathbb{R}^+e_2$ et $\sigma_3 = \mathbb{R}^+e_0 + \mathbb{R}^+e_1$.



En prenant σ_1, σ_2, σ_3 ainsi que leurs faces $\mathbb{R}^+e_0$, $\mathbb{R}^+e_1$, $\mathbb{R}^+e_2$ et $\{0\}$, on obtient un éventail complet et régulier Δ_2. Dans M, les cônes duaux sont donnés par :



Les ouverts U_{σ_1}, U_{σ_2} et U_{σ_3} sont des plans affines que l'on recolle par les applications :

$$\begin{array}{rclcrclcrcl}
\Theta_{1,2} : U_{\sigma_1} & \to & U_{\sigma_2} & \quad & \Theta_{1,3} : U_{\sigma_1} & \to & U_{\sigma_3} & \quad & \Theta_{2,3} : U_{\sigma_2} & \to & U_{\sigma_3} \\
(x,y) & \mapsto & \left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{1}{x}\right) & & (x,y) & \mapsto & \left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{1}{y}\right) & & (x,y) & \mapsto & \left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{y}{x}\right)
\end{array}$$

On en déduit que $\mathbb{P}(\Delta_2)$ s'identifie au plan projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$.

La proposition suivante donne une décomposition de X sous forme d'une réunion disjointe de tores :

Proposition 2.2.14. *Soit Δ un éventail de $N_{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{P}(\Delta)$ la variété torique associée. Pour tout $\sigma \in \Delta$ on considère le tore :*

$$\mathscr{O}(\sigma) = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{Z}\left[M \cap \sigma^{\perp}\right]\right).$$

Le tore $\mathscr{O}(\sigma)$ se plonge de manière canonique dans l'ouvert U_σ (et donc dans $\mathbb{P}(\Delta)$) par le morphisme :

$$i_\sigma : \mathscr{O}(\sigma) = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{Z}\left[M \cap \sigma^{\perp}\right]\right) \hookrightarrow \operatorname{Spec}\left(\mathbb{Z}\left[M \cap \sigma^{*}\right]\right) = U_\sigma,$$

obtenu par prolongement par zéro (i.e. induit par le morphisme $i_\sigma : \mathbb{Z}\left[M \cap \sigma^*\right] \to \mathbb{Z}\left[M \cap \sigma^{\perp}\right]$ défini par $i_\sigma(\chi^m) = \chi^m$ si $m \in \sigma^\perp$ et $i_\sigma(\chi^m) = 0$ sinon). De plus :

1. *Soit k un corps algébriquement clos, toute $T(k)$-orbite de $\mathbb{P}(\Delta)(k)$ est de la forme $\mathscr{O}(\sigma)(k)$ avec $\sigma \in \mathbb{P}(\Delta)$.*
2. *Le schéma $\mathbb{P}(\Delta)$ est réunion disjointe des sous-schémas $\mathscr{O}(\sigma)$ pour σ parcourant Δ et cette décomposition est respectée par l'action de T.*
3. *On a :*
   - $\mathscr{O}(\{O\}) = U_{\{O\}} = T$.
   - $\tau < \sigma \Leftrightarrow \mathscr{O}(\sigma) \subset \overline{\mathscr{O}(\tau)}$.
   - $U_\sigma = \bigcup_{\tau<\sigma} \mathscr{O}(\tau)$.

4. *Pour tout $\sigma \in \Delta$, notons $V(\sigma) = \overline{\mathscr{O}(\sigma)}$; c'est une variété torique et l'on a :*

$$V(\sigma) = \bigcup_{\sigma < \tau} \mathscr{O}(\tau).$$

Démonstration. Voir ([Dema], §4, prop. 2). On pourra également consulter ([Oda], prop. 1.6) et ([Fu2], §3.1).

Remarque 2.2.15. Soient $\sigma \in \Delta$ et $N_\sigma \subset N$ le $\mathbb{Z}$-module engendré par $\sigma \cap N$. On note $N(\sigma)$ le $\mathbb{Z}$-module quotient N/N_σ et $M(\sigma) = \sigma^\perp \cap M$ son dual.

On appelle *étoile* du cône σ l'ensemble des cônes $\tau \in \Delta$ contenant σ. Soit τ un tel cône; on note $\overline{\tau}$ son image dans $N(\sigma)_\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\overline{\tau} = (\tau + (N_\sigma)_\mathbb{R})\,/\,(N_\sigma)_\mathbb{R} \subset N(\sigma)_\mathbb{R}\ .$$

L'ensemble $\{\overline{\tau} : \tau \in \Delta,\ \sigma < \tau\}$ forme un éventail de $N(\sigma)$ que l'on note $\Delta(\sigma)$. On dispose de l'inclusion canonique $\mathscr{O}(\sigma) \subset \mathbb{P}(\Delta(\sigma))$ correspondant au cône $\{0\} \in \Delta(\sigma)$.

On peut montrer (voir [Fu2], §3.1; ou [Oda], cor. 1.7) que le morphisme i_σ : $\mathscr{O}(\sigma) \hookrightarrow U_\sigma$ introduit à la proposition (2.2.14) s'étend de manière canonique en une immersion fermée $i_\sigma : \mathbb{P}(\Delta(\sigma)) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Delta)$ qui a pour image $V(\sigma)$. Dans toute la suite, on identifie $\mathbb{P}(\Delta(\sigma))$ à $V(\sigma)$ par cet isomorphisme canonique.

La définition et la proposition suivantes décrivent les morphismes naturels entre variétés toriques :

Définition 2.2.16. Soient (N, Δ) et (N', Δ') deux éventails, avec $N \simeq \mathbb{Z}^d$ et $N' \simeq \mathbb{Z}^{d'}$; un *morphisme d'éventails* $\varphi : (N', \Delta') \to (N, \Delta)$ est un morphisme de $\mathbb{Z}$-module $\varphi : N' \to N$ telle que l'application induite : $\varphi_\mathbb{R} : N'_\mathbb{R} \to N_\mathbb{R}$, définie par extension des scalaires à partir de φ, vérifie : pour tout $\sigma' \in \Delta'$, il existe $\sigma \in \Delta$ tel que $\varphi(\sigma') \subset \sigma$.

Soit $\varphi : (N', \Delta') \to (N, \Delta)$ un tel morphisme d'éventails. On construit à partir de φ un morphisme équivariant $\varphi_* : \mathbb{P}(\Delta') \to \mathbb{P}(\Delta)$ de la façon suivante : On note ${}^t\varphi : M \to M'$ la transposée de φ et ${}^t\varphi_\mathbb{R} : M_\mathbb{R} \to M'_\mathbb{R}$ l'application définie par extension des scalaires à partir de ${}^t\varphi$. Soient $\sigma' \in \Delta'$ et $\sigma \in \Delta$ tels que $\varphi_\mathbb{R}(\sigma') \subset \sigma$. De l'inclusion ${}^t\varphi_\mathbb{R}(\sigma^*) \subset (\sigma')^*$, on tire que ${}^t\varphi(\mathscr{S}_\sigma) \subset \mathscr{S}_{\sigma'}$. On dispose donc d'une application ${}^t\varphi : \mathscr{S}_\sigma \to \mathscr{S}_{\sigma'}$ qui induit un morphisme équivariant $\varphi_* : U_{\sigma'} \to U_\sigma$. En particulier, si l'on prend $\sigma' = \{0'\}$ et $\sigma = \{0\}$, on obtient le morphisme de tore :

$$\varphi_* : T' = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[M']) \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[M]) = T$$

induit par l'application ${}^t\varphi : M \to M'$. La proposition suivante affirme qu'on peut recoller ces constructions locales pour obtenir un morphisme global équivariant φ_* et donne une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que φ_* soit propre :

Proposition 2.2.17. *Soit un morphisme d'éventails $\varphi : (N', \Delta') \to (N, \Delta)$. Le morphisme de tore algébrique :*

$$\varphi_* : T' = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[M']) \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[M]) = T,$$

induit par l'application duale ${}^t\varphi : M \to M'$, se prolonge en un morphisme :

$$\varphi_* : \mathbb{P}(\Delta') \longrightarrow \mathbb{P}(\Delta).$$

Le morphisme φ_* est équivariant sous l'action de T' et T. De plus, φ_* est propre si et seulement si :

$$\varphi_{\mathbb{R}}^{-1}(|\Delta|) = |\Delta'|.$$

Démonstration. On peut consulter ([Oda], prop. 1.13 et 1.15) et aussi ([Fu2], §1.4 et 2.4).

Exemple 2.2.18. Soit p un entier supérieur ou égal à un et prenons $N' = N$ et $\Delta' = \Delta$, et soit :

$$\begin{aligned} [p] : N &\longrightarrow N \\ n &\longmapsto p\,n. \end{aligned}$$

On note encore $[p]$ l'endomorphisme de $\mathbb{P}(\Delta)$ induit par $[p]$. D'après la proposition précédente, le morphisme $[p]$ est propre. Sa restriction à chacun des tores $\mathscr{O}(\sigma)$ est le morphisme *puissance p-ième* :

$$\begin{aligned} [p] : \mathscr{O}(\sigma) &\longrightarrow \mathscr{O}(\sigma) \\ x &\longmapsto x^p. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout corps k, le morphisme $[p]_k : \mathbb{P}(\Delta)_k \to \mathbb{P}(\Delta)_k$ obtenu par extension des scalaires est fini de degré p^d.

Définition 2.2.19. Soient Δ et Δ' deux éventails de N. On dit que Δ' est *plus fin* que Δ ou encore que Δ' est un *raffinement* de Δ si pour tout $\sigma' \in \Delta'$ il existe $\sigma \in \Delta$ tel que $\sigma' \subset \sigma$, et si de plus $|\Delta'| = |\Delta|$. L'inclusion induit un morphisme équivariant propre canonique $i_* : \mathbb{P}(\Delta') \to \mathbb{P}(\Delta)$.

2.3. **Diviseurs invariants sur $\mathbb{P}(\Delta)$.**

On considère Δ un éventail complet, de sorte que la variété torique associée $\mathbb{P}(\Delta)$ est propre. On note $\tau_1, \ldots, \tau_r$ les éléments de $\Delta(1)$, c'est-à-dire les demi-droites de Δ et $u_1, \ldots, u_r$ leur générateur dans N, c'est-à-dire les éléments de N tels que $\tau_i \cap N = \mathbb{N}u_i$. A tout τ_i on a associé précédemment $V(\tau_i) = \overline{\mathscr{O}(\tau_i)}$ un schéma irréductible de codimension 1 invariant sous l'action de T.

Définition 2.3.1. On appelle *diviseur invariant élémentaire* ou plus simplement *diviseur élémentaire* et on note D_i le cycle donné par $V(\tau_i)$.

Proposition 2.3.2. *Tout diviseur de Weil D sur $\mathbb{P}(\Delta)$ horizontal invariant par T (i.e. dont la restriction à la fibre générique est laissée invariante par $T_{\mathbb{Q}}$) est de la forme :*

$$D = \sum_{i=1}^{r} a_i D_i \qquad (a_i \in \mathbb{Z}).$$

Démonstration. Cela découle directement de la décomposition donnée dans la proposition (2.2.14).

Proposition 2.3.3. *Soit $m \in M$ et χ^m le caractère associé; l'ordre de χ^m en D_i est donné par :*

$$\mathrm{ord}_{D_i}(\chi^m) = < m, u_i > .$$

Démonstration. Voir par exemple ([Fu2], lemme p. 61).

Définition 2.3.4. On dit qu'une fonction $\psi : N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ est linéaire par morceaux sur Δ (ou plus simplement linéaire par morceaux) si la restriction de ψ à chacun des cônes de Δ est définie par une forme linéaire $m_{\psi,\sigma} \in M$.

Proposition 2.3.5. *Un diviseur de Weil horizontal T-invariant $D = \sum_{i=1}^{r} a_i D_i$ sur $\mathbb{P}(\Delta)$ provient d'un diviseur de Cartier si et seulement si il existe une fonction $\psi : N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ continue et linéaire par morceaux sur Δ telle que $\psi(u_i) = -a_i$ pour $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Si elle existe, une telle fonction ψ est unique.*

Démonstration. Voir ([Oda], prop. 2.1) et ([Fu2], p. 66).

Définition 2.3.6. Soit D un diviseur de Cartier sur $\mathbb{P}(\Delta)$ horizontal et T-invariant, on appelle *fonction support associée à D* et on notera ψ_D la fonction définie par la proposition ci-dessus. On notera $m_{D,\sigma}$ la forme linéaire définissant ψ_D sur $\sigma \in \Delta$.

Remarque 2.3.7. Lorsque $\mathbb{P}(\Delta)$ est lisse, tout diviseur de Weil est un diviseur de Cartier. On remarquera que sous cette hypothèse, l'existence d'une fonction support découle du critère de lissité (2.2.11).

Proposition 2.3.8. *Si $\varphi : (N', \Delta') \to (N, \Delta)$ est un morphisme d'éventails et D un diviseur de Cartier T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$ de fonction support ψ_D, alors le diviseur de Cartier T-invariant $(\varphi_*)^*(D)$ sur $\mathbb{P}(\Delta')$ admet $\psi_d \circ \varphi$ comme fonction support.*

Démonstration. Soient $\sigma' \in \Delta'$ et $\sigma \in \Delta$ tels que $\varphi(\sigma') \subset \sigma$. On pose $D' = (\varphi_*)^*(D)$ et on note $m_{D,\sigma}$ (resp. $m_{D',\sigma'}$) la forme linéaire définissant ψ_D sur σ (resp. $\psi_D \circ \varphi$ sur σ'). D'après la proposition (2.3.3) le diviseur D est de la forme $\mathrm{div}(\chi^{m_{D,\sigma}})$ sur U_σ, et donc D' est de la forme $\mathrm{div}(\chi^{m_{D,\sigma}} \circ \varphi_*)$ sur $U_{\sigma'}$. Il suffit alors de remarquer que :

$$\chi^{m_{D,\sigma}} \circ \varphi_* = \chi^{{}^t\varphi(m_{D,\sigma})} = \chi^{m_{D',\sigma'}},$$

et d'appliquer une nouvelle fois la proposition (2.3.3) pour conclure.

Le lemme suivant est une simple conséquence de la proposition (2.3.3).

Lemme 2.3.9. *Soit $D = \sum_{i=1}^{r} a_i D_i$ un diviseur de Cartier horizontal T-invariant et $\mathcal{O}(D)$ le faisceau inversible associé à D. Pour tout $\sigma \in \Delta$, on pose :*

$$P_D(\sigma) = \{v \in M_{\mathbb{R}} : \quad < v, u > \geqslant \psi_D(u), \quad \forall u \in \sigma\} = \sigma^* + m_{D,\sigma}.$$

Le $\mathbb{Z}$-module des sections de $\mathcal{O}(D)$ sur U_σ est donné par :

$$\Gamma(U_\sigma, \mathcal{O}(D)) = \bigoplus_{m \in P_D(\sigma) \cap M} \mathbb{Z}\chi^m.$$

La proposition suivante, qui décrit les sections globales d'un diviseur de Cartier T-invariant, découle directement du lemme précédent :

Proposition 2.3.10. *Soit $D = \sum_{i=1}^{r} a_i D_i$ un diviseur de Cartier horizontal T-invariant et $\mathcal{O}(D)$ le faisceau inversible associé à D. On note K_D le polytope convexe de $M_{\mathbb{R}}$ défini par les inéquations suivantes :*

$$\begin{aligned} K_D =& \{v \in M_{\mathbb{R}}, \quad < v, u_i > \geqslant -a_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant r\} \\ =& \{v \in M_{\mathbb{R}}, \quad < v, u > \geqslant \psi_D(u), \quad \forall u \in N_{\mathbb{R}}\}. \end{aligned}$$

Le $\mathbb{Z}$-module des sections globales de $\mathcal{O}(D)$ est donné par :

$$\Gamma\left(\mathbb{P}(\Delta), \mathcal{O}(D)\right) = \bigoplus_{m \in K_D \cap M} \mathbb{Z}\chi^m.$$

Pour plus de détails, on peut consulter ([Oda], lemme 2.3 et [Fu2], p. 66), les arguments donnés s'étendant immédiatement à la situation sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Définition 2.3.11. Une fonction $\psi : N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ est dite *concave* si :

$$\psi(tx + (1-t)y) \geqslant t\psi(x) + (1-t)\psi(y), \qquad \forall t \in [0,1]$$

pour tout x, $y \in N_{\mathbb{R}}$.

Définition 2.3.12. (Minkowski). Soit K un compact convexe non vide de $M_{\mathbb{R}}$. On appelle *fonction d'appui associée à K* et on note ψ_K la fonction $\psi_K : N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\psi_K(u) = \inf\{< v, u >, \quad v \in K\}$$

pour tout $u \in N_{\mathbb{R}}$.

On a alors le résultat suivant (voir par exemple [Oda], th. A. 18) :

Théorème 2.3.13. *Soit $\mathcal{C}(M_{\mathbb{R}})$ l'ensemble des compacts convexes non vides de $M_{|R}$ et notons $\mathcal{S}(N_{\mathbb{R}})$ l'ensemble des fonctions $\psi : N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ positivement homogènes (i.e. telles que $\psi(cu) = c\psi(u)$ pour tout $c \in \mathbb{R}^+$ et $u \in N_{\mathbb{R}}$) et concaves.*

Pour tout $\psi \in \mathcal{S}(N_{\mathbb{R}})$, *on définit* K_ψ *le compact connexe associé à* ψ *par les inégalités suivantes :*

$$K_\psi = \{v \in M_{\mathbb{R}} : \quad < v, u > \geqslant \psi(u), \quad \forall u \in N_{\mathbb{R}}\}.$$

On a alors :

- *Les applications* $\mathcal{C}(M_{\mathbb{R}}) \to \mathcal{S}(N_{\mathbb{R}})$ *et* $\mathcal{S}(N_{\mathbb{R}}) \to \mathcal{C}(M_{\mathbb{R}})$ *qui envoient respectivement* K *sur* ψ_K *et* ψ *sur* K_ψ *sont réciproques l'une de l'autre.*
- *Par la correspondance biunivoque décrite ci-dessus, la somme de Minkowski* $K + K'$ *de deux compacts convexes* $K, K' \in \mathcal{C}(M_{\mathbb{R}})$ *(resp. le dilaté* cK, $c \in \mathbb{R}^+$*) est associée à la somme* $\psi_K + \psi_{K'}$ *(resp. à* $c\psi_K$*).*

On peut alors énoncer :

Théorème 2.3.14. *Soit* D *un diviseur de Cartier horizontal* T*-invariant sur* $\mathbb{P}(\Delta)$. *Le faisceau inversible* $\mathcal{O}(D)$ *est engendré par ses sections globales si et seulement si* ψ_D *la fonction support de* D *est concave. De plus, si pour tout cône* $\sigma \in \Delta$ *on note* $m_{D,\sigma}$ *l'élément de* M *définissant la restriction de* ψ_D *à* σ, *le polytope convexe* K_D *associé à* D *est alors l'enveloppe convexe des* $m_{D,\sigma}$ *dans* $M_{\mathbb{R}}$ *pour* σ *parcourant* $\Delta_{\max}$. *En particulier,* K_D *est à sommets entiers. Enfin* K_D *et* ψ_D *sont images l'un de l'autre par la correspondance définie à la proposition* (*2.3.13*).

Démonstration. Voir ([Oda], th 2.7) ou ([Fu2], p. 68).

Proposition 2.3.15. *Soient* D *et* D' *deux diviseurs horizontaux* T*-invariants et engendrés par leurs sections globales. Soit* $D'' = D + D'$, *on a :*

$$\psi_{D''} = \psi_D + \psi_{D'}$$
$$K_{D''} = K_D + K_{D'}.$$

Démonstration. C'est une conséquence des énoncés précédents. On peut consulter ([Fu2], p. 69) pour plus de détails.

Remarque 2.3.16. On remarquera que l'on a pas nécessairement :

$$K_{D''} \cap M = (K_D \cap M) + (K_{D'} \cap M)\,.$$

Définition 2.3.17. Soit ψ une fonction concave linéaire par morceaux sur un éventail Δ complet. On dit que ψ est *strictement concave relativement à* Δ (ou plus simplement *strictement concave* lorsque aucune confusion n'est à craindre) si et seulement si Δ est l'éventail complet le plus grossier dans N tel que $\psi_{|\sigma}$ soit linéaire pour tout $\sigma \in \Delta$.

Théorème 2.3.18. *Soit* D *un diviseur de Cartier horizontal* T*-invariant sur* $\mathbb{P}(\Delta)$ *et* ψ_D *la fonction support associée. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le diviseur* D *est ample.*

2. *La fonction support ψ_D est strictement concave relativement à Δ.*
3. *Le polytope K_D est de dimension d, et si pour tout $\sigma \in \Delta$, on note $m_{D,\sigma}$ l'élément de M donnant la restriction de ψ_D à σ, alors les sommets de K_D sont donné par $\{m_{D,\sigma}, \sigma \in \Delta_{\max}\}$. De plus $m_{D,\sigma} \neq m_{D,\tau}$ pour σ, $\tau \in \Delta_{\max}$ dès que $\sigma \neq \tau$.*

Démonstration. Comme $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ est un schéma affine, le diviseur D est ample sur $\mathbb{P}(\Delta)$ si et seulement s'il est ample relativement à $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ d'après ([EGA2], cor. 4.6.6).

Par ailleurs, d'après ([EGA2], cor. 4.6.4) et le critère d'amplitude donné dans ([EGA3], th. 4.7.1), l'amplitude de D sur $\mathbb{P}(\Delta)$ relativement à $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ est équivalente à l'amplitude de D sur $\mathbb{P}(\Delta)_{\mathbb{F}_p}$ pour tout nombre premier p.

Enfin pour tout corps k, ([Oda], cor. 2.14) ou ([Fu2], p. 70) modifiés de façon évidente montrent que les trois assertions du théorème sont équivalentes sur $\mathbb{P}(\Delta)_k$.

On remarque en particulier que sur une variété torique propre, tout diviseur de Cartier horizontal T-invariant ample est engendré par ses sections globales.

Concernant les fibrés très amples, on a :

Théorème 2.3.19. *Soit D un diviseur de Cartier horizontal T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$ et ψ_D sa fonction support associée. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le diviseur D est très ample (relativement à $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$).*
2. *La fonction ψ_D est strictement concave relativement à Δ. De plus, pour tout $\sigma \in \Delta_{\max}$, l'ensemble $(M \cap K_D) - m_{D,\sigma}$ engendre le semi-groupe $M \cap \sigma^* = \mathscr{S}_\sigma$.*
3. *Le polytope K_D est de dimension d, l'ensemble de ses sommets est donné par $\{m_{D,\sigma}, \sigma \in \Delta_{\max}\}$. De plus, $(M \cap K_D) - m_{D,\sigma}$ engendre le semi-groupe $M \cap \sigma^* = \mathscr{S}_\sigma$ pour tout $\sigma \in \Delta_{\max}$.*

Démonstration. Il suffit de modifier de façon évidente la preuve de ([Oda], th 2.13).

On a enfin le théorème suivant :

Théorème 2.3.20. (Demazure). *Soit $\mathbb{P}(\Delta)$ une variété torique propre et lisse de dimension relative d. Soit D un diviseur horizontal T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$ et ψ_D sa fonction support associée. Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le diviseur D est ample.*
2. *Le diviseur D est très ample.*
3. *La fonction ψ_D est strictement concave relativement à Δ.*
4. *Le polytope K_D est de dimension d, et si pour tout $\sigma \in \Delta$, on note $m_{D,\sigma}$ l'élément de M donnant la restriction de ψ_D à σ, alors les sommets de K_D sont donnés par $\{m_{D,\sigma}, \sigma \in \Delta_{\max}\}$. De plus $m_{D,\sigma} \neq m_{D,\tau}$ pour σ, $\tau \in \Delta_{\max}$ dès que $\sigma \neq \tau$.*

Lorsque ces conditions sont satisfaites, le polytope K_D est absolument simple *dans le sens où chaque sommet $m_{D,\sigma}$ rencontre exactement d arêtes et où, si $m_{1,\sigma}, \dots, m_{d,\sigma}$ sont les points de M les plus proches de $m_{D,\sigma}$ sur chacune de ces différentes arêtes, alors $\{m_{1,\sigma} - m_{D,\sigma}, \dots, m_{d,\sigma} - m_{D,\sigma}\}$ est une base de M.*

Démonstration. Voir ([Dema], §4, th. 2 et cor. 1) et aussi ([Oda], cor. 2.15).

2.4. **Variété torique et fibré en droites associé à un polytope.**

Dans ce paragraphe, on suit [Lau]; on peut également consulter ([Oda], th. 2.22, et [Fu2], §5.5).

On a vu comment associer à tout diviseur de Cartier horizontal T-invariant D sur une variété torique propre $\mathbb{P}(\Delta)$ un polytope convexe $K_D \subset M_{\mathbb{R}}$. Inversement le problème suivant se pose : étant donné un polytope convexe à sommets entiers $K \subset M_{\mathbb{R}}$, peut-on construire une variété torique propre $\mathbb{P}(\Delta_K)$ et un diviseur horizontal T-invariant E sur $\mathbb{P}(\Delta_K)$ tels que le polytope K_E soit égal à K ? La réponse est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.4.1. *Soit $K \subset M_{\mathbb{R}}$ un polytope convexe d'intérieur non vide dont les sommets sont dans M. Il existe un unique éventail complet Δ dans $N_{\mathbb{R}}$ et un unique diviseur de Cartier E horizontal T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$ tels que :*

1. *$K_E = K$.*
2. *Le diviseur E est ample.*

L'éventail Δ est le plus petit éventail complet tel que la fonction d'appui ψ_K est linéaire par morceau relativement à Δ. De plus, $\mathbb{P}(\Delta)$ est lisse si et seulement si le polytope K est absolument simple; dans ce cas, le diviseur E est très ample.

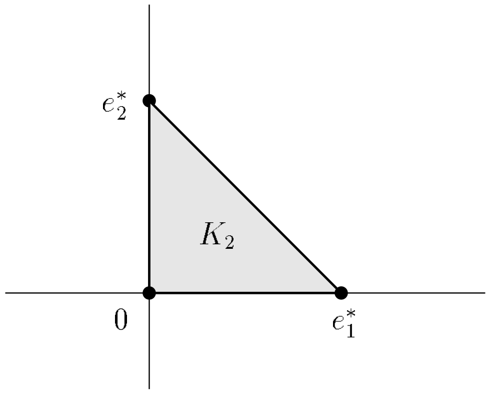
Démonstration. On suit ici ([Oda], th. 2.22) et ([Lau], §3, th. 1). On définit l'éventail Δ comme dans le dernier alinéa de l'énoncé. La fonction d'appui ψ_K est continue et concave. Soient $u_1, \dots, u_r$ les générateurs dans N des demi-droites $\tau_1, \dots, \tau_r$ de $\Delta(1)$; le diviseur :

$$E = -\sum_{i=1}^{r} \psi_K(u_i) V(\tau_i)$$

est un diviseur de Cartier horizontal T-invariant engendré par ses sections globales d'après (2.3.14). De plus, par construction, ψ_K est strictement concave relativement à Δ, donc E est ample et Δ est l'unique éventail à satisfaire cette condition. On a $K_E = K_{\psi_K} = K$. Enfin, $\mathbb{P}(\Delta)$ est lisse si et seulement si K est absolument simple d'après (2.2.11) et (2.3.20).

Exemple 2.4.2. Lorsque $d = 2$, considérons $K_2 \subset M_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ le polytope convexe absolument simple défini par les inéquations :

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 \leqslant 1.$$



L'éventail complet de $N_{\mathbb{R}}$ associé à K_2 est l'éventail Δ_2 déjà considéré à l'exemple (2.2.13) dont la variété torique associée est le plan projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$. La fonction ψ_{K_2} est définie sur σ_1, σ_2 et σ_3 par respectivement $m_1 = (0,0)$, $m_2 = (1,0)$ et $m_3 = (0,1)$. En particulier $\psi_{K_2}(e_1) = \psi_{K_2}(e_2) = 0$ et $\psi_{K_2}(e_0) = -1$. On en déduit que le diviseur E sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$ associé à K_2 par le théorème (2.4.1) est un hyperplan coordonné. On a notamment $\mathcal{O}(E) \simeq \mathcal{O}(1)$.

Plus généralement, considérons $K_d \subset M_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^d$ le simplexe standard défini par les inéquations :

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_d \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x_1 + \cdots + x_d \leqslant 1.$$

C'est un polytope convexe absolument simple. La variété torique associée $\mathbb{P}(K_d)$ s'identifie avec l'espace projectif $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Z}}$. Le diviseur E sur $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Z}}$ associé à K_d par le théorème (2.4.1) est un hyperplan coordonné. On a donc $\mathcal{O}(E) \simeq \mathcal{O}(1)$ (cf. [Oda], §2.4 et aussi [Fu2], §1.4 et 1.5).

Si l'on considère plusieurs polytopes convexes, on a le résultat suivant :

Théorème 2.4.3. *Soient $K_1, \ldots, K_m$ des polytopes convexes de $M_{\mathbb{R}}$ à sommets dans M. Posons $K = K_1 + \cdots + K_m$. On suppose que l'intérieur de K est non vide. Soient Δ l'éventail de $N_{\mathbb{R}}$ et E le diviseur de Cartier horizontal T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$ associés à K. Il existe des diviseurs de Cartier horizontaux T-invariants E_j pour $(1 \leqslant j \leqslant m)$ tels que $K_{E_j} = K_j$ et les faisceaux inversibles $\mathcal{O}(E_j)$ soient engendrés par leurs sections globales. On a de plus $E = E_1 + \cdots + E_m$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que les fonctions ψ_{K_j} sont linéaires par morceaux sur Δ. On pose alors :

$$E_j = -\sum_{i=1}^{r} \psi_{K_j}(u_i) V(\tau_i) \qquad (1 \leqslant j \leqslant m).$$

Comme les fonctions ψ_{K_j} sont concaves, E_j est un diviseur de Cartier horizontal T-invariant et engendré par ses sections globales; de plus, $K_{\psi_{K_j}} = K_j$. Enfin, on a $\psi_K = \psi_{K_1} + \cdots + \psi_{K_m}$, et donc $E = E_1 + \cdots + E_m$ d'après (2.3.15).

Remarque 2.4.4. Reprenons les hypothèses et les notations du théorème (2.4.3). D'après la résolution torique des singularités (cf. [KKMS], th. 11, p. 94; voir aussi [Br], th. 11, p. 273) il existe un raffinement Δ' de Δ tel que $\mathbb{P}(\Delta')$ est projective et lisse. Si l'on note $i_* : \mathbb{P}(\Delta') \to \mathbb{P}(\Delta)$ le morphisme propre équivariant induit par l'inclusion $i : \Delta' \hookrightarrow \Delta$ comme à la définition (2.2.19) alors les diviseurs $E' = (i_*)^*(E)$, $E'_1 = (i_*)^*(E_1), \ldots, E'_m = (i_*)^*(E_m)$ sont tels que $K_{E'} = K$, $K_{E'_1} = K_1, \ldots, K_{E'_m} = K_m$ d'après (2.3.8), et les faisceaux inversibles $\mathcal{O}(E')$, $\mathcal{O}(E'_1), \ldots, \mathcal{O}(E'_m)$ sont engendrés par leurs sections globales (mais E' n'est pas nécessairement ample). De plus $E' = E'_1 + \cdots + E'_m$.

2.5. Groupe de Picard et anneau de Chow d'une variété torique projective lisse.

2.5.1. *Préliminaires.*

On démontre une légère généralisation d'un théorème dû à Gillet et Soulé ([GS2], prop. 3.1.4).

Théorème 2.5.1. *Soit X un schéma quasi-projectif sur* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ *admettant une décomposition cellulaire, c'est-à-dire tel qu'il existe une suite :*

$$X = X_n \supset X_{n-1} \supset \cdots \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset$$

de sous-schéma fermés tels que $(X_i - X_{i-1})$ soit réunion finie disjointe d'ouverts affines $U_{i,j}$ isomorphes à $\mathbb{A}^i_{\mathbb{Z}}$.

1. *Pour tout l entier positif, on a des isomorphismes de groupes :*
$$CH^l(X) \overset{b}{\simeq} CH^l(X_{\mathbb{Q}}) \overset{b'}{\simeq} CH^l(X_{\mathbb{C}}) \overset{cl}{\simeq} H_{2n-2l}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}),$$
où les isomorphismes b et b' sont déduits des morphismes de changement de base $X_{\mathbb{Q}} \to X$ et $X_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{Q}}$ et où cl est l'application cycle. De plus, $CH^l(X)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini, et $H_{\mathrm{impair}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$.
2. *Pour tout couple (r, s) d'entiers positifs tels que $r > s$, on a $CH^{r,s}(X) = 0$, les groupes $CH^{r,s}(X)$ étant ceux définis dans (*[Gi],§*8).*

Démonstration. On commence par démontrer l'assertion 2. Du fait de l'invariance des groupes $CH^{r,s}$ par homotopie (cf. [Gi], th. 8.3), on a pour tout $r > s \geqslant 0$:

$$CH^{r,s}(\mathbb{A}^i_{\mathbb{Z}}) = CH^{r,s}(\mathbb{A}^0_{\mathbb{Z}}) = 0,$$

et donc pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$CH^{r,s}(X_i - X_{i-1}) = \bigoplus_j CH^{r,s}(U_{i,j}) = 0. \tag{2.1}$$

Par ailleurs, d'après la longue suite exacte d'excision ([Gi], th. 8.1), on a :

$$\cdots \longrightarrow CH^{r+1,s}(X_{i+1} - X_i) \xrightarrow{\partial} CH^{r,s}(X_i) \longrightarrow$$
$$CH^{r,s}(X_{i+1}) \longrightarrow CH^{r,s}(X_{i+1} - X_i) \xrightarrow{\partial} CH^{r-1,s}(X_i) \longrightarrow \cdots$$

On tire de (2.1) que pour tout $r > s \geqslant 0$,

$$CH^{r,s}(X_{i+1}) \simeq CH^{r,s}(X_i).$$

Par récurrence, on est donc ramené à montrer le résultat pour X_0, ce qui est immédiat car X_0 est réunion finie disjointe de $\mathbb{A}^0_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.

On montre maintenant que b est un isomorphisme. Pour cela, on suit ([GS2], prop. 3.1.4) et on effectue une récurrence sur la dimension. On remarque que le même raisonnement que précédemment appliqué à $X_{\mathbb{Q}}$ et à sa décomposition cellulaire montre que $CH^{l+1,l}((X_n - X_{n-1})_{\mathbb{Q}}) = 0$ pour tout entier positif l. On a le diagramme commutatif suivant, formé de deux suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
& CH(X_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & CH(X_n) \arrow[r] \arrow[d] & CH(X_n - X_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
(*) \quad 0 \arrow[r] & CH((X_{n-1})_{\mathbb{Q}}) \arrow[r] & CH((X_n)_{\mathbb{Q}}) \arrow[r] & CH((X_n - X_{n-1})_{\mathbb{Q}}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par le morphisme $X_{\mathbb{Q}} \to X$ et ses restrictions et où la ligne $(*)$ est une suite exacte du fait de la longue suite exacte d'excision ([Gi], th. 8.1) et de la nullité du groupe $CH^{l+1,l}((X_n - X_{n-1})_{\mathbb{Q}})$. Puisque X_{n-1} est encore un schéma sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ admettant une décomposition cellulaire, la flèche $CH(X_{n-1}) \to CH((X_{n-1})_{\mathbb{Q}})$ est un isomorphisme par hypothèse de récurrence. Comme les groupes CH sont invariants par homotopie ([Gi], th. 8.1), la flèche $CH(X_n - X_{n-1}) \to CH((X_n - X_{n-1})_{\mathbb{Q}})$ est également un isomorphisme, et donc $CH(X_n) \to CH((X_n)_{\mathbb{Q}})$ est un isomorphisme. De la suite exacte $(*)$, on tire immédiatement que $CH(X_{\mathbb{Q}})$, et donc $CH(X)$, est un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini. Enfin b' et cl sont des isomorphismes d'après ([Fu1], §1.9.1 et §19.1.11), ce résultat pouvant par ailleurs se montrer par le même argument que précédemment.

Le résultat suivant (voir [Eh], p. 144, ou encore [Fu2], §5.2, la démonstration sur $\mathbb{C}$ s'étendant immédiatement à la situation sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$) nous permet d'appliquer ce qui précède aux variétés toriques projectives lisses :

Théorème 2.5.2. *Toute variété torique projective lisse $\mathbb{P}(\Delta)$ sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ admet une décomposition cellulaire.*

On déduit immédiatement des deux théorèmes précédents le corollaire suivant :

Corollaire 2.5.3. *Soit $\mathbb{P}(\Delta)$ une variété torique projective lisse.*

1. *Pour tout entier l positif, $CH^l(\mathbb{P}(\Delta))$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini et on a les isomorphismes de groupes suivants :*

$$CH^l(\mathbb{P}(\Delta)) \overset{b}{\simeq} CH^l(\mathbb{P}(\Delta)_{\mathbb{Q}}) \overset{b'}{\simeq} CH^l(\mathbb{P}(\Delta)_{\mathbb{C}}) \overset{cl}{\simeq} H^{2l}(\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}), \mathbb{Z}),$$

où b et b' sont donnés par changement de base de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{C}$, et où cl est l'application cycle.

2. *Pour tout r entier strictement positif, on a :*

$$CH^{r,r-1}(\mathbb{P}(\Delta)) = 0.$$

Remarque 2.5.4. Tous les isomorphismes de groupes introduits au corollaire (2.5.3) sont compatibles avec l'intersection; ce sont donc des isomorphismes pour les anneaux gradués associés aux groupes considérés.

2.5.2. *Groupe de Picard.*

La proposition suivante caractérise les diviseurs de Cartier horizontaux T-invariants principaux sur une variété torique complète :

Proposition 2.5.5. *Soit $\mathbb{P}(\Delta)$ une variété torique complète et soit D un diviseur de Cartier horizontal T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$. Le diviseur D est principal si et seulement si ψ_D est linéaire sur tout $N_{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. En reprenant les notations de (2.3.2), on écrit D sous la forme $D = \sum_{i=1}^r a_i D_i$. Si D est principal sur $\mathbb{P}(\Delta)$, alors $D_{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^r a_i (D_i)_{\mathbb{C}}$ est principal sur $\mathbb{P}(\Delta)_{\mathbb{C}}$ et d'après ([Oda], prop. 2.4) il existe donc $m \in M$ tel que $m(u_i) = -a_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$. On en déduit que $D = \mathrm{div}(\chi^m)$. La réciproque est immédiate.

Proposition 2.5.6. *Soit $\mathbb{P}(\Delta)$ une variété torique lisse projective. On note $\tau_1, \dots, \tau_r$ les éléments de $\Delta(1)$ et $u_1, \dots, u_r$ leur générateur dans N. On a la suite exacte :*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota} \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z} V(\tau_i) \xrightarrow{s} \mathrm{Pic}(\mathbb{P}(\Delta)) \longrightarrow 0,$$

la flèche ι étant donnée par $\iota : m \to \sum_{i=1}^r < m, u_i > V(\tau_i)$ et la flèche s désignant la surjection canonique sur $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(\Delta))$ vu comme groupe quotient par l'équivalence linéaire. Donc $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(\Delta))$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $(\#\Delta(1) - d)$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de ([Oda], cor. 2.5) et et de l'isomorphisme $b : CH^1(\mathbb{P}(\Delta)) \simeq CH^1(\mathbb{P}(\Delta)_{\mathbb{Q}})$ donné par le corollaire (2.5.3). On peut également consulter ([Fu2], §3.4).

2.5.3. *Anneau de Chow.*

On décrit maintenant un théorème de Jurkiewicz et Danilov ([Da], th. 10.8 et rem. 10.9) donnant la structure de l'anneau de Chow (et donc de l'anneau d'homologie) d'une variété torique projective lisse :

Théorème 2.5.7. *Soient $\mathbb{P}(\Delta)$ une variété torique projective lisse, $\tau_1, \dots, \tau_r$ les éléments de $\Delta(1)$ et $u_1, \dots, u_r$ leurs générateurs respectifs dans N. Considérons l'anneau de polynômes en r indéterminées :*

$$\mathcal{S} = \mathbb{Z}\left[t_{\tau_i}\right]_{1 \leqslant i \leqslant r}.$$

Soient $\mathcal{I}$ l'idéal de $\mathcal{S}$ engendré par l'ensemble :

$$\{t_{\rho_1} t_{\rho_2} \dots t_{\rho_s} : \quad \rho_1, \dots, \rho_s \in \Delta(1) \text{ deux à deux distincts et } \rho_1 + \dots + \rho_s \notin \Delta\}$$

et $\mathcal{J}$ l'idéal de $\mathcal{S}$ engendré par :

$$\left\{ \sum_{i=1}^{r} < m, u_i > t_{\tau_i}, \quad m \in M \right\}.$$

Soit $[\ ] : \mathcal{S} \to CH^*(\mathbb{P}(\Delta))$ *le morphisme d'anneau défini par :*

$$[t_\tau] := [V(\tau)] \in CH^*(\mathbb{P}(\Delta)),$$

pour tout $\tau \in \Delta(1)$*. On a* $\mathrm{Ker}[\ ] = (\mathcal{I} + \mathcal{J})$ *et le morphisme :*

$$\mathcal{S}/(\mathcal{I} + \mathcal{J}) \xrightarrow{[\ ]} CH^*(\mathbb{P}(\Delta)),$$

est un isomorphisme d'anneaux gradués.

Démonstration. C'est une conséquence de ([Da], th. 10.8) ou encore ([Oda], p. 134). On peut également consulter ([Fu2], p. 106).

3. Variétés toriques complexes

3.1. **Variété à coin associée à une variété torique.**

Dans ce paragraphe, on suit essentiellement ([Fu2], §4). On peut également consulter ([Oda], prop. 1.8).

Soit Δ un éventail de N. Pour tout cône σ de Δ on note :

$$(U_\sigma)_\geqslant = \mathrm{Hom}_{\mathrm{sg}}(\sigma^* \cap M, \mathbb{R}^+)$$

l'ensemble des morphismes de semi-groupe avec élément neutre de $\sigma^* \cap M$ vers $(\mathbb{R}^+, \times)$. Du fait de l'inclusion $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{C}$, l'ensemble $(U_\sigma)_\geqslant$ peut être vu comme sous-ensemble fermé de $U_\sigma(\mathbb{C})$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}(U_\sigma)_\geqslant &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{sg}}(\sigma^* \cap M, \mathbb{R}^+) \\ &\subset \mathrm{Hom}_{\mathrm{sg}}(\sigma^* \cap M, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-algèbre}}(\mathbb{C}[\sigma^* \cap M], \mathbb{C}) = U_\sigma(\mathbb{C}).\end{aligned}$$

L'application module $|\ | : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ induit par composition une rétraction :

$$U_\sigma(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{sg}}(\sigma^* \cap M, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{sg}}(\sigma^* \cap M, \mathbb{R}^+) = (U_\sigma)_\geqslant$$

que l'on note encore $|\ |$. Si σ et σ' sont deux éléments de Δ, alors $(U_\sigma)_\geqslant \cap (U_{\sigma'})_\geqslant = (U_{\sigma\cap\sigma'})_\geqslant$. Il existe donc une partie fermée $\mathbb{P}(\Delta)_\geqslant$ de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ telle que pour tout $\sigma \in \Delta$ on ait $\mathbb{P}(\Delta)_\geqslant \cap U_\sigma(\mathbb{C}) = (U_\sigma)_\geqslant$.

L'application $|\ |$ s'étend en une rétraction continue :

$$|\ | : \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}(\Delta)_\geqslant$$

Proposition 3.1.1. *Si Δ est régulier, $\mathbb{P}(\Delta)_\geqslant$ est une sous-variété à coins analytique réelle de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$, de dimension réelle d.*

Démonstration. C'est une conséquence directe des définitions (voir par exemple [Oda], prop. 1.8).

Exemple 3.1.2. On note $T_{\geqslant} = (U_{\{0\}})_{\geqslant} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{sg}}(M, \mathbb{R}^+)$. On vérifie que $T_{\geqslant}$ est dense dans $\mathbb{P}(\Delta)_{\geqslant}$.

Soient $T(\mathbb{C})$ le tore analytique complexe associé à T et $\mathcal{S}_N$ le *tore compact* :

$$\mathcal{S}_N = \mathrm{Hom}(M, \mathcal{S}_1) \subset \mathrm{Hom}(M, \mathbb{C}^*) = T(\mathbb{C}),$$

où $\mathcal{S}_1 \subset \mathbb{C}$ est le cercle unité. C'est le sous-groupe compact maximal de $T(\mathbb{C})$; en fait on a :

$$\mathcal{S}_N = \mathrm{Hom}(M, \mathcal{S}_1) = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{S}_1 \cong {\mathcal{S}_1}^d \subset T(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{C}^*) = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \cong (\mathbb{C}^*)^d.$$

L'action naturelle de $T(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ induit une action de $\mathcal{S}_N$ sur $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$. La décomposition polaire $\mathbb{C}^* = \mathcal{S}_1 \times \mathbb{R}^{+*}$ et l'isomorphisme $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ déterminent un isomorphisme $\mathcal{S}_N$-équivariant :

$$\log : T(\mathbb{C}) = \mathcal{S}_N \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{sg}}(M, \mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathcal{S}_N \times \mathrm{Hom}(M, \mathbb{R}) = \mathcal{S}_N \times N_{\mathbb{R}}.$$

On note $\mathrm{pr}_2 : \mathcal{S}_N \times N_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$ la seconde projection. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} T(\mathbb{C}) \arrow[r, "\log"] \arrow[d, "|\ |"'] & \mathcal{S}_N \times N_{\mathbb{R}} \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \\ T_{\geqslant} \arrow[r, "\log"] & N_{\mathbb{R}} \end{tikzcd}$$

et les flèches horizontales sont des isomorphismes de groupes de Lie réels.
On note orb la surjection canonique :

$$\mathrm{orb} : \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})/\mathcal{S}_N.$$

On remarque qu'on peut identifier :

$$T_{\geqslant} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{sg}}(M, \mathbb{R}^+) = T(\mathbb{C})/\mathcal{S}_N.$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 3.1.3. *Il existe un unique homéomorphisme $\kappa : \mathbb{P}(\Delta)_{\geqslant} \to \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})/\mathcal{S}_N$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}) \arrow[dl, "|\ |"'] \arrow[dr, "\mathrm{orb}"] & \\ \mathbb{P}(\Delta)_{\geqslant} \arrow[rr, "\kappa"] & & \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})/\mathcal{S}_N \end{tikzcd}$$

De plus, la restriction de κ à $T_{\geqslant}$ coïncide avec l'identification ci-dessus.

Démonstration. Voir ([Fu2], p. 79) et ([Oda], prop. 1.8).

3.2. Un recouvrement canonique de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$.

Définition 3.2.1. (Batyrev et Tschinkel). Pour tout $\sigma \in \Delta$, on définit $C_\sigma \subset \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ de la façon suivante :

$C_\sigma = \{x \in \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}) : \forall m \in \mathscr{S}_\sigma = \sigma^* \cap M, \quad \chi^m$ est régulier en x et $|\chi^m(x)| \leqslant 1\}$.

Proposition 3.2.2. *Pour tout $\sigma \in \Delta$, on a $C_\sigma \subset U_\sigma(\mathbb{C})$ et C_σ est compact. De plus, si $\tau, \tau' \in \Delta$, alors :*

$$C_\tau \cap C_{\tau'} = C_{\tau \cap \tau'}$$

Démonstration. Soit $x \in C_\sigma$, la fonction χ^m est définie en x pour tout $m \in \mathscr{S}_\sigma = \sigma^* \cap M$, et donc $x \in U_\sigma(\mathbb{C})$.

Soit $\{m_1, \dots, m_q\}$ une famille génératrice du semi-groupe $\mathscr{S}_\sigma$. On dispose de l'immersion fermée :

$$\begin{aligned} \varphi : \ U_\sigma(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C}^q \\ x \quad &\longmapsto (\chi^{m_1}(x), \dots, \chi^{m_q}(x)). \end{aligned}$$

On remarque que $\varphi(C_\sigma) = \varphi(U_\sigma(\mathbb{C})) \cap B(0,1)^q$. Comme $\varphi(U_\sigma(\mathbb{C}))$ est un fermé analytique, on conclut que $\varphi(C_\sigma)$, et donc C_σ, sont compacts.

Enfin la dernière assertion résulte de l'identité $\tau^* + \tau'^* = (\tau \cap \tau')^*$ (Voir [Oda], th. A.1).

Proposition 3.2.3. *Si Δ est complet, alors les compacts C_σ forment un recouvrement de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ lorsque σ parcoure $\Delta_{\max}$.*

Démonstration. On suit ici [BaT]. Puisque $T(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$, il suffit de démontrer que les C_σ, lorsque σ parcourt $\Delta_{\max}$, recouvrent $T(\mathbb{C})$. Soit $x \in T(\mathbb{C})$; puisque Δ est complet, il existe $\sigma \in \Delta_{\max}$ tel que $-\log|x| \in \sigma$. Pour tout $m \in \mathscr{S}_\sigma$, on a :

$$< m, -\log|x| >= -\log|\chi^m(x)| \geqslant 0.$$

On en conclut que $|\chi^m(x)| \leqslant 1$ pour tout $m \in \mathscr{S}_\sigma$, c'est-à-dire que $x \in C_\sigma$.

Les compacts de la forme C_σ sont globalement invariants sous l'action de $\mathcal{S}_N$. Pour mieux comprendre la structure des C_σ, on peut étudier l'image de $C_\sigma \cap T(\mathbb{C})$ dans $N_\mathbb{R}$ par l'application $\log|.|$. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 3.2.4. *Pour tout $\sigma \in \Delta$, on note $\overset{\circ}{C}_\sigma = C_\sigma \cap T(\mathbb{C})$. On a alors :*

$$-\log|\overset{\circ}{C}_\sigma| = \sigma.$$

Démonstration. Soit $x \in T(\mathbb{C})$. Pour tout $m \in M$, on a $< m, -\log|x| >= -\log|\chi^m(x)|$, et donc $x \in \overset{\circ}{C}_\sigma$ si et seulement si :

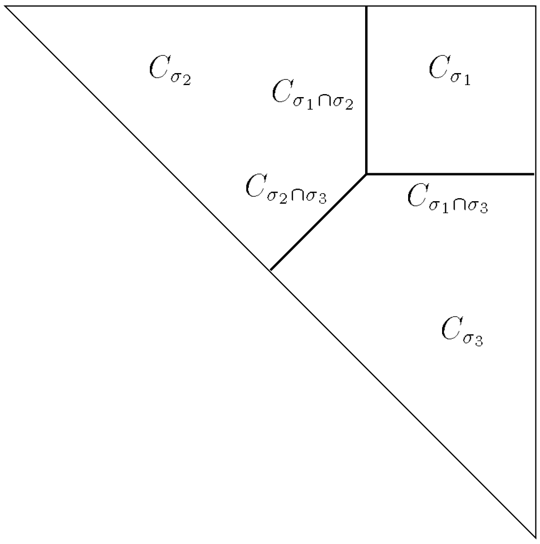
$$< m, -\log|x| > \geqslant 0, \qquad \forall m \in \mathscr{S}_\sigma,$$

ce qui est équivalent à :

$$-\log|x| \in (\sigma^*)^* = \sigma.$$

L'étude des C_σ est donc ramenée à l'étude de Δ "plongé" dans $\mathbb{P}(\Delta)_\geqslant$.

Exemple 3.2.5. On a représenté ici $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})/\mathcal{S}_N$:



Proposition 3.2.6. *Soit p un entier strictement positif. Le morphisme $[p]$: $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ envoie $\mathbb{P}(\Delta)_\geqslant$ dans lui-même. Pour tout $\sigma \in D$, le compact C_σ est laissé stable par $[p]$. Enfin le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{C}) \arrow[rr, "{[p]}"] \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "-\log|\,|"'] & & T(\mathbb{C}) \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "-\log|\,|"] & \\
& \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}) \arrow[rr, "{[p]}"] \arrow[dd, "\mathrm{orb}"] & & \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}) \arrow[dd, "\mathrm{orb}"] \\
N_\mathbb{R} \arrow[rr, "{[p]}"] \arrow[dr, "\exp"'] & & N_\mathbb{R} \arrow[dr, "\exp"'] & \\
& \mathbb{P}(\Delta)_\geqslant \arrow[rr, "{[p]}"] & & \mathbb{P}(\Delta)_\geqslant
\end{tikzcd}$$

où exp *est l'inverse du morphisme* $\log : T_\geqslant \to N_\mathbb{R}$, *et* $[p] : N_\mathbb{R} \to N_\mathbb{R}$ *désigne la multiplication par p.*

Démonstration. La première partie de la proposition est une conséquence de l'égalité $[p](x) = x^p$ pour tout $x \in T(\mathbb{C})$ (on peut également consulter [Fu2], p. 80).
Soient $\sigma \in \Delta$ et $x \in C_\sigma$, pour tout $m \in \mathscr{S}_\sigma$, on a $|\chi^m([p](x))| = |\chi^m(x)|^p \leqslant 1$, c'est-à-dire $[p](x) \in C_\sigma$; et donc C_σ est laissé stable par $[p]$.
Enfin la commutativité du diagramme résulte des propositions énoncées au paragraphe précédent.

Définition 3.2.7. Pour tout $\sigma \in \Delta$, on pose :

$$C_\sigma^{\mathrm{int}} = \{x \in C_\sigma \ : \quad |\chi^m(x)| < 1, \quad \forall m \in (\sigma^* - \sigma^\perp) \cap M\}.$$

La proposition suivante rassemble diverses propriétés des ensembles C_σ et C_σ^{int}
Proposition 3.2.8.

1. *Pour tout $\sigma \in \Delta$, on a $-\log |C_\sigma^{\mathrm{int}} \cap T(\mathbb{C})| = \overset{\circ}{\sigma}$, où $\overset{\circ}{\sigma}$ est l'intérieur relatif du cône σ.*
2. *Les ensembles C_τ^{int} sont deux à deux disjoints. Pour tout $\sigma \in \Delta$, on a :*

$$C_\sigma = \bigcup_{\tau < \sigma} C_\sigma^{\mathrm{int}}. \tag{3.2}$$

3. *Si l'éventail Δ est complet, alors les C_τ^{int} pour τ parcourant Δ forment une partition de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$.*

Démonstration. Démontrons tout d'abord l'assertion (1). Soit $x \in T(\mathbb{C}) \cap C_\sigma^{\mathrm{int}}$. Pour tout $m \in (\sigma^* - \sigma^\perp) \cap M$, on a $< m, -\log |x| > > 0$, ce qui équivaut à écrire que $-\log |x| \in \overset{\circ}{\sigma}$. On en déduit que $-\log |C_\sigma^{\mathrm{int}} \cap T(\mathbb{C})| = \overset{\circ}{\sigma}$.

On s'intéresse maintenant à l'assertion (2). On reprend ici les notations de la remarque (2.2.15). Soient τ et τ' deux cônes distincts de Δ. D'après l'assertion (1), on a $-\log |C_\tau^{\mathrm{int}} \cap C_{\tau'}^{\mathrm{int}} \cap T(\mathbb{C})| = \overset{\circ}{\tau} \cap \overset{\circ}{\tau}{}' = \emptyset$, ce dont on déduit que les ensembles C_τ^{int} et $C_{\tau'}^{\mathrm{int}}$ sont disjoints sur $T(\mathbb{C})$. En remarquant que pour tout $\sigma \in \Delta$, on a :

$$C_\tau^{\mathrm{int}} \cap V(\sigma)(\mathbb{C}) = C_{\overline{\tau}}^{\mathrm{int}}, \qquad \text{(resp.} \quad C_{\tau'}^{\mathrm{int}} \cap V(\sigma)(\mathbb{C}) = C_{\overline{\tau}'}^{\mathrm{int}})$$

où $\overline{\tau} \in \Delta(\sigma)$ (resp. $\overline{\tau}' \in \Delta(\sigma)$) et où $C_{\overline{\tau}}^{\mathrm{int}} \subset \mathbb{P}(\Delta)(\Delta(\sigma))(\mathbb{C}) = V(\sigma)(\mathbb{C})$ (resp. $C_{\overline{\tau}'}^{\mathrm{int}} \subset V(\sigma)(\mathbb{C})$), on obtient la relation :

$$C_\tau^{\mathrm{int}} \cap C_{\tau'}^{\mathrm{int}} \cap V(\sigma)(\mathbb{C}) = C_{\overline{\tau}}^{\mathrm{int}} \cap C_{\overline{\tau}'}^{\mathrm{int}}.$$

Pa récurrence, on déduit de cela, de la décomposition en tores disjoints donnée à la proposition (2.2.14) et de la remarque (2.2.15) que C_τ^{int} et $C_{\tau'}^{\mathrm{int}}$ sont disjoints sur $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$. La décomposition (3.2) se montre par récurrence de façon similaire en utilisant la relation $\sigma = \bigcup_{\tau < \sigma} \overset{\circ}{\tau}$ et la proposition (3.2.4).

Il reste à prouver l'assertion (3). D'après ce qui précède, il suffit de montrer que les C_τ^{int} pour $\tau \in \Delta$ forment un recouvrement de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$; or ceci se déduit directement de la décomposition (3.2) et de la proposition (3.2.3).

Dans le cas où Δ est complet et régulier, on peut préciser la structure des ensembles C_σ et C_σ^{int} :

Proposition 3.2.9. *Soient Δ un éventail complet et régulier et σ un élément de Δ.*

1. *L'ensemble C_σ^{int} est une sous-variété analytique réelle lisse de dimension réelle $d + \dim \sigma$ de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$.*
2. *le compact C_σ est une sous-variété réelle à coins de dimension réelle $d + \dim \sigma$ de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$, et son bord ∂C_σ est une variété à coins vérifiant la relation :*

$$\partial C_\sigma = C_\sigma - C_\sigma^{\mathrm{int}} = \bigcup_{\substack{\tau \leq \sigma \\ \tau \neq \sigma}} C_\sigma^{\mathrm{int}} .$$

Démonstration. On pose $q = \dim \sigma$. Soit $\tau \in \Delta_{\max}$ tel que $\sigma < \tau$. D'après la proposition (2.2.11), on peut trouver $\{m_1, \ldots, m_d\}$ une base de M telle que $\{m_1, \ldots, m_q\}$ (resp. $\{m_1, \ldots, m_d\}$) soit une famille génératrice du semi-groupe $\mathscr{S}_\sigma$ (resp. $\mathscr{S}_\tau$).

Dans la carte affine $\varphi : U_\tau(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^d$ donnée par $\varphi(x) = (\chi^{m_1}(x), \ldots, \chi^{m_d}(x))$, les ensembles C_σ et C_σ^{int} sont définis par les conditions :

$$C_\sigma = \{x \in \mathbb{C}^d : \quad |x_1| \leqslant 1, \ldots, |x_{d-q}| \leqslant 1, |x_{d-q+1}| = 1, \ldots, |x_d| = 1\}$$

et

$$C_\sigma^{\mathrm{int}} = \{x \in \mathbb{C}^d : \quad |x_1| < 1, \ldots, |x_{d-q}| < 1, |x_{d-q+1}| = 1, \ldots, |x_d| = 1\}.$$

On en déduit directement les assertions énoncées.

3.3. Métriques canoniques sur les faisceaux inversibles équivariants au-dessus de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$.

Dans toute cette section, Δ désigne un éventail complet de N. Pour tout diviseur de Cartier D horizontal et T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$, on construit de manière canonique une métrique sur le faisceau inversible $\mathcal{O}(D)(\mathbb{C})$.

Plusieurs constructions équivalentes sont indiquées.

3.3.1. *Construction de Batyrev et Tschinkel.*

On présente ici, sous une forme légèrement différente de ([BaT], §2.1), une construction due à Batyrev et Tschinkel.

Proposition-définition 3.3.1. *Soit s une section holomorphe de $\mathcal{O}(D)(\mathbb{C})$ au-dessus d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$. Pour tout $x \in \Omega$, soit $\sigma \in \Delta$ tel que $x \in C_\sigma \subset U_\sigma(\mathbb{C})$, et $m_{D,\sigma} \in M$ la restriction de ψ_D à σ. Le quotient :*

$$\|s(x)\|_{\mathrm{BT}} = \left| \frac{s}{\chi^{m_{D,\sigma}}}(x) \right| \tag{3.3}$$

est bien défini et est appelé norme de s au point x au sens de Batyrev-Tschinkel. Cette norme définit une métrique continue $\mathcal{S}_N$-invariante sur $\mathcal{O}(D)(\mathbb{C})$, que l'on note $\|.\|_{\mathrm{BT}}$.

Démonstration. L'existence du quotient est une conséquence directe du lemme (2.3.9). Enfin, le second membre de (3.3) est indépendant du choix de σ car :

$$|\chi^{m_{D,\sigma}}(x)| = |\chi^{m_{D,\sigma'}}(x)|$$

pour tout $x \in C_\sigma \cap C_{\sigma'}$ du fait de la continuité de la fonction support ψ_D sur $N_{\mathbb{R}}$, et le même argument montre que $\|.\|_{\mathrm{BT}}$ est bien continue sur $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$.

On donne dans la proposition suivante quelques propriétés de la construction de Batyrev-Tschinkel :

Proposition 3.3.2.

1. (Multiplicativité). *Soient Δ un éventail complet dans $N_{\mathbb{R}}$ et D_1, D_2 deux diviseurs de Cartier horizontaux et T-invariants sur $\mathbb{P}(\Delta)$. L'isomorphisme :*

$$\mathcal{O}(D_1) \otimes \mathcal{O}(D_2) \simeq \mathcal{O}(D_1 + D_2),$$

est compatible aux métriques de Batyrev-Tschinkel.

2. (Fonctorialité). *Soient $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_2$ un morphisme d'éventails complets et $\varphi_* : \mathbb{P}(\Delta_1) \to \mathbb{P}(\Delta_2)$ le morphisme de variétés toriques associé. Soient également D_2 un diviseur de Cartier horizontal T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta_2)$ et ψ_2 sa fonction support, et notons $D_1 = (\varphi_*)^* D_2$ le diviseur de Cartier T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta_1)$ dont la fonction support est donnée par $\psi_1 = \psi_2 \circ \varphi$. L'isomorphisme :*

$$\mathcal{O}(D_1) \simeq (\varphi_*)^* \mathcal{O}(D_2),$$

est une isométrie lorsque $\mathcal{O}(D_1)$ et $\mathcal{O}(D_2)$ sont munis de leur métrique de Batyrev-Tschinkel.

Démonstration. On démontre tout d'abord l'assertion (1). Soient s_1 et s_2 des sections holomorphes, sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$, des faisceaux $\mathcal{O}(D_1)$ et $\mathcal{O}(D_2)$ respectivement. Pour tout $x \in \Omega$, soit $\sigma \in \Delta$ tel que $x \in C_\sigma$. On a :

$$\|s_1(x)\|_{\mathrm{BT}} \cdot \|s_2(x)\|_{\mathrm{BT}} = \left| \frac{s_1 \otimes s_2(x)}{\chi^{m_{D_1,\sigma} + m_{D_2,\sigma}}(x)} \right| = \left| \frac{s_1 \otimes s_2(x)}{\chi^{m_{D_1+D_2,\sigma}}(x)} \right| = \|s_1 \otimes s_2(x)\|_{\mathrm{BT}},$$

ce qui établit l'énoncé recherché.

On s'intéresse maintenant à l'assertion (2). Soit s_2 une section holomorphe du faisceau $\mathcal{O}(D_2)$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{P}(\Delta_2)(\mathbb{C})$ et notons $s_1 = s_2 \circ \varphi_*$ la section holomorphe de $\mathcal{O}(D_1)$ au-dessus de $(\varphi_*)^{-1}(\Omega)$ obtenue par image réciproque de s_2 par $(\varphi_*)^*$.

Pour tout $x \in (\varphi_*)^{-1}(\Omega)$, soit $\sigma_1 \in \Delta_1$ tel que $x \in C_{\sigma_1}$ et choisissons $\sigma_2 \in \Delta_2$ tel que $\varphi(\sigma_1) \subset \sigma_2$. D'après la proposition (2.3.8), on sait que $\psi_{D_1} = \psi_{D_2} \circ \varphi$, et donc que $m_{D_1,\sigma} = {}^t\varphi(m_{D_2,\sigma})$.

On déduit de la proposition (3.2.4) et du fait que φ_* est T-équivariant, l'inclusion :

$$\varphi_*(T_1(\mathbb{C}) \cap C_{\sigma_1}) \subset T_2(\mathbb{C}) \cap C_{\sigma_2},$$

ce qui, comme φ_* est continue, montre que :

$$\varphi_*(C_{\sigma_1}) \subset C_{\sigma_2}.$$

On peut donc écrire :

$$\|s_1(x)\|_{\mathrm{BT}} = \left|\frac{s_1(x)}{\chi^{m_{D_1,\sigma}}(x)}\right| = \left|\frac{s_2 \circ \varphi_*(x)}{\chi^{{}^t\varphi(m_{D_2,\sigma})}(x)}\right| = \left|\frac{s_2 \circ \varphi_*(x)}{\chi^{m_{D_2,\sigma}} \circ \varphi_*(x)}\right| = \|s_2(\varphi_*(x))\|_{\mathrm{BT}},$$

ce qui termine la démonstration.

3.3.2. *Construction d'après Zhang.*

On suit dans ce paragraphe ([Zha], th. 2.2). Soient p un entier supérieur ou égal à 2 et D un diviseur de Cartier horizontal T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$. Comme $[p]$ est l'endomorphisme équivariant de $\mathbb{P}(\Delta)$ associé à l'endomorphisme de Δ défini par la multiplication par p, on a d'après (2.3.8) l'égalité des diviseurs de Cartier :

$$[p]^*D = p\,D,$$

et donc un isomorphisme de faisceaux sur $\mathbb{P}(\Delta)$:

$$\Phi_{D,p} : \mathcal{O}(D)^{\otimes p} \simeq [p]^*\mathcal{O}(D).$$

Comme $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ est compacte, on peut munir $\mathcal{O}(D)(\mathbb{C})$ d'une métrique continue que l'on notera $\|.\|_0$. On définit alors par récurrence une suite de métriques $(\|.\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathcal{O}(D)(\mathbb{C})$ de la façon suivante ($n \geqslant 1$) :

$$\|\cdot\|_n = \left(\Phi_{D,p}^*\,[p]^*\,\|\cdot\|_{n-1}\right)^{1/p}.$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.3.3.

1. *Les métriques $\|.\|_n$ convergent uniformément vers une métrique $\|.\|_{\mathrm{Zh},p}$ sur $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ (i.e $\log\frac{\|\cdot\|_n}{\|\cdot\|_0}$ converge uniformément sur $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ vers $\log\frac{\|\cdot\|_{\mathrm{Zh},p}}{\|\cdot\|_0}$).*
2. *La métrique $\|.\|_{\mathrm{Zh},p}$ est l'unique métrique continue sur $\mathcal{O}(D)(\mathbb{C})$ telle que :*

$$\|\cdot\|_{\mathrm{Zh},p} = \left(\Phi_{D,p}^*\,[p]^*\,\|\cdot\|_{\mathrm{Zh},p}\right)^{1/p}.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de ([Zha], th. 2.2).

Remarque 3.3.4. Zhang raisonne pour des variétés projectives, mais son argument ne nécessite en fait que la compacité.

Le théorème suivant nous permet d'identifier les deux métriques introduites précédemment :

Théorème 3.3.5. *Soit D un diviseur de Cartier horizontal et T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$. Pour tout entier $p \geqslant 2$, on a l'égalité des métriques :*

$$\|.\|_{\mathrm{BT}} = \|.\|_{\mathrm{Zh},p}$$

sur le faisceau inversible $\mathcal{O}(D)(\mathbb{C})$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\|.\|_{\mathrm{BT}}$ satisfait à la condition donnée au (2) du théorème (3.3.3). Cela découle des propriétés de multiplicativité et de fonctorialité énoncées à la proposition (3.3.2).

3.3.3. *Construction par image inverse.*

Dans ce paragraphe, Δ désigne un éventail possédant une fonction support strictement concave relativement à Δ. Par conséquent la variété torique $\mathbb{P}(\Delta)$ est *projective.*

Soit D un diviseur de Cartier T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$ et $\mathcal{O}(D)$ le faisceau inversible associé. On suppose dans un premier temps que $\mathcal{O}(D)$ est engendré par ses sections globales. Le choix d'un ordre sur les éléments de $K_D \cap M$ permet de définir un morphisme T-équivariant associé à D, que l'on note ϕ_D, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \phi_D : \mathbb{P}(\Delta) &\longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{k_D} \\ x &\longrightarrow (\chi^m(x))_{m \in K_D \cap M} \end{aligned}$$

où k_D est un entier positif défini par $k_D = \#(K_D \cap M) - 1$. On note $\mathcal{O}(1)$ le fibré de Serre sur $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{k_D}$ et on le munit de la métrique définie pour toute section méromorphe de $\mathcal{O}(1)(\mathbb{C})$ par :

$$\|s(x)\|_\infty = \frac{|s(x)|}{\sup_{1 \leqslant i \leqslant k_D+1} |x_i|} \; . \tag{3.4}$$

Cette métrique est la métrique de Batyrev-Tschinkel ou de Zhang pour le faisceau $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{k_D}$ considérée comme variété torique comme dans l'exemple (2.4.2). On note $\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty$ le faisceau $\mathcal{O}(1)$ muni de cette métrique. Comme $\|.\|_\infty$ est invariante si l'on permute les éléments de $K_D \cap M$, la métrique sur $\mathcal{O}(D)$ définie par :

$$\|.\|_{D,\infty} = \phi_D^* \, \|.\|_\infty$$

est indépendante du choix effectué pour définir ϕ_D. On note $\overline{\mathcal{O}(D)}_\infty$ le faisceau $\mathcal{O}(D)$ muni de la métrique $\|.\|_{D,\infty}$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.3.6. *Soient D et E deux diviseurs T-invariants sur $\mathbb{P}(\Delta)$ dont les faisceaux associés sont engendrés par leurs sections globales, on a :*

$$\overline{\mathcal{O}(D)}_\infty \otimes \overline{\mathcal{O}(E)}_\infty = \overline{\mathcal{O}(D+E)}_\infty .$$

Démonstration. On démontre tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.3.7. *Soit D un diviseur T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$. On notera $K_D(0)$ les points entiers extrémaux du polytope K_D. Pour tout $x \in \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$, on a :*

$$\sup_{m \in K_D \cap M} |\chi^m(x)| = \sup_{m \in K_D(0)} |\chi^m(x)|.$$

Démonstration. Soient $m_0, \ldots, m_q$ les éléments de $K_D(0)$ et m un élément quelconque de $K_D \cap M$. Comme K_D est convexe, on peut trouver des réels positifs $\alpha_0, \ldots, \alpha_q$ tels que :

$$\begin{cases} m = \alpha_0 m_0 + \cdots + \alpha_q m_q \\ 1 = \alpha_0 + \cdots + \alpha_q. \end{cases}$$

On en déduit l'inégalité :

$$|\chi^m(x)| \leqslant \sup_{0 \leqslant i \leqslant q} |\chi^{m_i}(x)|,$$

ce qui joint à l'inclusion $K_D(0) \subset K_D \cap M$ donne le résultat annoncé.

On passe maintenant à la démonstration de la proposition. Soit s (resp. r) une section holomorphe de $\mathcal{O}(D)(\mathbb{C})$ (resp. de $\mathcal{O}(E)(\mathbb{C})$) au-dessus d'un ouvert Ω de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$. Pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$\|s(x)\|_{D,\infty} = \frac{|s(x)|}{\sup_{m \in K_D \cap M} |\chi^m(x)|} \qquad \left(\text{resp.} \quad \|r(x)\|_{E,\infty} = \frac{|r(x)|}{\sup_{m \in K_E \cap M} |\chi^m(x)|}\right).$$

En utilisant le lemme (3.3.7) et le fait que :

$$K_{D+E}(0) = (K_D + K_E)(0) \subseteq K_D(0) + K_E(0) \subseteq K_D + K_E = K_{D+E},$$

on obtient l'égalité :

$$\sup_{m \in K_{D+E}} |\chi^m(x)| = \left(\sup_{m \in K_D} |\chi^m(x)|\right)\left(\sup_{m \in K_E} |\chi^m(x)|\right)$$

et la proposition est démontrée.

Proposition-définition 3.3.8. *Soit D un diviseur de Cartier horizontal et T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$. Il existe E et F des diviseurs de Cartier horizontaux et T-invariants sur $\mathbb{P}(\Delta)$, dont le faisceau associé est engendré par ses sections globales, et tels que :*

$$D = E - F.$$

La métrique $\|.\|_{E,\infty} . \|.\|_{F,\infty}^{-1}$ induite sur $\mathcal{O}(D) = \mathcal{O}(E) \otimes \mathcal{O}(F)^{-1}$ par les métriques canoniques $\|.\|_{E,\infty}$ et $\|.\|_{F,\infty}$ est indépendante de E et de F. On note $\|.\|_{D,\infty}$ cette métrique et on note $\overline{\mathcal{O}(D)}_\infty$ le faisceau $\mathcal{O}(D)$ muni de la métrique $\|.\|_{D,\infty}$.

Démonstration. La première partie de l'énoncé est classique (Serre) et est très facile à généraliser dans le cadre équivariant (prendre H diviseur de Cartier T-invariant tel que $\mathcal{O}(H)$ est engendré par ses sections globales et considérer $E = nH$ et $F = -D + nH$ pour n assez grand). Soient E, F, E' et F' des diviseurs de Cartier T-invariants dont les faisceaux associés sont engendrés par leurs sections globales et tels que :

$$D = E - F = E' - F'.$$

On tire $E + F' = E' + F$, et donc des isomorphismes isométriques :

$$\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty \otimes \overline{\mathcal{O}(F')}_\infty = \overline{\mathcal{O}(E) \otimes \mathcal{O}(F')}_\infty = \overline{\mathcal{O}(E') \otimes \mathcal{O}(F)}_\infty = \overline{\mathcal{O}(E')}_\infty \otimes \overline{\mathcal{O}(F)}_\infty,$$

on conclut que :

$$\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty \otimes (\overline{\mathcal{O}(F)}_\infty)^{-1} \simeq \overline{\mathcal{O}(E')}_\infty \otimes (\overline{\mathcal{O}(F')}_\infty)^{-1},$$

ce qui termine la démonstration.

Proposition 3.3.9. *Soient E et F deux diviseurs de Cartier horizontaux et T-invariants sur $\mathbb{P}(\Delta)$. On a un isomorphisme isométrique :*

$$\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty \otimes \overline{\mathcal{O}(F)}_\infty \simeq \overline{\mathcal{O}(E+F)}_\infty.$$

Démonstration. La proposition est vraie dans le cas où $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}(F)$ sont engendrés par leurs sections globales. Le cas général s'obtient par différence à partir des propositions (3.3.6) et (3.3.8).

La construction qui vient d'être donnée coïncide avec les deux autres présentées précédemment :

Théorème 3.3.10. *Pour tout diviseur de Cartier horizontal T-invariant D sur $\mathbb{P}(\Delta)$, les métriques $\|.\|_{\mathrm{BT}}$, $\|.\|_{\mathrm{Zh}}$ et $\|.\|_{D,\infty}$ sur $\mathcal{O}(D)$ coïncident.*

Démonstration. Cela découle directement des propriétés de multiplicativité et de fonctorialité de la métrique $\|.\|_{\mathrm{BT}}$ énoncées à la proposition (3.3.2), ajouté au fait que $\|.\|_{\mathrm{BT}}$ et $\|.\|_{D,\infty}$ coïncident par construction lorsque $\mathbb{P}(\Delta)$ est l'espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ et que $\mathcal{O}(D) = \mathcal{O}(1)$.

Dans toute la suite de ce paragraphe, $\mathbb{P}(\Delta)$ désigne une variété torique *projective* et *lisse*.

On constate que les métriques canoniques définies précédemment ne sont pas C^∞ en général (considérer par exemple $\mathbb{P}(\Delta) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ et $\overline{\mathcal{O}(D)}_\infty = \overline{\mathcal{O}(1)}_\infty$). On a néanmoins le résultat suivant :

Proposition 3.3.11. *Soient $\mathbb{P}(\Delta)$ une variété torique projective et lisse, et D un diviseur de Cartier horizontal T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$ tel que $\mathcal{O}(D)$ soit engendré par ses sections globales. Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ et pour toute section holomorphe s de $\mathcal{O}(D)(\mathbb{C})$ sur Ω ne s'annulant pas, la fonction $x \mapsto -\log\|s(x)\|^2_{D,\infty}$ est continue et plurisousharmonique sur Ω.*

Démonstration. La continuité découle des définitions. Comme la condition de plurisousharmonicité est préservée par changement de variable holomorphe (voir par exemple [De3], th. 1.5.9), il suffit de démontrer le résultat pour le faisceau $\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty$ sur $\mathbb{P}^n_\mathbb{Z}$; et d'après la formule (3.4) cela résulte de ([De3], th. 1.5.6 et exemple 1.5.10). On peut également consulter ([De1], §3).

On montre maintenant un théorème d'approximation des métriques canoniques par des métriques C^∞ sur $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$:

Proposition 3.3.12. *Soient $\mathbb{P}(\Delta)$ une variété torique projective et lisse, et D un diviseur de Cartier horizontal T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$ tel que $\mathcal{O}(D)$ soit engendré par ses sections globales. Il existe une suite de métriques $(\|.\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathcal{O}(D)(\mathbb{C})$ convergeant uniformément vers $\|.\|_{D,\infty}$ sur $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ et vérifiant les conditions suivantes :*

- *Les métriques $\|.\|_n$ sont C^∞.*
- *Si $\Omega \subset \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ est un ouvert et s une section holomorphe de $\mathcal{O}(D)(\mathbb{C})$ sur Ω ne s'annulant pas, la fonction $x \mapsto \log\|s(x)\|_n^2$ est continue et plurisousharmonique sur Ω; en particulier le courant :*
$$c_1(\mathcal{O}(D)(\mathbb{C}), \|.\|_n) = -dd^c \log\|s(x)\|_n^2,$$
est positif.
- *Pour tout $x \in \Omega$, la suite $(-\log\|s(x)\|_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers $-\log\|s(x)\|_{D,\infty}^2$.*

Démonstration. La condition de plurisousharmonicité étant préservée par changement de variable holomorphe, il suffit d'après la construction par image inverse de démontrer la proposition pour $\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty$ sur $\mathbb{P}^m_\mathbb{Z}$. On considère alors la famille de métriques $\|.\|_n$ définies par :

$$\|s(x)\|_n = \frac{|s(x)|}{\left(\sum_{i=0}^m |x_i|^n\right)^{1/n}} ,$$

pour toute section locale holomorphe s de $\mathcal{O}(1)(\mathbb{C})$. Les métriques $\|.\|_n$ sont C^∞ sur $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$. De plus, la fonction :

$$(x_0, \ldots, x_m) \longmapsto \log(e^{x_0} + \cdots + e^{x_m})$$

étant convexe et croissante en chacun des x_i et la fonction $t \mapsto \log|t|$ étant sousharmonique, la fonction $\log\left(\sum_{i=0}^m |x_i|^n\right)^{1/n}$ est plurisousharmonique (voir par exemple [De3], th. 1.5.6 et [De1], §3). Enfin la suite $\left(\sum_{i=0}^m |x_i|^n\right)^{1/n}$, $(n \in \mathbb{N})$, est décroissante et converge vers $\sup_{0\leqslant i\leqslant m}|x_i|$, et la positivité de $c_1(\mathcal{O}(1)(\mathbb{C}), \|.\|_n)$ découle directement de ([De3], exemple 3.1.18).

3.4. Métriques canoniques sur les fibrés en droites sur $\mathbb{P}(\Delta)$.

Dans cette section, Δ désigne un éventail complet et régulier de N possédant une fonction support strictement concave. En d'autres termes, on suppose que $\mathbb{P}(\Delta)$ est une variété torique projective lisse.

Pour tout fibré en droites L sur $\mathbb{P}(\Delta)$, on construit de manière canonique une métrique sur $L(\mathbb{C})$.

Proposition-définition 3.4.1. *Soit L un fibré en droites sur $\mathbb{P}(\Delta)$. Il existe un diviseur horizontal T-invariant D sur $\mathbb{P}(\Delta)$ et un isomorphisme :*

$$\Phi : L \longrightarrow \mathcal{O}(D).$$

La métrique $\Phi^*\|.\|_{D,\infty}$ sur L est indépendante des choix de D et Φ. On l'appelle métrique canonique sur L et on la note $\|.\|_{L,\infty}$, ou plus simplement $\|.\|_\infty$ lorsqu'aucune confusion n'est à craindre. On note $\overline{L}_\infty = (L, \|.\|_{L,\infty})$ le fibré L muni de sa métrique canonique.

Démonstration. L'existence de D et Φ est une reformulation de la surjectivité de s dans la proposition (2.5.6). Soit maintenant D' un second diviseur horizontal T-invariant de $\mathbb{P}(\Delta)$ tel qu'il existe un isomorphisme $\Phi' : L \simeq \mathcal{O}(D')$. Le diviseur $D - D'$ est principal, et il existe un unique élément $m \in M$ tel que $D - D' = \operatorname{div} \chi^m$ d'après la proposition (2.5.6).

Comme les unités globales sur $\mathbb{P}(\Delta)$ sont $\{1, -1\}$, les isomorphismes Φ et Φ' sont uniques au signe près. Pour montrer que :

$$\Phi^*\|.\|_{D,\infty} = \Phi'^*\|.\|_{D',\infty}$$

il suffit donc de vérifier que l'isomorphisme :

$$\mathcal{O}(D') \simeq \mathcal{O}(D)$$

défini par la multiplication par χ^m transporte $\|.\|_{D',\infty}$ sur $\|.\|_{D,\infty}$. Cela découle de l'expression (3.3) de Batyrev et Tschinkel pour ces métriques.

La proposition suivante est une conséquence immédiate du théorème (3.3.3).

Proposition 3.4.2. *Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout fibré en droites L sur $\mathbb{P}(\Delta)$, on a un isomorphisme isométrique :*

$$[p]^*(\overline{L}_\infty) \simeq (\overline{L}_\infty)^{\otimes p},$$

et $\|.\|_{L,\infty}$ est l'unique métrique continue telle que $\overline{L}_\infty = (L, \|.\|_{L,\infty})$ vérifie cette propriété.

4. Produits de courants

4.1. Motivation.

Soient $\mathbb{P}(\Delta)$ une variété torique projective lisse et $\overline{L}_\infty$ un fibré en droites engendré par ses sections globales sur $\mathbb{P}(\Delta)$ et muni de sa métrique canonique. Soit s une section holomorphe de L sur un ouvert $U \subset \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$. En général la fonction $x \mapsto -\log \|s(x)\|^2_{L,\infty}$ n'est pas de classe C^∞ mais seulement plurisousharmonique sur U (cf. prop. (3.3.11)); la première "forme" de Chern $c_1(\overline{L}_\infty) = -dd^c \log \|s\|^2_{L,\infty}$ n'est alors définie qu'au sens des distributions (c'est un courant de bidegré (1,1)). On ne peut espérer définir en toute généralité le produit de deux courants; ici néanmoins, $c_1(\overline{L}_\infty)$ est un courant positif (voir [De3], prop. 3.1.18 et 3.1.14). Une construction due à Bedford et Taylor (cf. [BeT]) permet d'associer à des fibrés en droites $\overline{L}_{1,\infty}, \ldots, \overline{L}_{p,\infty}$ engendrés par leurs sections globales sur $\mathbb{P}(\Delta)$ et munis de leur métrique canonique, un produit :

$$c_1(\overline{L}_{1,\infty}) \cdots c_1(\overline{L}_{p,\infty})$$

possédant des propriétés satisfaisantes.

La construction présentée dans ce qui suit étant en fait tout à fait générale, on abandonne dans cette partie et la suivante le point de vue particulier des variétés toriques.

4.2. Théorie de Bedford-Taylor-Demailly.

On suit l'exposé donné dans ([De1], §3; [De2], §1 et §2; et [De3], §3.3). Tous les résultats présentés ici sont dus à Bedford et Taylor (cf. [BeT]) et Demailly (cf. [De1], [De2] et [De3]).

On rappelle tout d'abord quelques définitions et notations.

Dans toute cette partie, X désigne une variété analytique complexe de dimension complexe d. On note $A^{p,q}(X)$ (resp. $D^{p,q}(X)$) l'espace vectoriel des formes différentiables C^∞ complexes (resp. l'espace vectoriel des courants complexes) de type (p,q) sur X. Soit $Y \subset X$ un cycle analytique irréductible de codimension p, on note $\delta_Y \in D^{p,p}(X)$ le courant d'intégration sur Y. Pour tout élément $T \in D^{p,p}(X)$, on note $\operatorname{Supp} T \subset X$ le support de T. Enfin pour tout ouvert $U \subset X$, on notera $\operatorname{Psh}(U)$ l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques de U vers $[-\infty, +\infty[$ semi-continues supérieurement.

Définition 4.2.1. (Lelong). Soit p un entier positif et U un ouvert de X. Un courant $T \in D^{p,p}(U)$ est dit *positif* (ou *faiblement positif*) et on note $T \geqslant 0$, si et seulement si pour tout choix de $(1,0)$ formes $\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-p}$ de classe C^∞ à support compact sur U, la distribution :

$$T \wedge (i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1) \wedge \cdots \wedge (i\alpha_{d-p} \wedge \overline{\alpha}_{d-p})$$

est une mesure positive sur U. On note $D^{p,p}_+(U) \subset D^{p,p}(U)$ l'ensemble des courants positifs de type (p,p) sur U.

On pose alors :

Définition 4.2.2. (Bedford-Taylor). Soit $T \in D_+^{p,p}(U)$ un courant positif *fermé* de type (p,p) et $u \in \mathrm{Psh}(U)$ une fonction plurisousharmonique localement bornée sur U un ouvert de X. Le produit $(dd^c u) \wedge T$ est défini par la formule :

$$(dd^c u) \wedge T = dd^c(uT)$$

Remarque 4.2.3. Le produit uT est bien défini puisque u est localement bornée et T est d'ordre 0, i.e. à coefficients mesures (pour une démonstration de ce fait, voir par exemple [De3], 3.1.14).

Proposition 4.2.4. *Le produit $(dd^c u) \wedge T$ défini ci-dessus est un courant positif fermé de bidegré $(p+1, p+1)$. Il étend la définition usuelle du produit $(dd^c u) \wedge T$ dans le cas où u est une fonction C^∞ sur U.*

Démonstration. Voir par exemple ([De1], prop. 5.1; [De2], prop. 3.3.2 ou [De3], prop. 1.2).

De manière plus générale, étant données $T \in D_+^{p,p}(U)$ et $u_1, \ldots, u_q$ des fonctions plurisousharmoniques localement bornées sur U, on peut définir par récurrence sur q le courant :

$$(dd^c u_1) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q) \wedge T = dd^c(u_1 (dd^c u_2) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q) \wedge T).$$

C'est encore un courant positif fermé, de bidegré $(p+q, p+q)$.

Le produit ainsi défini a un comportement agréable vis-à-vis de la limite uniforme :

Théorème 4.2.5. *Soient $u_1, \ldots, u_q$ des fonctions plurisousharmoniques continues sur U. Soient $(u_1^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}, \ldots, (u_q^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, q suites de fonctions plurisousharmoniques localement bornées sur U convergeant uniformément sur tout compact de U vers $u_1, \ldots, u_q$ respectivement, et $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de courants positifs fermés convergeant faiblement vers T sur U. Alors :*

$$\begin{array}{llll} & u_1^{(k)} (dd^c u_2^{(k)}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q^{(k)}) \wedge T_k & \textit{tend vers} & u_1 (dd^c u_2) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q) \wedge T \\ \textit{et} & (dd^c u_1^{(k)}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q^{(k)}) \wedge T_k & \textit{vers} & (dd^c u_1) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q) \wedge T, \end{array}$$

au sens de la convergence faible des courants.

Démonstration. Voir ([De2], cor. 1.6) ou ([De3], cor. 3.3.6).

Au vue de la prop. (3.3.12), on souhaite affaiblir les hypothèses du théorème précédent et remplacer la convergence uniforme par la convergence simple décroissante; c'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 4.2.6. (Bedford-Taylor). *Soient $u_1, \ldots, u_q$ appartenant à $\mathrm{Psh}(U)$ et localement bornées sur U, et $u_1^{(k)}, \ldots, u_q^{(k)}$, q suites décroissantes de fonctions* *dans* $\mathrm{Psh}(U)$ *localement bornées sur* U *et convergeant simplement sur* U *vers* $u_1, \ldots, u_q$ *respectivement. On a :*

$$\begin{array}{llll} & u_1^{(k)}(dd^c u_2^{(k)}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q^{(k)}) \wedge T & \textit{tend vers} & u_1(dd^c u_2) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q) \wedge T \\ \textit{et} & (dd^c u_1^{(k)}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q^{(k)}) \wedge T & \textit{vers} & (dd^c u_1) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q) \wedge T, \end{array}$$

au sens de la convergence faible des courants.

Démonstration. Voir par exemple ([De2], §1.7 ou [De3], th. 3.3.7).

Par régularisation (voir par exemple [De3], th. 1.5.5), on déduit immédiatement de ce théorème le corollaire :

Corollaire 4.2.7. *Soient* $u_1, \ldots, u_q$ *des fonctions plurisousharmoniques localement bornées sur* U *et* $T \in D_+^{p,p}(U)$ *un courant positif fermé; le produit* $u_1(dd^c u_2) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q) \wedge T$ *(resp. le produit* $(dd^c u_1) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q) \wedge T$*) est indépendant de l'ordre des* $u_2, \ldots, u_q$ *(resp. de l'ordre des* $u_1, \ldots, u_q$*).*

Définition 4.2.8. Soit U un ouvert de X et $u \in \mathrm{Psh}(U)$. On appelle *lieu non borné* de u dans U et on note $L(u)$ l'ensemble des points $x \in U$ tels que u n'est bornée sur aucun voisinage de x dans U.

Le résultat suivant, dû à Demailly, montre que sous certaines conditions, on peut abandonner l'hypothèse selon laquelle les fonctions plurisousharmoniques $u_1, \ldots, u_q$ dans les énoncés (4.2.6) et (4.2.7) doivent être choisies *localement bornées.*

Théorème 4.2.9. (Demailly). *Soit* U *un ouvert de* X *et soient* $T \in D_+^{p,p}(U)$ *fermé et* $u_1, \ldots, u_q$ *appartenant à* $\mathrm{Psh}(U)$*. On suppose que* $q \leqslant d - p$ *et que pour tout choix d'indices* $j_1 < \ldots < j_m$ *dans* $\{1, \ldots, q\}$ *l'intersection* $L(u_{j_1}) \cap \cdots \cap L(u_{j_m}) \cap \mathrm{Supp}\, T$ *est contenue dans un ensemble analytique de dimension complexe inférieure ou égale à* $(d - p - m)$*. On peut construire des courants* $u_1(dd^c u_2) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q) \wedge T$ *et* $(dd^c u_1) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q) \wedge T$ *de masse localement finie sur* U *et caractérisés de manière unique par la propriété suivante : Pour toutes suites décroissantes* $(u_1^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (u_q^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *de fonctions plurisousharmoniques convergeant simplement vers* $u_1, \ldots, u_q$ *respectivement, on a :*

$$\begin{array}{llll} & u_1^{(k)}(dd^c u_2^{(k)}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q^{(k)}) \wedge T & \textit{tend vers} & u_1(dd^c u_2) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q) \wedge T \\ \textit{et} & (dd^c u_1^{(k)}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q^{(k)}) \wedge T & \textit{vers} & (dd^c u_1) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q) \wedge T, \end{array}$$

au sens de la convergence faible des courants sur U*.*

Démonstration. Voir ([De2], th. 2.5 et prop. 2.9 et [De3], th. 3.4.5 et prop. 3.4.9). On peut aussi consulter ([De1], th. 5.4).

On déduit immédiatement du théorème précédent les corollaires suivants :

Corollaire 4.2.10. *Soient $u_1, \dots, u_q$ et T comme au théorème (4.2.9); le produit $u_1(dd^c u_2)\wedge\cdots\wedge(dd^c u_q)\wedge T$ (resp. le produit $(dd^c u_1)\wedge\cdots\wedge(dd^c u_q)\wedge T$) ne dépend pas de l'ordre de $u_2, \dots, u_q$ (resp. de l'ordre de $u_1, \dots u_q$).*

Corollaire 4.2.11. *Soient $u_1, \dots, u_q$ plurisousharmoniques sur U et telles que pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, $L(u_i)$ est contenu dans un ensemble analytique $A_i \subset U$. Si pour tout choix d'indices $j_1 < \dots j_m$ dans $\{1, \dots, q\}$, on a :*

$$\operatorname{codim} A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_m} \geqslant m,$$

alors les courants $u_1(dd^c u_2) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q)$ et $(dd^c u_1) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q)$ sont bien définis et vérifient les propriétés d'approximation énoncées au théorème (4.2.9).

On expose enfin une construction due à Gillet-Soulé (cf. [GS1], §2.1.5) :
Soient X une variété projective complexe, Z un cycle de codimension q de X et g_Z un courant de Green localement L^1 pour Z (i.e. un élément de $D^{p-1,p-1}(X)$, localement L^1 sur X, C^∞ sur $X - |Z|$ et tel que $dd^c g_Z + \delta_Z = \omega_Z$ est C^∞ sur X). Choisissons une métrique sur X et notons pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$N_\varepsilon(Z) = \{x \in X : \quad d(x, Z) < \varepsilon\}.$$

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $\rho_\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que :

- $0 \leqslant \rho_\varepsilon \leqslant 1$ sur X,
- $\rho_\varepsilon = 1$ en dehors de $N_\varepsilon(Z)$,
- $\rho_\varepsilon = 0$ sur $N_{\varepsilon/2}(Z)$,

et posons $g_Z^{(\varepsilon)} = \rho_\varepsilon g_Z$.

Proposition 4.2.12. *Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, les assertions suivantes sont vérifiées :*

- *$g_Z^{(\varepsilon)}$ est une forme C^∞ sur X.*
- *On a : $dd^c g_Z^{(\varepsilon)} + \delta_Z^{(\varepsilon)} = \omega_Z$, où $\delta_Z^{(\varepsilon)}$ est une forme fermée C^∞ dont le support est contenu dans $\overline{N_\varepsilon(Z)}$.*

De plus, on a les limites suivantes :

- $\lim_{\varepsilon\to 0} g_Z^{(\varepsilon)} = g_Z$,
- $\lim_{\varepsilon\to 0} \delta_Z^{(\varepsilon)} = \delta_Z$,

au sens de la topologie faible des courants.

Démonstration. Voir [GS1], §2.1.5.

4.3. Formes différentielles généralisées.

Les résultats énoncés dans la section précédente motivent la définition suivante :

Définition 4.3.1. Soit U un ouvert de X et $u_1, \dots, u_q$ des fonctions de $U \to [-\infty, +\infty[$. Le q-uplet $(u_1, \dots, u_q)$ est dit *admissible sur U* si et seulement si :

1. Les fonctions $u_1, \dots, u_q$ sont des éléments de $\operatorname{Psh}(U)$.

2. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, l'ensemble $L(u_i)$ est contenu dans un ensemble analytique $A_i \subset U$.
3. Pour tout choix d'indices $j_1 < \ldots < j_m$ dans $\{1, \ldots, q\}$, on a :

$$\operatorname{codim} A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_m} \geqslant m.$$

Pour tout q-uplet $(u_1, \ldots, u_q)$ admissible sur un ouvert $U \subset X$, le corollaire (4.2.11) nous permet de définir sur U les courants $u_1(dd^c u_2) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q)$ et $(dd^c u_1) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q)$.

On pose :

Définition 4.3.2. Soit p un entier positif. On note $\overline{\overline{A}}^{p,p}(X) \subset D^{p,p}(X)$ (resp. $\overline{\overline{A}}^{p,p}_{\log}(X) \subset D^{p,p}(X)$) l'espace vectoriel complexe formé des éléments de $D^{p,p}(X)$ qui, sur tout ouvert U d'un recouvrement suffisamment fin de X, peuvent s'écrire sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i (dd^c u_{i,1}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i})$$

$$\Big(\text{resp.} \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_{i,1} (dd^c u_{i,2}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i})\Big),$$

où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $\omega_i \in A^{p-q_i, p-q_i}(U)$ (resp. $\omega_i \in A^{p-q_i+1, p-q_i+1}(U)$) et le q_i-uplet $(u_{i,1}, \ldots, u_{i,q_i})$ est admissible sur l'ouvert U considéré.

On pose aussi la définition suivante :

Définition 4.3.3. Soit p un entier positif. On dit que $\alpha \in \overline{\overline{A}}^{p,p}(X)$ est une *forme différentielle généralisée* de type (p, p) si et seulement si sur tout ouvert U d'un recouvrement suffisamment fin de X, on peut écrire la restriction de α à U sous la forme :

$$\alpha_{/U} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (dd^c u_{i,1}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i}),$$

où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $\omega_i \in A^{p-q_i, p-q_i}(U)$ et $u_{i,1}, \ldots, u_{i,q_i}$ sont plurisousharmoniques et *localement bornées* sur U. On note $\overline{A}^{p,p}(X)$ l'espace vectoriel complexe des formes différentielles généralisées de type (p, p) sur X.

On pose également :

$$\overline{A}^{*}(X) = \bigoplus_{p \geqslant 0} \overline{A}^{p,p}(X), \qquad \overline{\overline{A}}^{*}(X) = \bigoplus_{p \geqslant 0} \overline{\overline{A}}^{p,p}(X), \quad \text{et} \quad \overline{\overline{A}}^{*}_{\log}(X) = \bigoplus_{p \geqslant 0} \overline{\overline{A}}^{p,p}_{\log}(X).$$

Remarque 4.3.4. On a immédiatement les inclusions suivantes :

$$\overline{A}^{*}(X) \subset \overline{\overline{A}}^{*}(X) \subset \overline{\overline{A}}^{*}_{\log}(X) \subset D^{*}(X).$$

Remarque 4.3.5. L'opérateur $dd^c : D^{p,p}(X) \to D^{p+1,p+1}(X)$ induit par restriction une application $dd^c : \overline{\overline{A}}^{p,p}_{\log}(X) \to \overline{\overline{A}}^{p+1,p+1}_{\log}(X)$.

Soient $x \in \overline{A}^{p,p}(X)$ et $y \in \overline{\overline{A}}^{q,q}_{\log}(X)$. Sur tout ouvert $U \subset X$ assez petit, on peut écrire :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (dd^c u_{i,1}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,r_i})$$

$$\text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{m} \eta_j v_{j,1} (dd^c v_{j,2}) \wedge \cdots \wedge (dd^c v_{j,s_j}),$$

où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $\omega_i \in A^{p-r_i,p-r_i}(U)$ et $u_{i,1}, \ldots, u_{i,r_i}$ sont des fonctions plurisousharmoniques localement bornées sur U; et où pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$, on a $\eta_j \in A^{q-s_j+1,q-s_j+1}(U)$ et le multiplet $(v_{j,1}, \ldots, v_{j,s_j})$ est admissible sur U.

D'après le théorème (4.2.9), l'expression :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \omega_i \eta_j v_{j,1} (dd^c u_{i,1}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,r_i}) \wedge (dd^c v_{j,2}) \wedge \cdots \wedge (dd^c v_{j,s_j}),$$

a bien un sens et définit sur U un courant de type $(p+q, p+q)$ que l'on note provisoirement $[x \cdot y](U)$.

Proposition 4.3.6. *Le courant $[x \cdot y](U)$ défini ci-dessus ne dépend que de x et de y.*

Démonstration. Soient x' et y' deux courants sur U tels que $x' = x_{/U}$ et $y' = y_{/U}$, et tels qu'on puisse écrire :

$$x' = \sum_{i=1}^{n'} \omega'_i (dd^c u'_{i,1}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u'_{i,r'_i})$$

$$\text{et} \quad y' = \sum_{j=1}^{m'} \eta'_j v'_{j,1} (dd^c v'_{j,2}) \wedge \cdots \wedge (dd^c v'_{j,s'_j}),$$

où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n'$, on a $\omega'_i \in A^{p-r'_i,p-r'_i}(U)$ et $u'_{i,1}, \ldots, u'_{i,r'_i}$ sont des fonctions plurisousharmoniques localement bornées sur U; et où pour tout $1 \leqslant j \leqslant m'$, on a $\eta'_j \in A^{q-s'_j,q-s'_j}(U)$ et le multiplet $(v'_{j,1}, \ldots, v'_{j,s'_j})$ est admissible sur U.

On définit les courants :

$$[x'\cdot y](U)=\sum_{i=1}^{n'}\sum_{j=1}^{m}\omega'_i\eta_j v_{j,1}(dd^c u'_{i,1})\wedge\cdots\wedge(dd^c u'_{i,r'_i})\wedge(dd^c v_{j,2})\wedge\cdots\wedge(dd^c v_{j,s_j})$$

et

$$[x'\cdot y'](U)=\sum_{i=1}^{n'}\sum_{j=1}^{m'}\omega'_i\eta'_j v'_{j,1}(dd^c u'_{i,1})\wedge\cdots\wedge(dd^c u'_{i,r'_i})\wedge(dd^c v'_{j,2})\wedge\cdots\wedge(dd^c v'_{j,s'_j}).$$

On veut démontrer que le courant δ défini sur U par l'égalité :

$\delta=[x'\cdot y'](U)-[x\cdot y](U)=([x'\cdot y'](U)-[x'\cdot y](U))+([x'\cdot y](U)-[x\cdot y](U)),$

est nul. On va prouver pour cela que $[x'\cdot y](U)-[x\cdot y](U)=0$. On démontrerait de même que $[x'\cdot y'](U)-[x'\cdot y](U)=0$.

Par régularisation, on peut trouver pour tout $1\leqslant j\leqslant m$ et $1\leqslant k\leqslant s_j$, une suite décroissante $(v_{j,k}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Psh}(U)\cap C^\infty(U)$ convergeant simplement sur U vers $v_{j,k}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $y^{(n)}$ la forme différentielle C^∞ de type (q,q) sur U définie par :

$$y^{(n)}=\sum_{j=1}^{m}\eta_j v_{j,1}^{(n)}(dd^c v_{j,2}^{(n)})\wedge\cdots\wedge(dd^c v_{j,s_j}^{(n)}).$$

De l'égalité $x=x'$, on déduit que $x\cdot y^{(n)}=x'\cdot y^{(n)}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, le produit étant le produit habituel d'un courant par une forme différentielle. Or, d'après (4.2.9), on a :

$$\begin{aligned} & x\cdot y^{(n)} \quad \text{tend vers} \quad [x\cdot y](U)\\ \text{et}\quad & x'\cdot y^{(n)} \quad \text{tend vers} \quad [x'\cdot y](U), \end{aligned}$$

au sens de la topologie faible. On en conclut que $[x'\cdot y](U)-[x\cdot y](U)=0$ et la proposition est démontrée.

L'assertion suivante est une conséquence directe de ce qui précède.

Proposition 4.3.7. *Soient $x\in\overline{A}^{p,p}(X)$ et $y\in\overline{\overline{A}}_{\log}^{q,q}(X)$. Il existe un (unique) élément de $\overline{\overline{A}}_{\log}^{p+q,p+q}(X)$ que l'on notera $x\cdot y$ et dont la restriction à tout ouvert $U\subset X$ assez petit coïncide avec le courant $[x\cdot y](U)$ défini à la proposition (4.3.6).*

Définition 4.3.8. Soient $x\in\overline{A}^{p,p}(X)$ et $y\in\overline{\overline{A}}_{\log}^{q,q}(X)$. On appelle *produit de x et de y* le courant $x\cdot y\in\overline{\overline{A}}_{\log}^{p+q,p+q}(X)$ défini à la proposition précédente.

Plus généralement, soient $x\in\overline{A}^{*}(X)$ et $y\in\overline{\overline{A}}_{\log}^{*}(X)$, on appelle *produit de x et de y* et l'on note encore $x\cdot y$ le produit gradué de x et de y.

Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates des définitions :

Proposition 4.3.9. *Soient* $x_1 \in \overline{A}^{p,p}(X)$ *et* $x_2 \in \overline{A}^{q,q}(X) \subset \overline{\overline{A}}^{q,q}_{\log}(X)$*; on a :* $x_1 \cdot x_2 \in \overline{A}^{p+q,p+q}(X)$.

Proposition 4.3.10. *Soient* x_1 *et* x_2 *des éléments de* $\overline{A}^*(X)$ *et* $y \in \overline{\overline{A}}^*_{\log}(X)$*; on a les relations suivantes :*

1. $x_1 \cdot (x_2 \cdot y) = (x_1 \cdot x_2) \cdot y$ (associativité).
2. $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$ (commutativité).

Proposition 4.3.11. *Le produit défini à la proposition (4.3.9) munit* $\overline{A}^*(X)$ *d'une structure d'algèbre associative commutative unifère et graduée et* $\overline{\overline{A}}^*_{\log}(X)$ *d'une structure de* $\overline{A}^*(X)$*-module, qui étend sa structure usuelle de* $A^*(X)$*-module. La restriction à* $A^*(X)$ *de la structure d'algèbre sur* $\overline{A}^*(X)$ *coïncide avec la structure d'algèbre usuelle sur* $A^*(X)$.

Soient X et Y deux variétés complexes et $f : Y \to X$ un morphisme lisse de variétés analytiques (i.e. une submersion holomorphe). On considère $U \subset X$ et $V \subset Y$ deux ouverts tels que $f(V) \subset U$.
Un résultat classique (voir par exemple [De3], th. 1.5.9), affirme que si $u \in \mathrm{Psh}(U)$ alors $f^*(u) = u \circ f \in \mathrm{Psh}(V)$. Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 4.3.12. *Soit* $(u_1, \ldots, u_q)$ *un q-uplet admissible de fonctions réelles sur* U*; le q-uplet* $(u_1 \circ f, \ldots, u_q \circ f)$ *est admissible sur* V.

Démonstration. D'après la remarque ci-dessus, on sait que les fonctions $u_1 \circ f, \ldots, u_q \circ f$ sont plurisousharmoniques sur V. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, on a : $L(u_i \circ f) = f^{-1}(L(u_i)) \subset f^{-1}(A_i)$. Enfin, du fait de la lissité de f, les ensembles $f^{-1}(A_i)$ sont analytiques et on a pour tout choix d'indices $j_1 < \ldots < j_m$ dans $\{1, \ldots, q\}$:

$$\operatorname{codim}\ f^{-1}(A_{j_1}) \cap \cdots \cap f^{-1}(A_{j_m}) = \operatorname{codim} A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_m} \geqslant m,$$

dès que les intersections considérées sont non vides.

La proposition suivante montre que l'image inverse du courant $u_1 dd^c u_2 \wedge \cdots \wedge dd^c u_q$ s'exprime simplement :

Proposition 4.3.13. *Soit* $(u_1, \ldots, u_q)$ *un q-uplet admissible de fonctions réelles sur* U*; on a sur* V *l'égalité :*

$$f^*(u_1 dd^c u_2 \wedge \cdots \wedge dd^c u_q) = (u_1 \circ f)(dd^c u_2 \circ f) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q \circ f).$$

Démonstration. Par régularisation, on peut trouver pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$ une suite décroissante $\left(u_i^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Psh}(U) \cap C^\infty(U)$ convergeant simplement sur U vers u_i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $x^{(n)}$ la forme différentielle C^∞ de type $(q-1, q-1)$ sur U définie par :

$$x^{(n)} = u_1^{(n)} dd^c u_2^{(n)} \wedge \cdots \wedge dd^c u_q^{(n)}.$$

D'après (4.2.9) la suite $x^{(n)}$ (resp. la suite $f^*(x^{(n)})$) tend vers $u_1 dd^c u_2 \wedge \cdots \wedge dd^c u_q$ (resp. vers $(u_1 \circ f)(dd^c u_2 \circ f) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_q \circ f)$) au sens de la convergence faible des courants quand n tend vers $+\infty$. Le résultat découle alors de la continuité faible de f^*.

On déduit de ce résultat que toute application analytique lisse $f : Y \to X$ induit un morphisme de groupes $f^* : \overline{\overline{A}}^{p,p}_{\log}(X) \to \overline{\overline{A}}^{p,p}_{\log}(Y)$, qui induit un morphisme gradué $f^* : \overline{\overline{A}}^{*}_{\log}(X) \to \overline{\overline{A}}^{*}_{\log}(Y)$.
Les deux propositions suivantes sont des conséquences directes de (4.3.13) :

Proposition 4.3.14. *On a : $f^*\left(\overline{\overline{A}}^{*}(X)\right) \subset \overline{\overline{A}}^{*}(Y)$ et $f^*\left(\overline{A}^{*}(X)\right) \subset \overline{A}^{*}(Y)$.*

Proposition 4.3.15. *Soient $x \in \overline{A}^{*}(X)$ et $y \in \overline{\overline{A}}^{*}_{\log}(X)$, on a :*

$$f^*(x \cdot y) = f^*(x) \cdot f^*(y).$$

En particulier, le morphisme $f^* : \overline{A}^{*}(X) \to \overline{A}^{*}(Y)$ est un morphisme d'algèbres.

Enfin les deux propositions suivantes sont valables en toute généralité :

Proposition 4.3.16. *Soient $g : Z \to Y$ et $f : Y \to X$ deux morphismes lisses de variétés complexes, on a l'identité : $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.*

Proposition 4.3.17. *Soient $\alpha \in A^*_c(Y)$ et $x \in \overline{\overline{A}}^{*}_{\log}(X)$, on a :*

$$f_*\left(\alpha \cdot f^*(x)\right) = f_*(\alpha) \cdot x,$$

l'image directe $f_*\left(\alpha \cdot f^*(x)\right)$ étant prise au sens des courants.

4.4. Convergence au sens de Bedford-Taylor et image inverse.

On introduit dans ce paragraphe de nouvelles classes remarquables de courants.

Définition 4.4.1. Soit p un entier positif et Z un cycle de codimension q de X. On note $B^{p,p}(X)$ (resp. $B^{p,p}_{\log}(X)$, resp. $B^{p,p}_Z(X)$, resp. $B^{p,p}_{Z,\log}(X)$) l'espace vectoriel complexe formé des éléments de $D^{p,p}(X)$, qui, sur tout ouvert U d'un recouvrement suffisamment fin de X, peuvent s'écrire sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i (dd^c u_{i,1}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i}),$$

$$\left(\textit{resp.} \qquad \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_{i,1} (dd^c u_{i,2}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i})\right),$$

$$\left(\textit{resp.} \qquad \sum_{i=1}^{n} \omega_i (dd^c u_{i,1}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i}) \wedge \delta_Z, \right),$$

$$\left(\textit{resp.} \qquad \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_{i,1} (dd^c u_{i,2}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i}) \wedge \delta_Z, \right),$$

où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $\omega_i \in A^{p-q_i,p-q_i}(U)$ (resp. $\omega_i \in A^{p-q_i+1,p-q_i+1}(U)$, resp. $\omega_i \in A^{p-q-q_i,p-q-q_i}(U)$, resp. $\omega_i \in A^{p-q-q_i+1,p-q-q_i+1}(U)$) et $u_{i,1},\dots,u_{i,q_i}$ sont des fonctions plurisousharmoniques *continues* sur U.

Remarque 4.4.2. On a immédiatement les inclusions $B^{p,p}(X) \subset B^{p,p}_{\log}(X)$, $B^{p,p}_Z(X) \subset B^{p,p}_{Z,\log}(X)$ et l'égalité $B^{p,p}_{\log}(X) = B^{p,p}_{X,\log}(X)$.

En reprenant les hypothèses et les notations de la définition précédente, on pose également :

Définition 4.4.3. On note $B^{p,p}_0(X)$ (resp. $B^{p,p}_{\log,0}(X)$, resp. $B^{p,p}_{Z,0}(X)$, resp. $B^{p,p}_{Z,\log,0}(X)$) le sous-espace vectoriel complexe de $B^{p,p}(X)$ (resp. de $B^{p,p}_{\log}(X)$, resp. de $B^{p,p}_Z(X)$, resp. de $B^{p,p}_{Z,\log}(X)$) formé des éléments qui, sur tout ouvert U d'un recouvrement suffisamment fin de X, peuvent s'écrire sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i (dd^c u_{i,1}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i}),$$

$$\left(resp. \qquad \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_{i,1} (dd^c u_{i,2}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i})\right),$$

$$\left(resp. \qquad \sum_{i=1}^{n} \omega_i (dd^c u_{i,1}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i}) \wedge \delta_Z, \right),$$

$$\left(resp. \qquad \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_{i,1} (dd^c u_{i,2}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i}) \wedge \delta_Z, \right),$$

où les $u_{i,j}$ et les ω_i sont comme à la définition (4.4.1) et où de plus, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, la forme ω_i est *fermée*.

Remarque 4.4.4. On a les inclusions $B^{p,p}_0(X) \subset B^{p,p}_{\log,0}(X) = B^{p,p}_{X,\log,0}(X)$ et $B^{p,p}_{Z,0}(X) \subset B^{p,p}_{Z,\log,0}(X)$.

Définition 4.4.5. Soit $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $B^{p,p}_{Z,\log}(X)$. On dit que $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in B^{p,p}_{Z,\log}(X)$ *au sens de Bedford-Taylor* (en abrégé *au sens BT*) si pour tout ouvert U d'un recouvrement suffisamment fin de X, on peut écrire :

$$x^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \omega^{(k)} u^{(k)}_{i,1} (dd^c u^{(k)}_{i,2}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u^{(k)}_{i,q_i}) \wedge \delta_Z$$

$$\text{et} \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \omega u_{i,1} (dd^c u_{i,2}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i}) \wedge \delta_Z,$$

où n est indépendant de k et où, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\omega_i^{(k)} \in A^{p-q-q_i+1,p-q-q_i+1}(U)$, $\omega_i \in A^{p-q-q_i+1,p-q-q_i+1}(U)$ et $u^{(k)}_{i,1},\dots,u^{(k)}_{i,q_i},u_{i,1},\dots,u_{i,q_i}$

sont des fonctions plurisousharmoniques *continues* sur U; que $\omega_i^{(k)}$ tend vers ω_i au sens des formes C^∞ quand k tend vers $+\infty$ et que de plus $(u_{i,1}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}, \dots, (u_{i,q_i}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur U vers $u_{i,1}, \dots, u_{i,q_i}$ respectivement quand k tend vers $+\infty$.

Définition 4.4.6. Soit $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $B_Z^{p,p}(X)$. On dit que $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in B_Z^{p,p}(X)$ *au sens BTR*, si pour tout ouvert U d'un recouvrement suffisamment fin de X, on peut écrire :

$$x^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \omega^{(k)}(dd^c u_{i,1}^{(k)}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i}^{(k)}) \wedge \delta_Z$$

$$\text{et} \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \omega(dd^c u_{i,1}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i}) \wedge \delta_Z,$$

où n est indépendant de k et où, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\omega_i^{(k)} \in A^{p-q-q_i,p-q-q_i}(U)$, $\omega_i \in A^{p-q-q_i,p-q-q_i}(U)$ et $u_{i,1}^{(k)}, \dots, u_{i,q_i}^{(k)}, u_{i,1}, \dots, u_{i,q_i}$ sont des fonctions plurisousharmoniques *continues* sur U; que $\omega_i^{(k)}$ tend vers ω_i au sens des formes C^∞ quand k tend vers $+\infty$ et que de plus $(u_{i,1}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}, \dots, (u_{i,q_i}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur U vers $u_{i,1}, \dots, u_{i,q_i}$ respectivement quand k tend vers $+\infty$.

En reprenant les hypothèses et les notations de la définition précédente, on pose également :

Définition 4.4.7. Soit $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $B_{Z,\log,0}^{p,p}(X)$. On dit que $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in B_{Z,\log,0}^{p,p}(X)$ *fortement au sens BT* si pour tout ouvert U d'un recouvrement suffisamment fin de X, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on puisse écrire :

$$x^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \omega^{(k)} u_{i,1}^{(k)}(dd^c u_{i,2}^{(k)}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i}^{(k)}) \wedge \delta_Z$$

$$\text{et} \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \omega u_{i,1}(dd^c u_{i,2}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i}) \wedge \delta_Z,$$

où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\omega_i^{(k)}$ tend vers ω_i dans $A^*(U)$ quand k tend vers $+\infty$ et $u_{i,1}^{(k)}, \dots, u_{i,q_i}^{(k)}$ converge uniformément sur U vers $u_{i,1}, \dots, u_{i,q_i}$ respectivement quand k tend vers $+\infty$, et où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et tout $k \in \mathbb{N}$ les formes $\omega_i^{(k)}$ et ω_i sont *fermées*.

Définition 4.4.8. Soit $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $B_{Z,0}^{p,p}(X)$. On dit que $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in B_{Z,0}^{p,p}(X)$ *fortement au sens BTR* si pour tout ouvert U d'un recouvrement suffisamment fin de X, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout

$k \in \mathbb{N}$ on puisse écrire :

$$x^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \omega^{(k)}(dd^c u_{i,1}^{(k)}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i}^{(k)}) \wedge \delta_Z$$

$$\text{et} \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \omega(dd^c u_{i,1}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i}) \wedge \delta_Z,$$

où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\omega_i^{(k)}$ tend vers ω_i dans $A^*(U)$ quand k tend vers $+\infty$ et $u_{i,1}^{(k)}, \dots, u_{i,q_i}^{(k)}$ converge uniformément sur U vers $u_{i,1}, \dots, u_{i,q_i}$ respectivement quand k tend vers $+\infty$, et où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et tout $k \in \mathbb{N}$ les formes $\omega_i^{(k)}$ et ω_i sont *fermées*.

Remarque 4.4.9. D'après le théorème (4.2.5) les quatre notions de convergence introduites aux définitions (4.4.5), (4.4.6), (4.4.7) et (4.4.8) sont plus fortes que la convergence faible au sens des courants.

Remarque 4.4.10. L'application $dd^c : B^{p,p}_{\log,0}(X) \to B_0^{p+1,p+1}(X)$ envoie l'ensemble des suites convergeant fortement au sens BT dans l'ensemble des suites convergeant fortement au sens BTR.

Remarque 4.4.11. L'application $dd^c : B^{p,p}(X) \to B_0^{p+1,p+1}(X)$ envoie l'ensemble des suites convergeant au sens BTR dans l'ensemble des suites convergeant fortement au sens BTR.

Définition 4.4.12. On note $C^{p,p}(X)$ (resp. $C^{p,p}_{\log}(X)$) l'ensemble des limites des suites de $A^{p,p}(X)$ convergeant dans $B^{p,p}(X)$ (resp. dans $B^{p,p}_{\log}(X)$) au sens BTR (resp. au sens BT).

On note $C_0^{p,p}(X)$ (resp. $C^{p,p}_{\log,0}(X)$)l'ensemble des limites des suites de $A^{p,p}(X)$ convergeant fortement dans $B_0^{p,p}(X)$ (resp. dans $B^{p,p}_{\log,0}(X)$) au sens BTR (resp. au sens BT).

Soient $x \in B^{p,p}(X)$ et $y \in B^{r,r}_{Z,\log}(X)$. Sur un ouvert $U \subset X$ assez petit, on peut écrire :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(dd^c u_{i,1}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{i,q_i})$$

$$\text{et} \qquad y = \sum_{j=1}^{m} \eta_j v_{j,1}(dd^c v_{j,2}) \wedge \cdots \wedge (dd^c v_{j,r_j}) \wedge \delta_Z,$$

où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\omega_i \in A^{p-q_i,p-q_i}(U)$ et $u_{i,1}, \dots, u_{i,q_i}$ sont des fonctions plurisousharmoniques continues sur U; et où pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $\eta_j \in A^{p-q-r_j+1,p-q-r_j+1}(U)$ et $v_{j,1}, \dots, v_{j,r_j}$ sont des fonctions plurisousharmoniques continues sur U. A partir de ces données, on définit un courant de

$B^{p+r,p+r}_{Z,\log}(U)$ que l'on note provisoirement $[x\cdot y](U)$, par la formule :

$$[x\cdot y](U) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \omega_i\eta_j v_{j,1}(dd^c u_{i,1})\wedge\cdots\wedge(dd^c u_{i,q_i})\wedge(dd^c v_{j,2})\wedge\cdots\wedge(dd^c v_{j,r_j})\wedge\delta_Z.$$

Proposition 4.4.13. *Le courant $[x\cdot y](U)$ ainsi défini ne dépend que de x et de y.*

Démonstration. Par linéarité, on se ramène au cas où Z est effectif. Le problème étant local, on se restreint à un ouvert $U'\subset U$ tel qu'il existe une suite $(\delta_Z^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de formes C^∞ fermées et positives sur U' convergeant faiblement au sens des courants vers δ_Z. On suit alors *mutatis mutandis* la démonstration de la proposition (4.3.6) en utilisant le théorème (4.2.5).

On déduit immédiatement de ce qui précède :

Proposition-définition 4.4.14. *Soient $x\in B^{p,p}(X)$ et $y\in B^{r,r}_{Z,\log}(X)$. Il existe un unique élément de $B^{p+r,p+r}_{Z,\log}(X)$ que l'on note $x\cdot y$ et qu'on appelle produit de x et de y, dont la restriction à tout ouvert $U\subset X$ assez petit coïncide avec le courant $[x\cdot y](U)$ défini à la proposition (4.4.13).*

Plus généralement, soient $x\in B^*(X)$ et $y\in B^*_{Z,\log}(X)$, on appelle *produit de x et de y* et on note encore $x\cdot y$ le produit gradué de x et de y.

Remarque 4.4.15. On définit de façon similaire un produit :

$$(\;\cdot\;): B^*_{\log}(X)\times B^*_Z(X)\longrightarrow B^*_{Z,\log}(X).$$

Remarque 4.4.16. Du fait de l'inclusion $B^*(X)\subset B^*_{\log}(X)=B^*_{X,\log}(X)$, on dispose d'un produit $(\;\cdot\;): B^*(X)\times B^*_{\log}(X)\to B^*_{\log}(X)$. Ce produit coïncide avec le produit défini à la proposition (4.3.7).

La proposition suivante est une conséquence directe des définitions :

Proposition 4.4.17. *Le produit défini à la proposition (4.4.14) munit $B^*(X)$ d'une structure d'algèbre associative commutative unifère et graduée et $B^*_{Z,\log}(X)$ d'une structure de $B^*(X)$-module qui étend sa structure usuelle de $A^*(X)$-module.*

La proposition suivante montre que le produit défini à la proposition (4.4.14) se comporte bien vis-à-vis des convergences ordinaires ou fortes au sens BT et BTR :

Proposition 4.4.18. *Le produit :*

$$(\;\cdot\;): B^*(X)\times B^*_{Z,\log}(X)\longrightarrow B^*_{Z,\log}(X),$$

est compatible avec les convergences au sens BTR et BT sur $B^*(X)$ et $B^*_{Z,\log}(X)$ respectivement. Sa restriction :

$$(\;\cdot\;): B^*_0(X)\times B^*_{Z,\log,0}(X)\longrightarrow B^*_{Z,\log,0}(X),$$

est compatible avec les convergences fortes au sens BTR et BT sur $B_0^*(X)$ *et* $B_{Z,\log,0}^*(X)$ *respectivement.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des définitions.

Remarque 4.4.19. Soient $\varphi \in C_{\log,0}^{p,p}(X)$, $\varphi' \in C_{\log,0}^{q,q}(X)$ et $\varphi'' \in C_0^{r,r}(X)$, on a $\varphi dd^c\varphi' \in C_{\log,0}^{p+q+1,p+q+1}(X)$ et $\varphi\varphi'' \in C_{\log,0}^{p+r,p+r}(X)$.

Théorème 4.4.20. *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme de variétés projectives complexes. Il existe un unique morphisme de groupes gradués :*

$$f^* : B_{\log}^*(Y) \longrightarrow B_{\log}^*(X),$$

tel que les assertions suivantes soient vérifiées :

1. f^* *restreint à* $A^*(Y)$ *coïncide avec l'application image inverse usuelle.*
2. f^* *respecte la convergence au sens BT.*
3. *On a* $f^*(B^*(Y)) \subset B^*(X)$, $f^*(B_0^*(Y)) \subset B_0^*(X)$ *et* $f^*(B_{\log,0}^*(Y)) \subset B_{\log,0}^*(Y)$.
4. f^* *restreint à* $B^*(Y)$ *(resp. à* $B_0^*(Y)$*, resp. à* $B_{\log,0}^*(Y)$*) respecte la convergence au sens BTR (resp. la convergence forte au sens BTR, resp. la convergence forte au sens BT).*
5. *Si* $x \in B^*(Y)$ *et* $y \in B_{\log}^*(Y)$*, alors on a :*
$$f^*(x \cdot y) = f^*(x) \cdot f^*(y).$$
6. *Soit* $g : V \to X$ *un autre morphisme de variétés projectives complexes. On a :* $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Démonstration. Le morphisme $f : X \to Y$ peut se factoriser comme la composition d'une immersion fermée $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}_Y^n$ pour n assez grand, et de la projection $\pi : \mathbb{P}_Y^n \to Y$ qui est un morphisme *lisse*. On va définir π^* et i^*, puis poser $f^* = i^* \circ \pi^*$.

Comme π est lisse, $\pi^* : D^*(Y) \to D^*(X)$ est défini en toute généralité et sa restriction à $B_{\log}^*(Y)$ vérifie les assertions (1) à (6) d'après les propositions (4.3.13), (4.3.15), (4.3.16) et (4.3.17).

On donne à présent une construction de i^*. Soit $x \in B_{\log}^*(Y)$; sur tout ouvert U d'un recouvrement suffisamment fin de Y, on peut écrire :

$$x = \sum_{j=1}^{n} \omega_j u_{j,1}(dd^c u_{j,2}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{j,q_j}),$$

où pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, $\omega_j \in A^*(U)$ et $u_{j,1}, \ldots, u_{j,q_j}$ sont des fonctions plurisousharmoniques *continues* sur U. On pose :

$$i^*(x)(i^{-1}(U)) = \sum_{i=1}^{n} i^*(\omega_j)(u_{j,1} \circ i)(dd^c u_{j,2} \circ i) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{j,q_j} \circ i) \in B_{\log}^*(i^{-1}(U)).$$

Le morphisme image directe $i_* : D^*(X) \to D^*(Y)$ étant injectif, le courant $i^*(x)$ est l'unique courant tel que :

$$i_*(i^*(x)) = x \cdot \delta_{i(X)},$$

ce qui montre que le morphisme i^* est bien défini. On déduit aisément des définitions que i^* vérifie les assertions (1) à (6).

Les morphismes π^* et i^* étant définis, on pose $f^* = i^* \circ \pi^*$. Par composition, f^* vérifie les assertions (1) à (5). Il faut montrer que f^* ne dépend pas de la décomposition $f = \pi \circ i$ utilisée pour le définir. Pour cela, on montre que les assertions (1) et (2) caractérisent f^* de manière unique.

Soit $x \in B^*_{\log}(X)$. En utilisant une partition de l'unité associée à un recouvrement suffisamment fin de Y, on peut supposer que le support de x est contenu dans un ouvert $U \subset X$ tel que l'on puisse écrire :

$$x = \sum_{j=1}^{n} \omega_j u_{j,1}(dd^c u_{j,2}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u_{j,q_j}),$$

où pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, ω_j est une forme C^∞ dont le support est contenu dans U et $u_{j,1}, \dots, u_{j,q_j}$ sont des fonctions plurisousharmoniques continues sur U. Par régularisation, on peut trouver pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$ des suites $(u^{(k)}_{j,1})_{k\in\mathbb{N}}, \dots, (u^{(k)}_{j,q_j})_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions plurisousharmoniques C^∞ convergeant uniformément vers $u_{j,1}, \dots, u_{j,q_j}$ respectivement sur U.

Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$x^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \omega_j u^{(k)}_{j,1}(dd^c u^{(k)}_{j,2}) \wedge \cdots \wedge (dd^c u^{(k)}_{j,q_j}).$$

On déduit de l'assertion (2) que la suite $(f^*(x^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $f^*(x)$. Comme d'autre part les formes images inverses $f^*(x^{(k)})$ pour $k \in \mathbb{N}$ ne dépendent pas, d'après l'assertion (1), de la décomposition choisie, il en est de même pour $f^*(x)$.

L'assertion (6) se montre de façon similaire.

Remarque 4.4.21. Les opérateurs f^* et dd^c commutent.

Remarque 4.4.22. Si $\varphi \in B^0_{\log,0}(X)$, alors $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$.

Remarque 4.4.23. Si $i : X \hookrightarrow Y$ est une immersion fermée et $\varphi \in B^*_{\log}(Y)$, on déduit de la construction donnée au théorème (4.4.20) que :

$$i_*(i^*(\varphi)) = \varphi \cdot \delta_{i(X)}.$$

4.5. **Métriques admissibles.**

Dans cet article, on appellera *fibré en droites hermitien* sur X tout couple $\overline{L} = (L, \|.\|)$ formé d'un fibré en droites holomorphe L sur X et d'une métrique hermitienne *continue* sur L.

On considère $U \subset X$ un ouvert et s_1 et s_2 deux sections holomorphes de L ne s'annulant pas sur U. Il existe alors une fonction h holomorphe et ne s'annulant pas sur U telle que $s_2 = h \cdot s_1$. On en déduit que :

$$dd^c(-\log \|s_2\|^2) = -dd^c \log |h|^2 + dd^c(-\log \|s_1\|^2) = dd^c(-\log \|s_1\|^2).$$

Cette remarque justifie la définition suivante :

Définition 4.5.1. Soit $\overline{L} = (L, \|.\|)$ un fibré en droites hermitien sur X. On appelle *premier courant de Chern* de $\overline{L}$ et on note $c_1(\overline{L}) \in D^{1,1}(X)$ le courant défini localement par l'égalité :

$$c_1(\overline{L}) = dd^c(-\log \|s\|^2),$$

où s est une section locale holomorphe et ne s'annulant pas du fibré L.

Proposition 4.5.2. *Soient $\overline{L}_1$ et $\overline{L}_2$ des fibrés en droites hermitiens sur X. On a la relation :*

$$c_1(\overline{L}_1 \otimes \overline{L}_2) = c_1(\overline{L}_1) + c_1(\overline{L}_2).$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition (4.5.1).

L'énoncé suivant est une extension immédiate de la formule de Poincaré-Lelong classique au cas des fibrés hermitiens quelconques :

Théorème 4.5.3. (formule de Poincaré-Lelong généralisée). *Soit $\overline{L} = (L, \|.\|)$ un fibré en droites hermitien sur X et s une section méromorphe de L sur X non identiquement nulle sur chaque composante connexe de X. On a l'égalité entre courants :*

$$dd^c(-\log \|s\|^2) + \delta_{\operatorname{div} s} = c_1(\overline{L}).$$

Définition 4.5.4. Soit $\overline{L} = (L, \|.\|)$ un fibré en droites hermitien. La métrique $\|.\|$ est dite *positive* (resp. *strictement positive*) si et seulement si $c_1(L, \|.\|) \geqslant 0$ sur X (resp. pour toute forme de Kähler α sur X et tout ouvert U d'un recouvrement suffisamment fin de X, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $c_1(L, \|.\|) \geqslant \varepsilon\alpha$ sur U).

Définition 4.5.5. Soit L un fibré en droites holomorphe sur X. Une métrique $\|.\|$ continue et positive sur L est dite *admissible* s'il existe une suite $(\|.\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de métriques positives de classe C^∞ sur L, convergeant uniformément vers $\|.\|$ sur X.

On appelle *fibré admissible sur X* un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique admissible sur X.

Proposition 4.5.6. *Soient* $\overline{L}_1 = (L_1, \|.\|_1), \dots, \overline{L}_q = (L_q, \|.\|_q)$ *des fibrés en droites admissibles sur* X *et* $s_1, \dots, s_q$ *des sections méromorphes non identiquement nulles, sur chaque composante connexe de* X, *de* $L_1, \dots, L_q$ *respectivement, et telles que les cycles* $\operatorname{div} s_1, \dots, \operatorname{div} s_q$ *soient d'intersection propre (i.e. tels que* $\operatorname{codim}(\operatorname{div} s_{j_1} \cap \dots \cap \operatorname{div} s_{j_m}) \geqslant m$ *pour tout choix d'indices* $j_1 < \dots < j_m$ *dans* $\{1, \dots, q\}$*). Pour tout* $1 \leqslant i \leqslant q$, *le courant :*

$$(-\log \|s_i\|_i^2) c_1(\overline{L}_1) \cdots c_1(\overline{L}_{i-1}) \cdot \delta_{\operatorname{div} s_{i+1}} \cdots \delta_{\operatorname{div} s_q},$$

est bien défini et est un élément de $\overline{\overline{A}}_{\log}^{q-1,q-1}(X)$.

Démonstration. Le problème étant local, on se ramène par linéarité au cas où $s_1, \dots, s_q$ sont holomorphes au-dessus d'un ouvert U. La proposition est alors une conséquence directe de la formule de Poincaré-Lelong généralisée (4.5.3), du fait que pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, $c_1(\overline{L}_i) \in \overline{A}^{1,1}(X)$, et des définitions.

Proposition 4.5.7. *Soit* $\overline{L} = (L, \|.\|)$ *un fibré admissible sur* X *compacte. Il existe une suite croissante de métriques* C^∞ *positives convergeant uniformément vers* $\|.\|$.

Démonstration. Soit $(\|.\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de métriques C^∞ positives sur L convergeant uniformément vers $\|.\|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\varphi(n)$ le plus petit entier positif tel que :

$$\left| \frac{\|.\|_{\varphi(n)}}{\|.\|} - 1 \right| < \frac{1}{2^{n+2}}.$$

On choisit alors un réel λ_n dans $]0, 1[$ tel que :

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < \lambda_n \frac{\|.\|_{\varphi(n)}}{\|.\|} < \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

On a donc construit une application croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et une suite de réels $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $]0, 1[$ tendant vers 1 tels que la suite des métriques $\|.\|'_n = \lambda_n \|.\|_{\varphi(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$ soit croissante sur X. Comme $c_1(L, \|.\|'_n) = c_1(L, \|.\|_{\varphi(n)}) \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $(\|.\|'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\|.\|$ sur X, la proposition est démontrée.

Exemple 4.5.8.

- Toute métrique positive C^∞ est admissible (prendre $\|.\|_n = \|.\|$).
- Soient $\mathbb{P}(\Delta)$ une variété torique projective lisse et L un fibré en droites engendré par ses sections globales au-dessus de $\mathbb{P}(\Delta)$; la métrique canonique $\|.\|_{L,\infty}$ introduite à la proposition (3.4.1) est admissible (voir prop. 3.3.12).
- Plus généralement, soit L un fibré en droites holomorphe engendré par ses sections globales holomorphes au-dessus d'une variété X que l'on suppose compacte. Soit $\varphi : X \to X$ un morphisme surjectif tel que $\varphi^*(L) \overset{\Phi_L}{\simeq} L^k$, avec k un entier > 1; on munit L d'une métrique de Zhang $\|.\|_{\mathrm{Zh}}$ pour φ (i.e. une

métrique continue telle que $\varphi^*(L, \|.\|_{\mathrm{Zh}}) \overset{\Phi_L}{\simeq} (L, \|.\|_{\mathrm{Zh}})^k)$. Le fibré hermitien $(L, \|.\|_{\mathrm{Zh}})$ est admissible. (Prendre sur L une métrique $\|.\|_0$ positive C^∞, puis considérer la suite de métriques $(\|.\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence :

$$\|.\|_n = (\Phi_L^* \varphi^* \|.\|_{n-1})^{1/k}.$$

Les métriques $\|.\|_n$ sont positives et C^∞, et la suite $(\|.\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\|.\|_{\mathrm{Zh}}$ sur X d'après ([Zha], th. 2.2)).

4.6. Un théorème d'approximation globale.

Le théorème suivant montre que pour un fibré ample, les notions de métriques positives et de métriques admissibles sont équivalentes :

Théorème 4.6.1. *Soit X une variété complexe projective et L un fibré en droites ample sur X. Toute métrique positive sur L est admissible.*

Pour démontrer le théorème (4.6.1) on utilise une méthode de régularisation et de recollement essentiellement due à Richberg (cf. [Ri]). On s'inspire ici de la présentation donnée dans ([De3], §1.5.C).

Soit $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction C^∞ dont le support est inclus dans $[-1, 1]$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} \theta(t)\, dt = 1$ et $\int_{\mathbb{R}} t\theta(t)\, dt = 0$.

Lemme 4.6.2. *Pour tout $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_p) \in]0, +\infty[^p$, la fonction :*

$$M_\eta(t_1, \dots, t_p) = \int_{\mathbb{R}^p} \max\{t_1 + h_1, \dots, t_p + h_p\} \prod_{1\leqslant j\leqslant p} \theta\left(h_j/\eta_j\right) dh_1 \dots dh_p,$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. *$M_\eta(t_1, \dots, t_p)$ est croissante en chacune des variables et est convexe et C^∞ sur $\mathbb{R}^p$.*
2. *On a : $\max\{t_1, \dots, t_p\} \leqslant M_\eta(t_1, \dots, t_p) \leqslant \max\{t_1 + \eta_1, \dots, t_p + \eta_p\}$.*
3. *On a : $M_\eta(t_1, \dots, t_p) = M_{(\eta_1, \dots, \widehat{\eta_j}, \dots, t_p)}(t_1, \dots, \widehat{t_j}, \dots, t_p)$ dès que $t_j + \eta_j \leqslant \max_{k\neq j}\{t_k - \eta_k\}$.*
4. *$M_\eta(t_1 + a, \dots, t_p + a) = M_\eta(t_1, \dots, t_p) + a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.*
5. *Si $u_1, \dots, u_p$ sont plurisousharmoniques sur X et vérifient $dd^c u_j \geqslant \alpha$, où $\alpha \in A^{1,1}(X)$, alors $u = M_\eta(u_1, \dots, u_p)$ est plurisousharmonique et satisfait à l'inégalité $dd^c u \geqslant \alpha$.*

Démonstration. Voir ([De3], Lemme 1.5.16).

On peut passer à la démonstration du théorème :
On note $\|.\|$ la métrique positive considérée. Quitte à considérer une puissance tensorielle assez grande de L, on peut supposer L très ample.
On suppose dans un premier temps que la métrique $\|.\|$ est strictement positive. On note α une forme de Kähler sur X telle que $c_1(L, \|.\|) \geqslant \alpha$. On choisit $S = \{s_1, \dots, s_N\}$ une $\mathbb{Z}$-base des sections holomorphes de L au-dessus de X. Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ on note $u_i = -\log \|s_i\|^2 \in \mathrm{Psh}(X)$. Pour i et j éléments de

$\{1, \ldots, N\}$, on note $f_{i,j}$ la fonction méromorphe définie par $s_i = f_{i,j} s_j$. Pour tout couple (Ω, x) formé d'un point $x \in X$ et d'un ouvert $\Omega \subset X$ le contenant, on dit que Ω est une boule centrée en x de rayon r s'il existe une carte (V, φ) de X contenant Ω telle que $\varphi(x) = 0$ et que $\varphi(\Omega)$ soit une boule centrée en 0 de rayon r dans $\mathbb{C}^{\dim X}$.

On choisit $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert fini de X vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tout $\alpha \in A$, l'ouvert Ω_α est une boule centrée en un point $0_\alpha \in \Omega_\alpha$ de rayon r_α dans une carte $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$ de X.
2. Pour tout $\alpha \in A$, il existe $s_{i_\alpha} \in S$ qui ne s'annule pas sur un voisinage U_α de $\overline{\Omega_\alpha}$.

Comme L est très ample et donc engendré par ses sections globales, un tel recouvrement existe toujours.

On choisit λ un élément de $]0, 1[$. Pour tout $\alpha \in A$, on peut construire par régularisation (voir par exemple [De3], th. 1.5.5) une famille $\left(u_\alpha^{(\varepsilon)}\right)_{\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}}$ d'éléments de $\mathrm{Psh}(\Omega_\alpha) \cap C^\infty(\Omega_\alpha)$ telle que $u_\alpha^{(\varepsilon)}$ soit une fonction croissante de ε et que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \|u_{i_\alpha} - u_\alpha^{(\varepsilon)}\|_{\overline{\Omega}_\alpha, \infty} < \varepsilon.$$

Pour tout $\alpha \in A$, on choisit $\Omega''_\alpha \subset \Omega'_\alpha \subset \Omega_\alpha$ des boules concentriques de rayon respectif $r''_\alpha < r'_\alpha < r_\alpha$ dans la carte V_α, et telles que la famille $(\Omega''_\alpha)_{\alpha \in A}$ forme encore un recouvrement de X.

Soient ε_α et γ_α deux nombres réels strictement positifs que l'on fixera par la suite. Pour tout $z \in \overline{\Omega}_\alpha$, on pose (dans le système de coordonnées relatif à la carte $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$),

$$v_\alpha^{(\varepsilon_\alpha, \gamma_\alpha)}(z) = u_\alpha^{(\varepsilon_\alpha)}(z) + \gamma_\alpha({r'}^2_\alpha - |z|^2).$$

Pour $\varepsilon_\alpha < \varepsilon_{\alpha,0}$ et $\gamma_\alpha < \gamma_{\alpha,0}$ assez petits, on a $v_\alpha^{(\varepsilon_\alpha, \gamma_\alpha)} \leqslant u_{i_\alpha} + \lambda/2$ et $dd^c v_\alpha^{(\varepsilon_\alpha, \gamma_\alpha)} \geqslant (1 - \lambda)\alpha$ sur $\overline{\Omega}_\alpha$. On pose :

$$\eta_\alpha = \gamma_\alpha \min \left\{ {r'}^2_\alpha - {r''}^2_\alpha, (r^2_\alpha - {r'}^2_\alpha) \Big/ 2 \right\}.$$

On choisit tout d'abord $\gamma_\alpha < \gamma_{\alpha,0}$ tel que $\eta_\alpha < \lambda/2$, puis on choisit $\varepsilon_\alpha < \varepsilon_{\alpha,0}$ suffisamment petit pour que l'on ait :

$$u_{i_\alpha} \leqslant u_\alpha^{(\varepsilon_\alpha)} < u_{i_\alpha} + \eta_\alpha$$

sur $\overline{\Omega}_\alpha$. Comme $\gamma_\alpha \left({r'}^2_\alpha - |z|^2\right)$ est inférieur à $-2\eta_\alpha$ sur $\partial\Omega_\alpha$ et strictement supérieur à η_α sur $\overline{\Omega}''_\alpha$, on a : $v_\alpha^{(\varepsilon_\alpha, \gamma_\alpha)} < u_{i_\alpha} - \eta_\alpha$ sur $\partial\Omega_\alpha$ et $v_\alpha^{(\varepsilon_\alpha, \gamma_\alpha)} > u_{i_\alpha} + \eta_\alpha$ sur $\overline{\Omega}''_\alpha$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, on définit maintenant sur $\overline{\Omega}_\alpha$ la fonction :

$$\widetilde{u}_{i,\alpha} = v_\alpha^{(\varepsilon_\alpha, \gamma_\alpha)} + \left(-\log |f_{i,i_\alpha}|^2\right).$$

D'après ce qui précède, les fonctions $\widetilde{u}_{i,\alpha}$ vérifient les assertions suivantes :

1. $\widetilde{u}_{i,\alpha} \leqslant u_i + \lambda/2$ sur $\overline{\Omega}_\alpha$.
2. $\widetilde{u}_{i,\alpha} < u_i - \eta_\alpha$ sur $\partial\Omega_\alpha$.
3. $\widetilde{u}_{i,\alpha} > u_i + \eta_\alpha$ sur $\overline{\Omega}''_\alpha$.
4. $\widetilde{u}_{i,\alpha}$ est C^∞ sur $\overline{\Omega}_\alpha - \operatorname{div} s_i$, et on a : $dd^c\widetilde{u}_{i,\alpha} \geqslant (1-\lambda)\alpha$.

Grâce aux (2) et (3) ci-dessus et au (3) du lemme (4.6.2), on peut définir pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ la fonction :

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_i : X - \operatorname{div} s_i &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longrightarrow M_{(\eta_\alpha)}\left(\widetilde{u}_{i,\alpha}(z)\right). \end{aligned}$$

La fonction $\widetilde{u}_i$ est C^∞ d'après le (1) du lemme (4.6.2), et plurisousharmonique d'après le (5) de (4.6.2). De plus, elle vérifie l'encadrement :

$$u_i < u_i + \min_{\alpha\in A} \eta_\alpha < \widetilde{u}_i \leqslant u_i + \lambda. \tag{4.5}$$

Enfin, pour tout i et j éléments de $\{1, \dots, N\}$, on a :

$$\widetilde{u}_j = \widetilde{u}_i + \left(-\log|f_{j,i}|^2\right), \tag{4.6}$$

d'après le (4) du lemme (4.6.2).

Soit U un ouvert de X suffisamment petit pour qu'il existe $s_i \in S$ ne s'annulant pas sur U. Soit s une section régulière de L au-dessus de U. On pose :

$$\|s\|_\lambda = \left|\frac{s}{s_i}\right| e^{-\widetilde{u}_i/2}.$$

Grâce à l'égalité (4.6), la définition ci-dessus ne dépend pas du choix de s_i et définit par recollement une norme C^∞ positive sur L. De plus, on tire des définitions l'égalité :

$$\frac{\|s\|_\lambda}{\|s\|} = e^{\frac{u_i - \widetilde{u}_i}{2}},$$

ce qui donne l'encadrement :

$$e^{-\lambda/2} \leqslant \frac{\|s\|_\lambda}{\|s\|} \leqslant 1,$$

d'après l'encadrement (4.5).

En faisant tendre λ vers 0, on extrait de la famille $(\|.\|_\lambda)_{\lambda\in]0,1[}$ une suite croissante de métriques C^∞ positives convergeant uniformément vers $\|.\|$ sur X. Le théorème est donc démontré dans le cas où $\|.\|$ est strictement positive sur X.

On s'intéresse désormais au cas où $\|.\|$ est supposée simplement positive. Comme L est très ample, il existe sur L une métrique $\|.\|'$ qui est C^∞ et strictement positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la métrique $\|.\|_n = (\|.\|)^{1-1/n} \cdot (\|.\|')^{1/n}$ est strictement positive. D'après le résultat que l'on vient de démontrer, elle est donc approchable uniformément par des métriques C^∞ positives sur X. Comme $\|.\|_n$ tend uniformément vers $\|.\|$ quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que $\|.\|$ est approchable uniformément par des métriques C^∞ positives.

4.7. **Fibrés en droites intégrables.**
Suivant Zhang, on introduit à présent une nouvelle classe de fibrés en droites plus générale que celle des fibrés admissibles. On conserve ici la terminologie de Zhang (cf. [Zha], §1.5):

Définition 4.7.1. Soit $\overline{L} = (L, \|.\|)$ un fibré en droites hermitien sur X. Le fibré $\overline{L}$ est dit *intégrable sur* X ou plus simplement *intégrable* si et seulement s'il existe $\overline{E}_1$ et $\overline{E}_2$ deux fibrés admissibles sur X tels que:

$$\overline{L} = \overline{E}_1 \otimes (\overline{E}_2)^{-1}.$$

Exemple 4.7.2.
- Supposons X projective; tout fibré en droites $\overline{L} = (L, \|.\|)$ muni d'une métrique C^∞ est intégrable (considérer $\overline{L} \otimes \overline{H}^n$, où $\overline{H}$ est un fibré ample muni d'une métrique C^∞ strictement positive sur X).
- Soient $\mathbb{P}(\Delta)$ une variété torique projective lisse et $\overline{L}_\infty = (L, \|.\|_{L,\infty})$ un fibré en droites sur $\mathbb{P}(\Delta)$ muni de sa métrique canonique, $(L(\mathbb{C}), \|.\|_{L,\infty})$ est intégrable sur $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ (cf. prop. (3.3.8) et (3.3.12)).

Proposition 4.7.3. *Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés admissibles (resp. intégrables) sur X; leur produit tensoriel $\overline{E} \otimes \overline{F}$ est admissible (resp. intégrable) sur X.*

Démonstration. On suppose tout d'abord que $\overline{E} = (E, \|.\|_E)$ et $\overline{F} = (F, \|.\|_F)$ sont admissibles. On a $c_1(\overline{E} \otimes \overline{F}) = c_1(\overline{E}) + c_1(\overline{F}) \geqslant 0$ d'après (4.5.2). De plus, si $\left(\|.\|_E^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\|.\|_F^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de métriques C^∞ positives convergeant uniformément sur X vers $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ respectivement, alors la suite donnée par $\left(\|.\|_E^{(n)} \otimes \|.\|_F^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de métriques positives C^∞ convergeant uniformément sur X vers $\|.\|_E \otimes \|.\|_F$; on en déduit que $\overline{E} \otimes \overline{F}$ est admissible sur X.

On suppose maintenant que $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sont intégrables sur X. On peut donc trouver $\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$, $\overline{F}_1$ et $\overline{F}_2$ des fibrés admissibles sur X tels que $\overline{E} = \overline{E}_1 \otimes (\overline{E}_2)^{-1}$ et $\overline{F} = \overline{F}_1 \otimes (\overline{F}_2)^{-1}$. On tire:

$$\overline{E} \otimes \overline{F} = \left(\overline{E}_1 \otimes \overline{F}_1\right) \otimes \left(\overline{E}_2 \otimes \overline{F}_2\right)^{-1},$$

et comme $\overline{E}_1 \otimes \overline{F}_1$ et $\overline{E}_2 \otimes \overline{F}_2$ sont admissibles d'après ce qui précède, on en déduit que $\overline{E} \otimes \overline{F}$ est intégrable.

Proposition 4.7.4. *Soient X et Y deux variétés complexes et $f : Y \to X$ une application holomorphe. Si $\overline{L}$ est un fibré en droites admissible (resp. intégrable) sur X, alors $f^*(\overline{L})$ est admissible (resp. intégrable) sur Y.*

Démonstration. C'est une conséquence directe des définitions.

Proposition 4.7.5. *Soit $\overline{L}$ un fibré en droites hermitien intégrable sur X; on a :*

$$c_1(\overline{L}) \in C_0^{1,1}(X) \subset \overline{A}^{1,1}(X).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe des définitions (4.3.3), (4.4.12) et (4.7.1).

Théorème 4.7.6. *Supposons X projective. Soient $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_p$ des fibrés en droites hermitiens intégrables sur X et $\alpha \in \overline{\overline{A}}^*_{\log}(X)$ un courant fermé; on a l'égalité des classes :*

$$[c_1(\overline{L}_1) \cdots c_1(\overline{L}_p) \cdot \alpha] = c_1(L_1) \cdots c_1(L_p) \cdot [\alpha],$$

en cohomologie de de Rham des courants, où l'on a noté $[c_1(\overline{L}_1) \cdots c_1(\overline{L}_p) \cdot \alpha]$ et $[\alpha]$ les classes des courants $c_1(\overline{L}_1) \cdots c_1(\overline{L}_p) \cdot \alpha$ et α, et où $c_1(L_1), \dots, c_1(L_p)$ désignent les premières classes de Chern des fibrés $L_1, \dots, L_q$ respectivement.

Démonstration. Par polarisation, il suffit de démontrer le résultat pour $(L_1, \|.\|_1)$, $\dots, (L_p, \|.\|_p)$ des fibrés en droites admissibles. Soient $\left(\|.\|_1^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, \left(\|.\|_p^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites croissantes de métriques C^∞ positives sur $L_1, \dots, L_p$ convergeant vers les métriques $\|.\|_1, \dots, \|.\|_p$ respectivement. On a :

$$c_1\left(L_1, \|.\|_1^{(n)}\right) \cdots c_1\left(L_p, \|.\|_p^{(n)}\right) \cdot \alpha \quad \text{tend vers} \quad c_1(\overline{L}_1) \cdots c_1(\overline{L}_p) \cdot \alpha$$

au sens de la topologie faible des courants, et donc :

$$[c_1\left(L_1, \|.\|_1^{(n)}\right) \cdots c_1\left(L_p, \|.\|_p^{(n)}\right) \cdot \alpha] \quad \text{tend vers} \quad [c_1(\overline{L}_1) \cdots c_1(\overline{L}_p) \cdot \alpha]$$

pour la topologie naturelle sur $H^*_{\mathrm{DR}}(X)$. On déduit le résultat de l'égalité :

$$[c_1\left(L_1, \|.\|_1^{(n)}\right) \cdots c_1\left(L_p, \|.\|_p^{(n)}\right) \cdot \alpha] = c_1(L_1) \cdots c_1(L_p) \cdot [\alpha]$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Groupes de Chow arithmétiques généralisés

5.1. Théorie classique de Gillet-Soulé.

On suit ici ([GS1] et [BGS], §2.1). Soit K un corps de nombre, $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entier et $S = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K)$ le schéma associé. Pour tout plongement $\sigma : K \to \mathbb{C}$ et pour tout schéma X sur $\operatorname{Spec} K$ ou sur S, on note X_σ le schéma sur $\mathbb{C}$ déduit de X par le changements de base $\operatorname{Spec} \mathbb{C} \to \operatorname{Spec} K$. De même, si $f : X \to Y$ est un morphisme de schémas sur K, on note $f_\sigma : X_\sigma \to Y_\sigma$ le morphisme de schémas sur $\mathbb{C}$ induit par changement de base.

Une *variété arithmétique* est par définition un schéma $\pi : X \to S$, plat, projectif, intègre et *régulier* sur S. En particulier la fibre générique $X_K = X \times_S \operatorname{Spec} K$ est lisse. On note $d = \dim_K X_K$.

Pour toute variété arithmétique X et tout entier p positif, on note $Z_p(X)$ (resp. $Z^p(X)$) le groupe des cycles sur X de dimension p (resp. codimension p). Pour un tel cycle Z, on note $|Z| \subset X$ le support de Z.

On note $X(\mathbb{C})$ les points complexes du schéma X; c'est la réunion disjointe $\coprod_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} X_\sigma(\mathbb{C})$. Soit $F_\infty : X(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$ l'involution antiholomorphe provenant de l'action de la conjugaison complexe sur les coordonnées des points complexes de X. On note $A^{p,p}(X_\mathbb{R})$ (resp. $D^{p,p}(X_\mathbb{R})$) l'ensemble des formes réelles $\alpha \in A^{p,p}(X(\mathbb{C}))$ (resp. des courants réels $\alpha \in D^{p,p}(X(\mathbb{C}))$) tels que $F_\infty^*(\alpha) = (-1)^p \alpha$. On note $\widetilde{A}^{p,p}(X_\mathbb{R})$ (resp. $\widetilde{D}^{p,p}(X_\mathbb{R})$) le quotient $A^{p,p}(X_\mathbb{R}) / (\operatorname{Im} \partial + \operatorname{Im} \overline{\partial})$ (resp. le quotient $D^{p,p}(X_\mathbb{R}) / (\operatorname{Im} \partial + \operatorname{Im} \overline{\partial})$). On note également $Z^{p,p}(X_\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}\{d : A^{p,p}(X_\mathbb{R}) \to A^{2p+1}(X(\mathbb{C}))\} \subset A^{p,p}(X_\mathbb{R})$.

Tout cycle irréductible $Z \in Z^p(X)$ définit un courant $\delta_Z \in D^{p,p}(X_\mathbb{R})$ par intégration sur l'ensemble de ses points complexes. Si $Z = \sum_{i \in I} n_i Z_i$ où Z_i est irréductible, on pose :

$$\delta_Z = \sum_{i \in I} n_i \delta_{Z_i(\mathbb{C})}.$$

Un *courant de Green* pour Z est un courant $g \in D^{p-1,p-1}(X_\mathbb{R})$ tel que $dd^c g + \delta_Z$ est une forme C^∞.

Soit X une variété arithmétique. On note $\widehat{Z}^p(X)$ le groupe formé des couples de la forme (Z, g), où $Z \in Z^p(X)$ et g est un courant de Green pour Z, muni de la loi d'addition composante par composante. Soit $\widehat{R}^p(X) \subset \widehat{Z}^p(X)$ le sous-groupe engendré par les paires de la forme $(0, \partial u + \overline{\partial} v)$ et $(\operatorname{div}(f), -\log |f|^2)$, où $f \in k(Y)^*$ est une fonction rationnelle non identiquement nulle sur un sous schéma intègre $Y \subset X$ de codimension $p-1$, et où pour simplifier les notations on a écrit $-\log |f|^2$ pour désigner $[-\log |f|^2]_{Y(\mathbb{C})}$, le courant sur $X(\mathbb{C})$ dont l'action sur les formes différentielles est obtenue par restriction à la partie lisse de $Y(\mathbb{C})$ puis l'intégration contre la fonction $-\log |f|^2$.

Le *groupe de Chow arithmétique de codimension p de X* est défini par :

$$\widehat{CH}^p(X) = \widehat{Z}^p(X) \Big/ \widehat{R}^p(X).$$

On note $R^p_{\text{fin}}(X)_\mathbb{Q}$ l'espace des $\mathbb{Q}$-cycles de la forme $\sum_i q_i \operatorname{div}(f_i)$, où $q_i \in \mathbb{Q}$ et $f_i \in k(Y_i)^*$ est une fonction rationnelle non identiquement nulle sur Y_i un sous-schéma intègre de codimension $p-1$ contenu dans une fibre fermée du morphisme $\pi : X \to S$. On remarque que pour tout $R \in R^p_{\text{fin}}(X)_\mathbb{Q}$, la classe de $(R, 0)$ dans $\widehat{CH}^p(X)_\mathbb{Q}$ est nulle.

Une K_1-*chaine* de codimension p dans X est un élément du groupe $\bigoplus_{x \in X^{(p-1)}} k(x)^*$, où $X^{(p-1)}$ désigne l'ensemble des sous-schémas fermés intègres de codimension $p-1$ dans X. Si $f = \sum_{i \in I} [f_{W_i}]$, où $W_i \in X^{(p-1)}$ et $f_{W_i} \in k(W_i)^*$, est une K_1-chaine de codimension p, on pose :

$$\operatorname{div} f = \sum_{i\in I} \operatorname{div}(f_{W_i}) \in Z^p(X),$$
$$-\log|f|^2 = \sum_{i\in I} [-\log|f_{W_i}|^2]_{W_i(\mathbb{C})} \in D^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}}),$$
$$\widehat{\operatorname{div}} f = (\operatorname{div} f, -\log|f|^2) \in \widehat{Z}^p(X);$$

et on appelle *support* de f la fermeture de la réunion des W_i. Si $\mathscr{Z} = \{Z_1, \dots, Z_n\}$ est une famille de sous-schémas fermés intègres de X, on dit que la K_1-chaine $f = \sum_{i\in I}[f_{W_i}]$ et la famille $\mathscr{Z}$ s'intersectent *presque proprement* si pour tout W_i et tout $Z_j \in \mathscr{Z}$, les cycles $\operatorname{div}(W_i)$ et Z_j s'intersectent proprement.

On dispose de trois morphismes de groupes définis comme suit :

$$\begin{aligned} \zeta : \widehat{CH}^p(X) &\longrightarrow CH^p(X) \\ [(Z,g)] &\longmapsto [Z], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega : \widehat{CH}^p(X) &\longrightarrow A^{p,p}(X_{\mathbb{R}}) \\ [(Z,g)] &\longmapsto dd^c g + \delta_Z, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a : \widetilde{A}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}}) &\longrightarrow \widehat{CH}^p(X) \\ \eta &\longmapsto [(0,\eta)]. \end{aligned}$$

Ces morphismes donnent lieu à deux suites exactes :

$$CH^{p,p-1}(X) \xrightarrow{\rho} \widetilde{A}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{a} \widehat{CH}^p(X) \xrightarrow{\zeta} CH^p(X) \longrightarrow 0, \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} CH^{p,p-1}(X) &\xrightarrow{\rho} H^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{a} \widehat{CH}^p(X) \\ &\xrightarrow{(\zeta,-\omega)} CH^p(X) \oplus Z^{p,p}(X_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{cl+[.]} H^{p,p}(X_{\mathbb{R}}) \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{5.8}$$

où $CH^{p,p-1}(X)$ est un groupe défini dans ([Gi], §8), où ρ est -2 fois le régulateur de Beilinson (cf. [GS1], §3.3.5 et 3.5), où $[.]$ est le morphisme "classe en cohomologie de De Rham" et où cl est l'application cycle.

Tout morphisme de schémas $f : X \to Y$ entre variétés arithmétiques induit un morphisme de groupes :

$$f^* : \widehat{CH}^p(Y) \longrightarrow \widehat{CH}^p(X).$$

De plus, on dispose d'un produit :

$$\widehat{CH}^p(X) \otimes \widehat{CH}^q(X) \longrightarrow \widehat{CH}^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}},$$

que l'on peut en fait définir à valeur dans $\widehat{CH}^{p+q}(X)$ quand X est lisse sur S. Les morphismes ζ et ω définis ci-dessus sont des morphismes d'anneaux. On a également $f^*(x \cdot y) = f^*(x) \cdot f^*(y)$.

Enfin la formule suivante est utile dans la pratique. Soient $\eta \in \widetilde{A}^*(X_\mathbb{R})$ et $x \in \widehat{CH}^*(X)$, on a :

$$a(\eta) \cdot x = a(\eta\,\omega(x)).$$

Pour plus de détails sur ces définitions et cette théorie, voir [GS1].

5.2. **Fibrés en droites intégrables sur une variété arithmétique.**

Soit $\pi : X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ une variété arithmétique de dimension relative d et p un entier positif. On note $\overline{A}^{p,p}(X_\mathbb{R})$ (resp. $\overline{\overline{A}}^{p,p}(X_\mathbb{R})$, resp. $\overline{\overline{A}}^{p,p}_{\log}(X_\mathbb{R})$) l'intersection $\overline{A}^{p,p}(X(\mathbb{C})) \cap D^{p,p}(X_\mathbb{R})$ (resp. l'intersection $\overline{\overline{A}}^{p,p}(X(\mathbb{C})) \cap D^{p,p}(X_\mathbb{R})$, resp. l'intersection $\overline{\overline{A}}^{p,p}_{\log}(X(\mathbb{C})) \cap D^{p,p}(X_\mathbb{R})$).

Un *fibré en droites hermitiens sur* X est un couple $\overline{E} = (E, \|.\|)$ formé d'un fibré en droites E sur X et d'une métrique continue $\|.\|$ sur E invariante sous l'action de F_∞. Un tel fibré est dit *admissible* lorsque le fibré holomorphe hermitien $(E_\mathbb{C}, \|.\|)$ est admissible au sens de (4.5.5).

Un fibré en droites hermitien $\overline{L}$ est dit *intégrable* si et seulement si il existe $\overline{E}_1$ et $\overline{E}_2$ deux fibrés en droites hermitiens admissibles sur X tels que :

$$\overline{L} = \overline{E}_1 \otimes \left(\overline{E}_2\right)^{-1}.$$

Remarque 5.2.1. Si $\overline{L} = (L, \|.\|)$ est un fibré en droites hermitiens intégrable sur X, alors le fibré holomorphe hermitien $(L(\mathbb{C}), \|.\|)$ est intégrable sur $X(\mathbb{C})$ au sens de (4.7.1).

Exemple 5.2.2.

1. Soit $\overline{L} = (L, \|.\|)$ un fibré en droites hermitien sur X; si $\|.\|$ est C^∞ sur $X(\mathbb{C})$, alors $\overline{L}$ est intégrable sur X. (Écrire $\overline{L} \simeq (\overline{L} \otimes \overline{H}^n) \otimes (\overline{H}^n)^*$, avec $\overline{H}$ ample muni d'une métrique C^∞ strictement positive sur $X(\mathbb{C})$ et $n \gg 0$).
2. Soit L un fibré en droites ample muni d'une métrique $\|.\|$ continue et positive; le fibré hermitien $(L, \|.\|)$ est admissible sur X d'après (4.6.1).
3. Soient $\mathbb{P}(\Delta)$ une variété torique projective lisse et $\overline{L}_\infty$ un fibré en droites sur $\mathbb{P}(\Delta)$ muni de sa métrique canonique; $\overline{L}_\infty$ est intégrable sur $\mathbb{P}(\Delta)$ d'après (4.7.2).

On appelle *forme différentielle généralisée globale de type* (p, p) tout élément $\alpha \in \overline{A}^{p,p}(X_\mathbb{R})$ pouvant s'écrire sur $X(\mathbb{C})$ sous la forme :

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \omega_i c_1(\overline{L}_{i,1}) \ldots c_1(\overline{L}_{i,q_i})$$

où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\omega_i \in A^*(X_{\mathbb{R}})$ et $\overline{L}_{i,1}, \ldots, \overline{L}_{i,q_i}$ sont des fibrés en droites intégrables sur X. On note $\overline{A}_{\mathrm{g}}^{p,p}(X_{\mathbb{R}}) \subset \overline{A}^{p,p}(X_{\mathbb{R}})$ l'ensemble des formes différentielles généralisées globales de type (p,p) sur X. C'est une $\mathbb{R}$-algèbre.

On note $\widetilde{\overline{A}}_{\mathrm{g}}^{p,p}(X_{\mathbb{R}})$ l'image de $\overline{A}_{\mathrm{g}}^{p,p}(X_{\mathbb{R}})$ dans $\widetilde{D}^{p,p}(X_{\mathbb{R}})$. On note également $\overline{A}_{\mathrm{g}}^{*}(X_{\mathbb{R}}) = \oplus_{p\geqslant 0}\overline{A}_{\mathrm{g}}^{p,p}(X_{\mathbb{R}})$ et $\widetilde{\overline{A}}_{\mathrm{g}}^{*}(X_{\mathbb{R}}) = \oplus_{p\geqslant 0}\widetilde{\overline{A}}_{\mathrm{g}}^{p,p}(X_{\mathbb{R}})$.

Remarque 5.2.3. L'espace $\overline{A}_{\mathrm{g}}^{*}(X_{\mathbb{R}})$ est stable pour le produit défini au (4.3.6). La structure d'algèbre sur $\overline{A}^{*}(X(\mathbb{C}))$ induit donc une structure d'algèbre associative commutative unifère et graduée sur $\overline{A}_{\mathrm{g}}^{*}(X_{\mathbb{R}})$.

Proposition 5.2.4. *Si $\overline{E}$ est un fibré en droites intégrable, alors $(\overline{E})^{-1}$ est intégrable.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des définitions.

Proposition 5.2.5. *Soient $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés en droites admissibles (resp. intégrables); leur produit tensoriel $\overline{E}\otimes\overline{F}$ est admissible (resp. intégrable).*

Démonstration. On suppose tout d'abord que $\overline{E} = (E, \|.\|_E)$ et $\overline{F} = (F, \|.\|_F)$ sont admissibles. Le fibré holomorphe hermitien $((E\otimes F)(\mathbb{C}), \|.\|_E \otimes \|.\|_F)$ est admissible sur $X(\mathbb{C})$ d'après (4.7.3), et donc $\overline{E}\otimes\overline{F}$ est admissible.

On suppose maintenant que $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sont intégrables. On peut donc trouver $\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$, $\overline{F}_1$ et $\overline{F}_2$ des fibrés admissibles sur X tels que $\overline{E} \simeq \overline{E}_1 \otimes (\overline{E}_2)^{-1}$ et $\overline{F} \simeq \overline{F}_1 \otimes (\overline{F}_2)^{-1}$; et donc $\overline{E}\otimes\overline{F} \simeq (\overline{E}_1\otimes\overline{F}_1)\otimes(\overline{E}_2\otimes\overline{F}_2)^{-1}$, et comme $\overline{E}_1\otimes\overline{F}_1$ et $\overline{E}_2\otimes\overline{F}_2$ sont admissibles d'après ce qui précède, on en déduit que $\overline{E}\otimes\overline{F}$ est intégrable.

Les deux propositions précédentes nous autorisent à poser la définition suivante :

Définition 5.2.6. Soit X une variété arithmétique. On note $\widehat{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{int}}(X)$ le groupe formé des classes d'isomorphie isométrique des fibrés hermitiens intégrables sur X, et dont la structure de groupe est donnée par le produit tensoriel.

Proposition 5.2.7. *Soient X et Y deux variétés arithmétiques et $f : Y \to X$ un morphisme. Si $\overline{L}$ est un fibré en droites admissible (resp. intégrable) sur X, alors $f^*(\overline{L})$ est admissible (resp. intégrable) sur Y.*

L'application $f^* : \overline{L} \mapsto f^*(\overline{L})$ définit un morphisme de groupes :

$$f^* : \widehat{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{int}}(X) \longrightarrow \widehat{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{int}}(Y).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de (4.7.4) et des définitions.

5.3. Groupes de Chow arithmétiques généralisés.

Pour tout entier $p \geqslant 0$, on pose $\widehat{Z}^p_{\mathrm{gen}}(X) = Z^p(X) \oplus D^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$; du fait de l'inclusion $\widehat{R}^p(X) \subset \widehat{Z}^p_{\mathrm{gen}}(X)$, on peut définir le groupe quotient :

$$\widetilde{CH}^p(X) = \widehat{Z}^p_{\mathrm{gen}}(X) \Big/ \widehat{R}^p(X).$$

On a immédiatement l'inclusion $\widehat{CH}^p(X) \subset \widetilde{CH}^p(X)$. On dispose des morphismes suivants :

$$\begin{aligned} \zeta : \widetilde{CH}^p(X) &\longrightarrow CH^p(X) \\ [(Z,g)] &\longmapsto [Z], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega : \widetilde{CH}^p(X) &\longrightarrow D^{p,p}(X_{\mathbb{R}}) \\ [(Z,g)] &\longmapsto dd^c g + \delta_Z, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a : \overline{\widetilde{A}}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}}) &\longrightarrow \widetilde{CH}^p(X) \\ \eta &\longmapsto [(0,\eta)], \end{aligned}$$

dont les restrictions à $\widehat{CH}^p(X)$ et $\widetilde{A}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$ respectivement coïncident avec ceux définis au (5.1).

Définition 5.3.1. Soit $\overline{L} = (L, \|.\|)$ un fibré en droites hermitien intégrable sur X. On appelle *première classe de Chern arithmétique de* $\overline{L}$ et on note $\hat{c}_1(\overline{L})$ la classe dans $\widetilde{CH}^1(X)$ de :

$$\widehat{\mathrm{div}}\, s := (\mathrm{div}\, s, -\log \|s\|^2),$$

où s est une section rationnelle non nulle de L au-dessus de X.

Remarque 5.3.2. La classe $\hat{c}_1(\overline{L})$ est bien définie et ne dépend pas du choix de s. En effet, si s' est une section rationnelle de L au-dessus de X, il existe f une fonction rationnelle sur X telle que $s' = f \cdot s$, et l'on a :

$$\widehat{\mathrm{div}}\, s' = (f, -\log |f|^2) + \widehat{\mathrm{div}}\, s.$$

Proposition 5.3.3. *Soit $\overline{L} = (L, \|.\|)$ un fibré en droites intégrable sur X, on a :*

$$\begin{aligned} \omega(\hat{c}_1(\overline{L})) &= c_1(\overline{L}) \in \overline{A}^{1,1}_{\mathrm{g}}(X_{\mathbb{R}}) \cap C^{1,1}_0(X_{\mathbb{R}}) \\ \textit{et} \quad \zeta(\hat{c}_1(\overline{L})) &= c_1(L) \in CH^1(X). \end{aligned}$$

Démonstration. La première égalité est une conséquence directe de la formule de Poincaré-Lelong généralisée (4.5.3); la seconde égalité résulte immédiatement des définitions.

Soient p et q deux entiers positifs (éventuellement nuls), et soient $Z \in Z^p(X)$ un cycle de codimension p, $g \in D^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$ un courant de Green pour Z et $\overline{L}_1 = (L_1, \|.\|_1), \ldots, \overline{L}_q = (L_q, \|.\|_q)$ des fibrés en droites admissibles sur X. On choisit $s_1, \ldots, s_q$ des sections rationnelles non identiquement nulles sur X de $L_1, \ldots, L_q$ respectivement, telles que les cycles $Y_0 = Z$, $Y_1 = \operatorname{div} s_1, \ldots, Y_q = \operatorname{div} s_q$ soient d'intersection propre (i.e. tels que $\operatorname{codim}(Y_{j_1} \cap \cdots \cap Y_{j_m}) \geqslant \sum_{i=1}^m \operatorname{codim} Y_{j_i}$ pour tout choix d'indices $j_1 < \ldots < j_m$ dans $\{0, \ldots, q\}$). On pose $\tilde{\omega} = dd^c g + \delta_Z$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, on note également $\delta_i = \delta_{\operatorname{div} s_i} \in \overline{\overline{A}}^{1,1}(X_{\mathbb{R}})$, $g_i = -\log \|s_i\|_i^2$ et $\omega_i = c_1(\overline{L}_i) \in \overline{A}^{1,1}(X_{\mathbb{R}})$. On définit à partir de ces données un élément de $D^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$ que l'on notera $\{g * (g_1, s_1) * \cdots * (g_q, s_q)\}$, par l'égalité :

$$\begin{aligned}\{g * (g_1, s_1) * \cdots * (g_q, s_q)\} &= g \cdot \delta_{\operatorname{div} s_1 \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q} + g_1 \cdot \tilde{\omega} \delta_2 \ldots \delta_q + \ldots \\ &+ g_i \cdot \tilde{\omega}\omega_1 \ldots \omega_{i-1}\delta_{i+1} \ldots \delta_q + \cdots + g_{q-1} \cdot \tilde{\omega}\omega_1 \ldots \omega_{q-2}\delta_q + g_q \cdot \tilde{\omega}\omega_1 \ldots \omega_{q-1}.\end{aligned}$$

On remarque que cette expression a bien un sens; en effet le premier terme $g \cdot \delta_{\operatorname{div} s_1 \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q}$ est bien défini (cf. [GS1], 2.1.3.2), et les autres le sont grâce à la proposition (4.5.6).

Proposition 5.3.4. *Soient* $\left(\|.\|_1^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \ldots, \left(\|.\|_q^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *des suites croissantes de métriques positives* C^∞ *sur* $L_1, \ldots, L_q$ *convergeant vers* $\|.\|_1, \ldots, \|.\|_q$ *respectivement. Si l'on note* $g_1^{(n)} = -\log\left(\|s_1\|_1^{(n)}\right)^2, \ldots, g_q^{(n)} = -\log\left(\|s_q\|_q^{(n)}\right)^2$, *alors* $\{g * (g_1^{(n)}, s_1) * \cdots * (g_q^{(n)}, s_q)\}$ *tend vers* $\{g * (g_1, s_1) * \cdots * (g_q, s_q)\}$ *dans* $D^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$*, au sens de la topologie faible, quand* n *tend vers* $+\infty$*.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de (4.2.9).

Proposition 5.3.5. *Supposons que, pour un certain* $k \in \{1, \ldots, q\}$*, les métriques* $\|.\|_1, \ldots, \|.\|_k$ *soient* C^∞ *sur* $X(\mathbb{C})$*. Les courants* $g_1, \ldots, g_k$ *sont alors des courants de Green pour les cycles* $\operatorname{div} s_1, \ldots, \operatorname{div} s_k$ *et on peut former le produit :*

$$(g * g_1 * \cdots * g_k) := g * (g_1 * (g_2 * (\cdots * (g_k) \cdots))),$$

pris au sens de Gillet-Soulé (cf. [GS1]*, §2.1), qui est un courant de Green pour le cycle intersection* $Y_0 \cap Y_1 \cap \cdots \cap Y_q$*. On a alors l'égalité dans* $\widetilde{D}^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$

$$\{(g * g_1 * \cdots * g_k) * (g_{k+1}, s_{k+1}) * \cdots * (g_q, s_q)\} = \{g * (g_1, s_1) * \cdots * (g_q, s_q)\}.$$

Démonstration. On montre tout d'abord le résultat quand $k = q$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, le produit $g_i * \cdots * g_q$ est un courant de Green pour $\operatorname{div} s_i \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q$ et on a $\omega(\operatorname{div} s_i \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q, g_i * \cdots * g_q) = \omega_i \ldots \omega_q$. On a dans $\widetilde{D}^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$:

$$\begin{aligned}g * g_1 * \cdots * g_q &= g * (g_1 * (\cdots * (g_{q-1} * g_q) \ldots)) \\ &= g \cdot \delta_{\operatorname{div} s_1 \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q} + \tilde{\omega}(g_1 * (\cdots * (g_{q-1} * g_q) \ldots)) \\ = g \cdot \delta_{\operatorname{div} s_1 \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q} & \\ &+ \tilde{\omega}(g_1 \cdot \delta_{\operatorname{div} s_2 \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q} + \omega_1 g_2 \cdot \delta_{\operatorname{div} s_3 \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q} + \cdots + \omega_1 \ldots \omega_{q-1} g_q).\end{aligned}$$

Il suffit alors de prouver que pour tout $1 \leqslant i \leqslant (q-1)$, on a dans $D^{q-i,q-i}(X_{\mathbb{R}})$ l'égalité :

$$g_i \cdot \delta_{i+1} \ldots \delta_q = g_i \cdot \delta_{\operatorname{div} s_{i+1} \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q}, \tag{5.9}$$

où le premier produit est pris au sens de (4.3.7) et le second au sens de Gillet-Soulé (cf. [GS1], 2.1.3.2). Le problème étant local, on peut supposer que le diviseur $\operatorname{div} s_i$ est effectif. D'après ([De3], prop. 3.4.12), on a :

$$\delta_{i+1} \ldots \delta_q = \delta_{\operatorname{div} s_{i+1} \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $g_i^{(t)} = \max(g_i, t)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $x \mapsto g_i^{(t)}(x)$ est plurisousharmonique et bornée sur $X(\mathbb{C})$; on a donc :

$$g_i^{(t)} \cdot \delta_{i+1} \ldots \delta_q = g_i^{(t)} \cdot \delta_{\operatorname{div} s_{i+1} \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q}.$$

D'après (4.2.9), le courant $g_i^{(t)} \cdot \delta_{i+1} \ldots \delta_q$ tend vers $g_i \cdot \delta_{i+1} \ldots \delta_q$ au sens de la topologie faible quand t tend vers $-\infty$.

Pour finir de montrer (5.9), il suffit de prouver que $g_i^{(t)} \cdot \delta_{\operatorname{div} s_{i+1} \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q}$ tend faiblement vers $g_i \cdot \delta_{\operatorname{div} s_{i+1} \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q}$ quand t tend vers $-\infty$. Pour cela écrivons :

$$(\operatorname{div} s_{i+1})_{\mathbb{C}} \cap \cdots \cap (\operatorname{div} s_q)_{\mathbb{C}} = \sum_k n_k \, C_k,$$

où les C_k sont les composantes irréductibles de $(\operatorname{div} s_{i+1})_{\mathbb{C}} \cap \cdots \cap (\operatorname{div} s_q)_{\mathbb{C}}$.

Nous devons vérifier que pour chaque k, le courant $g_i^{(t)} \cdot \delta_{C_k}$ tend faiblement vers $g_i \cdot \delta_{C_k}$, où le produit $g_i \cdot \delta_{C_k}$ est défini comme dans Gillet-Soulé ([GS1], §2.1.3.2). Soit $\pi : \widetilde{C}_k \to C_k$ une résolution des singularités de C_k. Par définition, on a :

$$\delta_{C_k} = \pi_* 1,$$

et donc :

$$g_i^{(t)} \cdot \delta_{C_k} = \pi_*(\pi^* g_i^{(t)}),$$

car δ_{C_k} est un courant d'ordre 0 et $g_i^{(t)}$ est bornée. On a par ailleurs (cf. [GS1], §2.1.3.2) :

$$g_i \cdot \delta_{C_k} = \pi_*(\pi^* g_i).$$

Enfin $\pi^* g_i$ est plurisousharmonique et $\pi^* g_i^{(t)} = \max(\pi^* g_i, t)$ converge faiblement vers $\pi^* g_i$ quand t tend vers $-\infty$, d'où le résultat par continuité faible de π_*.

On s'intéresse maintenant au cas général : Soient $\left(\|.\|_{k+1}^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \ldots, \left(\|.\|_q^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites croissantes de métriques positives C^∞ convergent uniformément sur $X(\mathbb{C})$ vers $\|.\|_{k+1}, \ldots, \|.\|_q$ respectivement. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_{k+1}^{(n)}, \ldots, g_q^{(n)}$ les courants $-\log\left(\|s_{k+1}\|_{k+1}^{(n)}\right)^2, \ldots, -\log\left(\|s_q\|_q^{(n)}\right)^2$. D'après ce qui précède, on a dans $\widetilde{D}^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$ les égalités :

$$\begin{aligned}\{(g * g_1 * \cdots * g_k) * (g_{k+1}^{(n)}, s_k) * \cdots * (g_q^{(n)}, s_q)\} \\ &= (g * g_1 * \ldots g_k) * g_{k+1}^{(n)} * \cdots * g_q^{(n)} \\ &= g * g_1 * \ldots g_k * g_{k+1}^{(n)} * \ldots g_q^{(n)} \\ &= \{g * (g_1, s_1) * \cdots * (g_k, s_k) * (g_{k+1}^{(n)}, s_{k+1}) * \cdots * (g_q^{(n)}, s_q)\}.\end{aligned}$$

Comme $X(\mathbb{C})$ est projective, les sous-espaces $\operatorname{Im}\partial$ et $\operatorname{Im}\overline{\partial}$ sont fermés (puisque les morphismes ∂ et $\overline{\partial}$ sont continues et que leurs groupes de cohomologie sont de dimension finie). On en déduit que $\widetilde{D}^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$, muni de la topologie quotient de la topologie faible sur $D^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$, est séparé.

Pour établir l'égalité recherchée :

$$\{(g * g_1 * \cdots * g_k) * (g_{k+1}, s_{k+1}) * \cdots * (g_q, s_q)] = [g * (g_1, s_1) * \cdots * (g_q, s_q)\},$$

dans $\widetilde{D}^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$, il suffit d'observer que d'après la proposition (5.3.4) on a, pour cette topologie, les limites :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \{(g * g_1 * \cdots * g_k) * (g_{k+1}^{(n)}, s_{k+1}) * \cdots * (g_q^{(n)}, s_q)\} \\ = \{(g * g_1 * \cdots * g_k) * (g_{k+1}, s_{k+1}) * \cdots * (g_q, s_q)\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \{g * (g_1, s_1) * \cdots * (g_k, s_k) * (g_{k+1}^{(n)}, s_{k+1}) * \cdots * (g_q^{(n)}, s_q)\} \\ = \{g * (g_1, s_1) * \cdots * (g_q, s_q)\}.\end{aligned}$$

On en déduit aussitôt la proposition suivante :

Proposition 5.3.6. *La classe du courant* $\{g * (g_1, s_1) * \cdots * (g_q, s_q)\}$ *dans* $\widetilde{D}^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$ *est indépendante de l'ordre des* $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q$.

Démonstration. Soit σ une permutation de $\{1, \ldots, q\}$. Reprenant les notations de la proposition (5.3.4), on sait que :

$$\begin{aligned}\delta_n := \{g * (g_1^{(n)}, s_1) * \cdots * (g_q^{(n)}, s_q)\} \\ - \{g * (g_{\sigma(1)}^{(n)}, s_{\sigma(1)}) * \cdots * (g_{\sigma(q)}^{(n)}, s_{\sigma(q)})\} \in \left(\operatorname{Im}\partial + \operatorname{Im}\overline{\partial}\right).\end{aligned}$$

De plus, δ_n tend vers $\{g*(g_1, s_1)*\cdots*(g_q, s_q)\} - \{g*(g_{\sigma(1)}, s_{\sigma(1)})*\cdots*(g_{\sigma(q)}, s_{\sigma(q)})\}$ au sens de la topologie faible quand n tend vers $+\infty$ d'après (5.3.4). La proposition découle alors immédiatement du fait que $\operatorname{Im}\partial + \operatorname{Im}\overline{\partial}$ est fermé dans $D^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$ puisque $X(\mathbb{C})$ est projective.

On définit un élément de $\widetilde{CH}^{p+q}(X)$ que l'on note provisoirement $[(Z,g)\cdot\hat{c}_1(\overline{L}_1,s_1)\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_q,s_q)]$ par l'égalité :

$$\begin{aligned}(5.10)\quad &[(Z,g)\cdot\hat{c}_1(\overline{L}_1,s_1)\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_q,s_q)]\\ &\qquad = [(Z\cdot\operatorname{div}s_1\cdots\operatorname{div}s_q,\{g*(g_1,s_1)*\cdots*(g_q,s_q)\})].\end{aligned}$$

Proposition 5.3.7. *La classe de $[(Z,g)\cdot\hat{c}_1(\overline{L}_1,s_1)\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_q,s_q)]$ dans $\widetilde{CH}^{p+q}(X)$ ne dépend que de la classe de (Z,g) dans $\widehat{CH}^p(X)$ et des classes d'isomorphie isométrique des fibrés admissibles $\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q$; elle ne dépend pas de l'ordre des fibrés $\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q$.*

Démonstration. Le fait que la classe de $[(Z,g)\cdot\hat{c}_1(\overline{L}_1,s_1)\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_q,s_q)]$ ne dépende pas de l'ordre des fibrés $\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q$ est une simple conséquence de (5.3.6).

On s'intéresse maintenant à la première partie de l'énoncé. Il suffit, pour prouver le résultat recherché, de montrer que pour toute section s_1' de L_1 au-dessus de X et tout représentant (Z',g') de $[(Z,g)]$ dans $\widehat{CH}^p(X)$ tels que les cycles $Z',\operatorname{div}s_1,\ldots,\operatorname{div}s_q$ et les cycles $Z',\operatorname{div}s_1',\operatorname{div}s_2,\ldots,\operatorname{div}s_q$ soient d'intersection propre, on a l'égalité :

$$[(Z',g')\cdot\hat{c}_1(\overline{L}_1,s_1')\cdot\hat{c}_1(\overline{L}_2,s_2)\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_q,s_q)] = [(Z,g)\cdot\hat{c}_1(\overline{L}_1,s_1)\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_q,s_q)].$$

On choisit $\left(\|.\|_1^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}},\ldots,\left(\|.\|_q^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, q-suites croissantes de métriques positives C^∞ sur $L_1,\ldots,L_q$ convergeant uniformément sur $X(\mathbb{C})$ vers $\|.\|_1,\ldots,\|.\|_q$ respectivement. On note f_1 la fonction rationnelle sur X telle que $s_1'=f_1\cdot s_1$. On note également $g_1'=-\log\|s_1'\|_1^2$ et pour tout $1\leqslant i\leqslant q$ et tout $n\in\mathbb{N}$, $g_i^{(n)}=-\log\left(\|s_i\|_i^{(n)}\right)^2$ et ${g_1'}^{(n)}=-\log\left(\|s_1'\|_1^{(n)}\right)^2$.

On déduit de l'égalité $[Z']=\zeta(Z',g')=\zeta(Z,g)=[Z]$ qu'il existe une K_1-chaine f telle que :

$$(5.11)\qquad Z' = Z+\operatorname{div}f.$$

D'après le lemme de déplacement pour les K_1-chaines, (cf. [GS1], §4.2.6), on peut de plus supposer que f rencontre $\operatorname{div}s_1,\ldots,\operatorname{div}s_q$ presque proprement sur X_K. Notons :

$$Y = Z'\cdot\operatorname{div}s_1'\cdot\operatorname{div}s_2\cdots\operatorname{div}s_q - Z\cdot\operatorname{div}s_1\cdots\operatorname{div}s_q.$$

Il vient :

$$\begin{aligned}Y &= Z'\cdot(\operatorname{div}s_1'-\operatorname{div}s_1)\cdot\operatorname{div}s_2\cdots\operatorname{div}s_q+(Z'-Z)\cdot\operatorname{div}s_1\cdots\operatorname{div}s_q\\ &= \operatorname{div}f_1\cdot Z'\cdot\operatorname{div}s_2\cdots\operatorname{div}s_q+\operatorname{div}f\cdot\operatorname{div}s_1\cdots\operatorname{div}s_q,\end{aligned}$$

ce que, d'après ([GS1], §4.2.5) on peut récrire :

$$(5.12)\qquad Y=\operatorname{div}(f_1\cdot(Z'\cdot\operatorname{div}s_2\cdots\operatorname{div}s_q))+\operatorname{div}(f\cdot(\operatorname{div}s_1\cdots\operatorname{div}s_q))+R,$$

où $f_1 \cdot (Z' \cdot \operatorname{div} s_2 \cdots \operatorname{div} s_q)$ (resp. $f \cdot (\operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_q)$) désigne une K_1-chaine représentant l'intersection de la K_1-chaine f_1 et du cycle $Z' \cdot \operatorname{div} s_2 \cdots \operatorname{div} s_q$ (resp. de la K_1-chaine f et du cycle $\operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_q$) et où $R \in R_{\text{fin}}^{p+q}(X)$. Posons :

$$\delta = \{g' * (g_1', s_1') * (g_2, s_2) * \cdots * (g_q, s_q)\} - \{g * (g_1, s_1) * \cdots * (g_q, s_q)\},$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_n = \{g' * ({g_1'}^{(n)}, s_1') * (g_2^{(n)}, s_2) * \cdots * (g_q^{(n)}, s_q)\} - \{g * (g_1^{(n)}, s_1) * \cdots * (g_q^{(n)}, s_q)\}.$$

D'après la proposition (5.3.5), il vient :

$$\begin{aligned}\delta_n &= g' * g_1'^{(n)} * g_2^{(n)} * \cdots * g_q^{(n)} - g * g_1^{(n)} * \cdots * g_q^{(n)} \\ &= (g' * {g_1'}^{(n)} - g * g_1^{(n)}) * g_2^{(n)} * \cdots * g_q^{(n)}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on tire de l'égalité $[(Z', g')] = [(Z, g)]$ et de la relation (5.11) qu'il existe des courants u et v tels que :

$$(Z', g') = (Z, g) + \widehat{\operatorname{div}}\, f + (0, \partial u + \overline{\partial} v),$$

ce dont on déduit que :

$$g' = g + (-\log |f|^2),$$

dans $\widetilde{D}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$. Ceci combiné à la relation :

$${g_1'}^{(n)} = g_1^{(n)} + (-\log |f_1|^2),$$

et à ([GS1], §4.2.5.1) montre que :

$$\begin{aligned} g' * {g_1'}^{(n)} - g * g_1^{(n)} &= g' * ({g_1'}^{(n)} - g_1^{(n)}) + (g' - g) * g_1^{(n)} \\ &= (-\log |f_1|^2) * g' + (-\log |f|^2) * g_1^{(n)} \\ &= (-\log |f_1|^2) \wedge \delta_{Z'} + (-\log |f|^2) \wedge \operatorname{div} s_1 \\ &= (-\log |f_1 \cdot Z'|^2) + (-\log |f \cdot \operatorname{div} s_1|^2); \end{aligned}$$

et donc que :

$$\begin{aligned}\delta_n &= ((-\log |f_1 \cdot Z'|^2) + (-\log |f \cdot \operatorname{div} s_1|^2) * g_2^{(n)} * \cdots * g_q^{(n)} \\ &= (-\log |f_1 \cdot Z' \cdot \operatorname{div} s_2 \cdots \operatorname{div} s_q|^2) + (-\log |f \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_q|^2),\end{aligned}$$

dans $\widetilde{D}^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$. Comme $\delta = \lim_{n\to+\infty} \delta_n$, on a de même :

$$\delta = (-\log |f_1 \cdot Z' \cdot \operatorname{div} s_2 \cdots \operatorname{div} s_q|^2) + (-\log |f \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_q|^2). \tag{5.13}$$

Finalement, on déduit de la définition (5.10) et des relations (5.12) et (5.13) que :

$$\begin{aligned}&[(Z', g') \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_1, s_1') \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_2, s_2) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_q, s_q)] - [(Z, g) \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_1, s_1) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_q, s_q)] \\ &= [(Y, \delta)] = [\widehat{\operatorname{div}}(f_1 \cdot Z' \cdot \operatorname{div} s_2 \cdots \operatorname{div} s_q)] + [\widehat{\operatorname{div}}(f \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_q)] + [(R, 0)] = 0.\end{aligned}$$

La proposition précédente nous autorise à noter désormais $[(Z,g)]\cdot\hat{c}_1(\overline{L}_1)\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_q)$ la classe $[(Z,g)\cdot\hat{c}_1(\overline{L}_1,s_1)\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_q,s_q)]$.

Proposition 5.3.8. *Soient $\alpha\in\widehat{CH}^p(X)$ et $\overline{L}_0$, $\overline{L}_1,\dots,\overline{L}_q$ des fibrés en droites admissibles sur X. Pour tout $1\leqslant i\leqslant q$, on a dans $\widetilde{CH}^{p+q}(X)$ la relation :*

$$\begin{aligned}&\alpha\cdot\hat{c}_1(\overline{L}_1)\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_{i-1})\hat{c}_1(\overline{L}_i\otimes\overline{L}_0)\hat{c}_1(\overline{L}_{i+1})\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_q)\\&\qquad=\alpha\cdot\hat{c}_1(\overline{L}_1)\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_q)+\alpha\cdot\hat{c}_1(\overline{L}_1)\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_{i-1})\hat{c}_1(\overline{L}_0)\hat{c}_1(\overline{L}_{i+1})\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_q).\end{aligned}$$

Démonstration. D'après (5.3.7), il suffit de démontrer le cas $i=1$. Soit (Z,g) un représentant de la classe $\alpha\in\widehat{CH}^p(X)$. Soient également $s_1,\dots,s_q$ des sections rationnelles au-dessus de X de $L_1,\dots,L_q$ respectivement, telles que Z, $\operatorname{div}s_1,\dots,\operatorname{div}s_q$ s'intersectent proprement; et s_0 une section rationnelle de L_0 au-dessus de X telle que Z, $\operatorname{div}s_0$, $\operatorname{div}s_2,\dots,\operatorname{div}s_q$ s'intersectent proprement. Pour tout $0\leqslant i\leqslant q$, on note $\delta_i=\delta_{\operatorname{div}s_i}$, $g_i=-\log\|s_i\|_i^2$ et $\omega_i=c_1(\overline{L}_i)$. On note également $\tilde{\omega}=\omega(Z,g)$. On a :

$$\begin{aligned}&[g*(g_0+g_1,s_0+s_1)*(g_2,s_2)*\cdots*(g_q,s_q)]=g\cdot\delta_{(\operatorname{div}s_0\cup\operatorname{div}s_1)\cap\operatorname{div}s_2\cap\cdots\cap\operatorname{div}s_q}\\&+\tilde{\omega}(g_0+g_1)\cdot\delta_2\dots\delta_q+\tilde{\omega}(\omega_0+\omega_1)g_2\cdot\delta_3\dots\delta_q+\cdots+\tilde{\omega}(\omega_0+\omega_1)\omega_2\dots\omega_{q-1}g_q\\&\qquad=[g*(g_1,s_1)*\cdots*(g_k,s_k)]+[g*(g_0,s_0)*(g_2,s_2)*\cdots*(g_q,s_q)],\end{aligned}$$

et comme :

$$\begin{aligned}Z\cdot(\operatorname{div}s_0+\operatorname{div}s_1)\cdot\operatorname{div}s_2\cdots\operatorname{div}s_q&=Z\cdot\operatorname{div}s_1\cdot\operatorname{div}s_2\cdots\operatorname{div}s_q\\&\quad+Z\cdot\operatorname{div}s_0\cdot\operatorname{div}s_2\cdots\operatorname{div}s_q\end{aligned}$$

dans $Z^{p+q}(X)$, on a bien le résultat cherché.

Plus généralement, soient $\alpha\in\widehat{CH}^p(X)$ et $\overline{L}_1,\dots,\overline{L}_q$ des fibrés en droites intégrables sur X. On choisit $\overline{E}_1,\dots,\overline{E}_q$ et $\overline{F}_1,\dots,\overline{F}_q$ des fibrés en droites admissibles sur X tels que pour tout $1\leqslant i\leqslant q$, on ait : $\overline{L}_i=\overline{E}_i\otimes\left(\overline{F}_i\right)^{-1}$.

Proposition-définition 5.3.9. *La classe dans $\widetilde{CH}^{p+q}(X)$ donnée par :*

$$\sum_{\substack{S_1,S_2\\S_1\cup S_2=\{1,\dots,q\}}}(-1)^{\#S_2}\,\alpha\cdot\prod_{i\in S_1}\hat{c}_1(\overline{E}_i)\cdot\prod_{j\in S_2}\hat{c}_1(\overline{F}_j)$$

ne dépend que de la classe $\alpha\in\widehat{CH}^p(X)$ et des classes d'isomorphie isométrique des fibrés $\overline{L}_1,\dots,\overline{L}_q$. On note $\alpha\cdot\hat{c}_1(\overline{L}_1)\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_q)$ cette classe. Si les fibrés $\overline{L}_1,\dots,\overline{L}_q$ sont admissibles, cet élément coïncide avec celui défini en (5.10).

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition (5.3.8) et du fait que toute application q-linéaire $\varphi:\underbrace{A\times\cdots\times A}_{q\text{ fois}}\to B$, où A est un semi-groupe abélien et B un groupe abélien, s'étend de manière unique en une application q-linéaire $\varphi_s : \underbrace{A_s \times \cdots \times A_s}_{q \text{ fois}} \to B$, où A_s est le groupe symétrisé de A.

Diverses propriétés de cette construction sont rassemblées dans le théorème suivant :

Théorème 5.3.10. *Soient α un élément de $\widehat{CH}^p(X)$ et $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q$ des fibrés en droites intégrables sur X. On a les propriétés suivantes :*

1. *La classe $\alpha \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_1) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_q)$ ne dépend pas de l'ordre de $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q$.*
2. *L'application qui à $\alpha \in \widehat{CH}^p(X)$ et $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q$ des fibrés en droites hermitiens intégrables sur X associe $\alpha \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_1) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_q)$, définit une application multilinéaire :*
$$\widehat{CH}^p(X) \times \widehat{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{int}}(X) \times \cdots \times \widehat{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{int}}(X) \longrightarrow \widetilde{CH}^{p+q}(X).$$
3. *Si les métriques des fibrés $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant q$ fixé, sont C^∞ sur $X(\mathbb{C})$, alors on a :*
$$\alpha \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_1) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_q) = (\alpha \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_1) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_k)) \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_{k+1}) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_q),$$
où le produit $(\alpha \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_1) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_k)) \in \widehat{CH}^{p+k}(X)$ dans le second membre est pris au sens de Gillet-Soulé. (Voir [GS1]*, th. 4.2.3). En particulier si les métriques sur $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q$ sont C^∞, le produit $\alpha \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_1) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_q)$ défini par la proposition (5.3.9) coïncide avec celui défini par Gillet-Soulé.*
4. *Soit $\mathbf{1} = [(X, 0)] \in \widehat{CH}^0(X)$. On a :*
$$\mathbf{1} \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_1) = \hat{c}_1(\overline{L}_1).$$
5. *On a les relations :*
$$\omega(\alpha \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_1) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_q)) \\ = \omega(\alpha) \cdot c_1(\overline{L}_1) \cdots c_1(\overline{L}_q) \in \overline{A}_{\mathrm{g}}^{p+q,p+q}(X_{\mathbb{R}}) \cap C_0^{p+q,p+q}(X_{\mathbb{R}})$$
et
$$\zeta(\alpha \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_1) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_q)) = \zeta(\alpha) \cdot c_1(L_1) \cdots c_1(L_q) \in CH^{p+q}(X).$$
6. *Enfin, si $\alpha = (0, \varphi)$, avec $\varphi \in A^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$, alors :*
$$\alpha \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_1) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_q) = [(0, \varphi \cdot c_1(\overline{L}_1) \cdots c_1(\overline{L}_q))].$$

Démonstration.

1. Cela découle de la proposition (5.3.7) et de la définition donnée à la proposition (5.3.9).
2. Cela découle des propositions (5.3.8) et (5.3.9).
3. On se ramène grâce au (2) au cas où $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q$ sont des fibrés en droites admissibles, on applique alors (5.3.5).
4. Il suffit de le faire pour $\overline{L}_1$ admissible et c'est alors évident.

5. D'après le (2), il suffit de démontrer les relations pour $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q$ admissibles.

   L'égalité $\zeta(\alpha \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_1) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_q)) = \zeta(\alpha) \cdot c_1(L_1) \cdots c_1(L_q)$ est une conséquence immédiate de la définition (5.10).

   Soient $\left(\|.\|_1^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, \left(\|.\|_q^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites croissantes de métriques positives C^∞ convergeant uniformément sur $X(\mathbb{C})$ vers $\|.\|_1, \ldots, \|.\|_q$ respectivement. D'après le (3) et ([GS1], th. 4.2.9), on a :

$$\begin{aligned}(5.14)\qquad &\omega(\alpha \cdot \hat{c}_1(L_1, \|.\|_1^{(n)}) \cdots \hat{c}_1(L_q, \|.\|_q^{(n)})) \\ &\qquad = \omega(\alpha) \cdot c_1(L_1, \|.\|_1^{(n)}) \cdots c_1(L_q, \|.\|_q^{(n)}).\end{aligned}$$

   Soient (Z, g) un représentant de la classe $\alpha \in \widehat{CH}^p(X)$ et $s_1, \ldots, s_q$ des sections rationnelles non identiquement nulles sur X de $L_1, \ldots, L_q$ respectivement, telles que les cycles Z, $\operatorname{div} s_1, \ldots, \operatorname{div} s_q$ s'intersectent proprement. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, on note $g_i = -\log \|s_i\|_i^2$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on note $g_i^{(n)} = -\log \left(\|s_i\|_i^{(n)}\right)^2$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité de courants :

$$\begin{aligned}&\omega(\alpha \cdot \hat{c}_1(L_1, \|.\|_1^{(n)}) \cdots \hat{c}_1(L_q, \|.\|_q^{(n)})) = \\ &\qquad dd^c(\{g * (g_1^{(n)}, s_1) * \cdots * (g_q^{(n)}, s_q)\}) + \delta_{Z \cap \operatorname{div} s_1 \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q}.\end{aligned}$$

   Comme $\{g * (g_1^{(n)}, s_1) * \cdots * (g_q^{(n)}, s_q)\}$ tend vers $\{g * (g_1, s_1) * \cdots * (g_q, s_q)\}$ quand n tend vers $+\infty$ d'après (5.3.4), on déduit de la continuité faible de l'opérateur dd^c et de la relation :

$$\begin{aligned}&\omega(\alpha \cdot \hat{c}_1(L_1, \|.\|_1) \cdots \hat{c}_1(L_q, \|.\|_q)) = \\ &\qquad dd^c(\{g * (g_1, s_1) * \cdots * (g_q, s_q)\}) + \delta_{Z \cap \operatorname{div} s_1 \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q},\end{aligned}$$

   que la forme différentielle $\omega(\alpha \cdot \hat{c}_1(L_1, \|.\|_1^{(n)}) \cdots \hat{c}_1(L_q, \|.\|_q^{(n)}))$ tend vers $\omega(\alpha \cdot \hat{c}_1(L_1, \|.\|_1) \cdots \hat{c}_1(L_q, \|.\|_q))$ au sens de la convergence faible quand n tend vers $+\infty$. Enfin, d'après (4.2.9), on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \omega(\alpha) \cdot c_1(L_1, \|.\|_1^{(n)}) \cdots c_1(L_q, \|.\|_q^{(n)}) = \omega(\alpha) \cdot c_1(\overline{L}_1) \cdots c_1(\overline{L}_q),$$

   ce qui joint à la relation (5.14) permet de conclure.

6. D'après le (2), il suffit de démontrer l'égalité recherchée pour $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q$ des fibrés en droites admissibles sur X. On reprend ici les notations de la démonstration du (5). En utilisant la définition (5.10), on obtient la relation :

$$(5.15)\qquad [(0, \varphi)] \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_1) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_q) = [(0, \{\varphi * (g_1, s_1) * \cdots * (g_q, s_q)\})].$$

D'après la proposition (5.3.5) et la théorie développée dans [GS1], on a l'égalité suivante, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\{\varphi * (g_1^{(n)}, s_1) * \cdots * (g_q^{(n)}, s_q)\} &= \varphi * (g_1^{(n)} * (\cdots * (g_{q-1}^{(n)} * g_q^{(n)}) \cdots)) \\ &= (\cdots((\varphi * g_1^{(n)}) * g_2^{(n)}) * \cdots) * g_q^{(n)}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait d'après ([GS1], §2.2.9) que pour toute forme différentielle $\varphi' \in A^*(X_{\mathbb{R}})$ et tout $1 \leqslant i \leqslant q$:

$$\varphi' * g_i^{(n)} = g_i^{(n)} * \varphi' = \varphi' \cdot c_1(L_i, \|.\|_i^{(n)}).$$

On déduit alors par récurrence de ce qui précède la relation :

$$\{\varphi * (g_1^{(n)}, s_1) * \cdots * (g_q^{(n)}, s_q)\} = \varphi \cdot c_1(L_1, \|.\|_1^{(n)}) \cdots c_1(L_q, \|.\|_q^{(n)})$$

dans $\widetilde{D}^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$.

En remarquant que d'une part, $\{\varphi * (g_1^{(n)}, s_1) * \cdots * (g_q^{(n)}, s_q)\}$ tend vers $\{\varphi * (g_1, s_1) * \cdots * (g_q, s_q)\}$ au sens de la convergence faible des courants quand n tend vers $+\infty$ d'après (5.3.4), et que d'autre part :

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi \cdot c_1(L_1, \|.\|_1^{(n)}) \cdots c_1(L_q, \|.\|_q^{(n)}) = \varphi \cdot c_1(\overline{L}_1) \cdots c_1(\overline{L}_q),$$

également au sens de la topologie faible des courants, on conclut de ce qui précède que :

$$\{\varphi * (g_1, s_1) * \cdots * (g_q, s_q)\} = \varphi \cdot c_1(\overline{L}_1) \cdots c_1(\overline{L}_q)$$

dans $\widetilde{D}^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$, ce qui joint à la relation (5.15) prouve le résultat énoncé.

Définition 5.3.11. Soit p un entier positif. On appelle *groupe de Chow arithmétique généralisé de codimension* p et on note $\widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X)$ le $\mathbb{Z}$ sous-module de $\widehat{CH}^p(X)$ engendré par les éléments de la forme $\alpha \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_1) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_q)$, où $\alpha \in \widehat{CH}^{p-q}(X)$ et où $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q$ sont des fibrés en droites intégrables sur X. On convient de noter $\widehat{CH}^*_{\mathrm{int}}(X) = \bigoplus_{p \geqslant 0} \widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X)$.

Remarque 5.3.12. Le groupe $\widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X)$ contient $\widehat{CH}^p(X)$.

Remarque 5.3.13. Soit $\overline{L}$ un fibré intégrable sur X ; la première classe de Chern $\hat{c}_1(\overline{L})$ de $\overline{L}$ appartient à $\widehat{CH}^1_{\mathrm{int}}(X)$.

Proposition 5.3.14. *L'application qui à tout fibré en droites hermitien intégrable $\overline{L}$ associe sa classe de Chern $\hat{c}_1(\overline{L}) \in \widehat{CH}^1_{\mathrm{int}}(X)$, définit un isomorphisme de groupes :*

$$\hat{c}_1 : \widehat{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{int}}(X) \longrightarrow \widehat{CH}^1_{\mathrm{int}}(X).$$

Démonstration. Il découle des définitions que $\hat{c}_1(\cdot)$ est bien définie, surjective, et préserve la structure de groupe. Il nous reste à montrer que $\hat{c}_1(\cdot)$ est injective. Soit $\overline{L} = (L, \|.\|) \in \widehat{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{int}}(X)$ tel que $\hat{c}_1(\overline{L}) = 0$. Comme $c_1(L) = \zeta(\hat{c}_1(\overline{L})) = 0$, le fibré L est isomorphe au fibré trivial; on note s une section constante non nulle de L au-dessus de X. La relation :

$$\hat{c}_1(\overline{L}) = [\widehat{\mathrm{div}}\, s] = [(0, -\log \|s\|^2)] = 0,$$

jointe au fait que le groupe $CH^{1,0}(X)$ est toujours trivial, entraînent que $\|s\| = 1$ identiquement sur $X(\mathbb{C})$, ce qui nous permet de conclure.

Soient $\alpha \in A^{r-1,r-1}(X_{\mathbb{R}})$ et $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q$ des fibrés en droites intégrables sur X, avec q et r deux entiers positifs tels que $q + r = p$. D'après le théorème (5.3.10), on a :

$$[(0, \alpha c_1(\overline{L}_1) \cdots c_1(\overline{L}_q))] = [(0, \alpha)] \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_1) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_q) \in \widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X).$$

On en déduit que $a\left(\overline{A}_{\mathrm{g}}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})\right) \subset \widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X)$. On dispose donc du morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} a : \overline{A}_{\mathrm{g}}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}}) &\longrightarrow \widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X) \\ \beta &\longmapsto [(0, \beta)]. \end{aligned}$$

D'après le théorème (5.3.10), on obtient par restriction à $\widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X)$ des morphismes ζ et ω, les morphismes de groupes suivants :

$$\begin{aligned} \zeta : \widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X) &\longrightarrow CH^p(X) \\ [(Z, g)] &\longmapsto Z, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \omega : \widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X) &\longrightarrow \overline{A}_{\mathrm{g}}^{p,p}(X_{\mathbb{R}}) \\ [(Z, g)] &\longmapsto \omega(Z, g) = dd^c g + \delta_Z. \end{aligned}$$

Proposition 5.3.15. *Soit $\alpha \in \widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X)$ et choisissons (Z, g) un représentant de α dans $\widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X)$. Il existe $g_Z \in D^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$ un courant de Green pour Z et $\varphi \in C^{p-1,p-1}_{\log,0}(X_{\mathbb{R}})$ tels que l'on ait :*

$$g = g_Z + \varphi \quad \textit{dans} \quad \widetilde{D}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}}).$$

Démonstration. Par linéarité, il suffit de démontrer le résultat pour $\alpha = \beta \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_1) \cdots \hat{c}_1(\overline{L}_q)$, où $\beta \in \widehat{CH}^{p-q}(X)$ et $\overline{L}_1 = (L_1, \|.\|_1), \ldots, \overline{L}_q = (L_q, \|.\|_q)$ sont des fibrés admissibles sur X.

Soient (Z', g') un représentant de la classe β et $s_1, \ldots, s_q$ des sections rationnelles non identiquement nulles sur X de $L_1, \ldots, L_q$ respectivement telles que

$Z', \operatorname{div} s_1, \ldots, \operatorname{div} s_q$ s'intersectent proprement. Soient également $\|.\|_1^{(0)}, \ldots, \|.\|_q^{(0)}$ des métriques positives C^∞ sur $L_1, \ldots, L_q$ respectivement.

On pose $\tilde{\omega}' = dd^c g' + \delta_{Z'}$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, on note également $\delta_i = \delta_{\operatorname{div} s_i}$, $g_i = -\log \|s_i\|_i^2$, $\omega_i = c_1(\overline{L}_i)$, $g_i^{(0)} = -\log(\|s_i\|_i^{(0)})^2$ et $\omega_i^{(0)} = c_1(L_i, \|.\|_i^{(0)})$.

En appliquant les définitions, il vient :

$$
\begin{aligned}
\{g' * (g_1, s_1) * \cdots * (g_q, s_q)\} &- \{g' * (g_1, s_1) * \cdots * (g_{q-1}, s_{q-1}) * (g_q^{(0)}, s_q)\} \\
&= (g_q - g_q^{(0)})\, \tilde{\omega}' \omega_1 \cdots \omega_{q-1} \\
&= -\log \left(\frac{\|.\|_q}{\|.\|_q^{(0)}} \right)^2 \tilde{\omega}' \omega_1 \ldots \omega_{q-1} \in C_{\log,0}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}}).
\end{aligned}
$$

Or, d'après la proposition (5.3.5), on a :

$$
\begin{aligned}
\{g' * (g_1, s_1) * \cdots * (g_{q-1}, s_{q-1}) * (g_q^{(0)}, s_q)\} \\
= \{(g' * g_q^{(0)}) * (g_1, s_1) * \cdots * (g_{q-1}, s_{q-1})\},
\end{aligned}
$$

dans $\widetilde{D}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$. En itérant q fois ce procédé, on trouve $\varphi \in C_{\log,0}^{p-1,p-1}(X)$ tel que :

$$
\{g' * (g_1, s_1) * \cdots * (g_q, s_q)\} = g' * g_q^{(0)} * \cdots * g_1^{(0)} + \varphi,
$$

dans $\widetilde{D}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$. Il suffit alors de remarquer que $g_Z = g' * g_q^{(0)} * \cdots * g_1^{(0)}$ est un courant de Green pour $Z' \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_q$ et la proposition est démontrée.

la proposition (5.3.15) justifie la définition suivante :

Définition 5.3.16. Soit p un entier positif. On note $\widehat{CH}^p_{\mathrm{gen}}(X)$ le $\mathbb{Z}$ sous-module de $\widetilde{CH}^p(X)$ engendré par les éléments de $\widehat{CH}^p(X)$ et ceux de la forme $a(\varphi)$ avec $\varphi \in C_{\log,0}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$. On convient de noter $\widehat{CH}^*_{\mathrm{gen}}(X) = \bigoplus_{p \geqslant 0} \widehat{CH}^p_{\mathrm{gen}}(X)$.

Remarque 5.3.17. D'après la proposition (5.3.15) on a $\widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X) \subset \widehat{CH}^p_{\mathrm{gen}}(X)$.

Remarque 5.3.18. On dispose du morphisme de groupes :

$$
\begin{aligned}
\omega \ : \widehat{CH}^p_{\mathrm{gen}}(X) &\longrightarrow C_0^{p,p}(X_{\mathbb{R}}) \\
[(Z, g)] &\longmapsto dd^c g + \delta_Z.
\end{aligned}
$$

5.4. L'accouplement $\widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X) \otimes \widehat{CH}^q_{\mathrm{int}}(X) \to \widehat{CH}^{p+q}_{\mathrm{int}}(X)_{\mathbb{Q}}$.

Soit $\pi : X \to S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ une variété arithmétique de dimension de Krull $d+1$.

On définit dans cette section un accouplement $\widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X) \otimes \widehat{CH}^q_{\mathrm{int}}(X) \to \widehat{CH}^{p+q}_{\mathrm{int}}(X)_{\mathbb{Q}}$ qui étend l'accouplement $\widehat{CH}^p(X) \otimes \widehat{CH}^q(X) \to \widehat{CH}^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}}$ défini par Gillet-Soulé (voir [GS1], §4.2; on peut également consulter [BGS], §2.2).

Soient $x \in \widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X)$ et $y \in \widehat{CH}^q_{\mathrm{int}}(X)$. On peut écrire x et y sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \hat{c}_1(\overline{E}_{i,1}) \cdots \hat{c}_1(\overline{E}_{i,r_i})$$

et

$$y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot \hat{c}_1(\overline{F}_{j,1}) \cdots \hat{c}_1(\overline{F}_{j,s_j}),$$

où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ (resp. tout $1 \leqslant j \leqslant m$), α_i est un élément de $\widehat{CH}^{p-r_i}(X)$ et $\overline{E}_{i,1}, \dots \overline{E}_{i,r_i}$ sont des fibrés en droites intégrables sur X (resp. β_j est un élément de $\widehat{CH}^{q-s_j}(X)$ et $\overline{F}_{j,1}, \dots, \overline{F}_{j,s_j}$ sont des fibrés en droites intégrables sur X).

On définit alors le produit $(x \cdot y) \in \widehat{CH}^{p+q}_{\mathrm{int}}(X)_{\mathbb{Q}}$ par la formule :

$$(x \cdot y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i \cdot \beta_j) \cdot \hat{c}_1(\overline{E}_{i,1}) \cdots \hat{c}_1(\overline{E}_{i,r_i}) \cdot \hat{c}_1(\overline{F}_{j,1}) \cdots \hat{c}_1(\overline{F}_{j,s_j}),$$

où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$, on a noté $(\alpha_i \cdot \beta_j) \in \widehat{CH}^{p+q-r_i-s_j}(X)_{\mathbb{Q}}$ le produit de α_i et β_j au sens de Gillet-Soulé.

Bien entendu, il faut montrer que cette définition ne dépend pas des choix effectués pour représenter x et y. C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 5.4.1. *La définition ci-dessus ne dépend pas des choix effectués. Elle définit un accouplement :*

$$\widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X) \otimes \widehat{CH}^q_{\mathrm{int}}(X) \longrightarrow \widehat{CH}^{p+q}_{\mathrm{int}}(X)_{\mathbb{Q}}, \tag{5.16}$$

qui prolonge celui défini par Gillet-Soulé.

Cet accouplement munit $\widehat{CH}^*_{\mathrm{int}}(X)_{\mathbb{Q}}$ d'une structure d'anneau commutatif, associatif et unifère.

Remarque 5.4.2. Si $p = 1$ ou $q = 1$, on dispose d'un accouplement :

$$\widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X) \otimes \widehat{CH}^q_{\mathrm{int}}(X) \longrightarrow \widehat{CH}^{p+q}_{\mathrm{int}}(X)$$

qui induit l'accouplement (5.16) à valeur dans $\widehat{CH}^{p+q}_{\mathrm{int}}(X)_{\mathbb{Q}}$.

Remarque 5.4.3. Si X est lisse sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, on peut définir les produits $(\alpha_i \cdot \beta_j)$ dans $\widehat{CH}^{p+q-r_i-s_j}(X)$. La construction précédente donne donc un accouplement :

$$\widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X) \otimes \widehat{CH}^q_{\mathrm{int}}(X) \longrightarrow \widehat{CH}^{p+q}_{\mathrm{int}}(X)$$

qui induit par produit tensoriel avec $\mathbb{Q}$ l'accouplement (5.16) à valeur dans $\widehat{CH}^{p+q}_{\mathrm{int}}(X)_{\mathbb{Q}}$.

Démonstration. On montre tout d'abord que le produit $(x \cdot y)$ introduit plus haut est bien défini.

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \hat{c}_1(\overline{E}_{i,1}) \cdots \hat{c}_1(\overline{E}_{i,r_i})$ un élément de $\widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X)$. Il faut montrer que si $x = 0$ dans $\widehat{CH}^p_{\mathrm{int}}(X)$, alors pour tout $y \in \widehat{CH}^q_{\mathrm{int}}(X)$, on a $(x \cdot y) = 0$.

On montre dans ce qui suit un résultat plus général : Si $x = a(\varphi)$ avec $\varphi \in C^{p-1,p-1}_{\log,0}(X_{\mathbb{R}})$, alors $x \cdot y = a(\varphi\, \omega(y))$.

Par linéarité, il suffit de démontrer cet énoncé pour $y = \beta \cdot \hat{c}_1(\overline{F}_1) \cdots \hat{c}_1(\overline{F}_s)$, où β est un élément de $\widehat{CH}^{q-s}(X)$ et $\overline{F}_1 = (F_1, \|.\|_1), \ldots, \overline{F}_s = (F_s, \|.\|_s)$ sont des fibrés en droites admissibles sur X. Remarquons également que la proposition (5.3.9) et le théorème (5.3.10) nous permettent de supposer que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ les fibrés en droites $\overline{E}_{i,1} = (E_{i,1}, \|.\|_{i,1}), \ldots, \overline{E}_{i,r_i} = (E_{i,r_i}, \|.\|_{i,r_i})$ sont admissibles sur X.

Soient $\left(\|.\|_1^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, \left(\|.\|_s^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ des suites croissantes de métriques positives C^∞ sur $F_1, \ldots, F_s$ convergeant vers $\|.\|_1, \ldots, \|.\|_s$ respectivement, et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, soient $\left(\|.\|_{i,1}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, \left(\|.\|_{i,r_i}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ des suites croissantes de métriques positives C^∞ sur $E_{i,1}, \ldots, E_{i,r_i}$ convergeant vers $\|.\|_{i,1}, \ldots, \|.\|_{i,r_i}$ respectivement.

On choisit $(Z', g'), (Z_1, g_1), \ldots, (Z_n, g_n)$ des représentants des classes $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ respectivement, tels que Z'_K soit d'intersection propre avec chacun des $(Z_1)_K, \ldots, (Z_n)_K$, et tels que $g', g_1, \ldots, g_n$ soient des courants de type logarithmique.

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on note $Z' \cdot Z_i$ un représentant dans $Z^{p+q-r_i}(|Z'| \cap |Z_i|)_{\mathbb{Q}}$ du produit $[Z'] \cdot [Z_i] \in CH^{p+q-r_i}_{|Z'|\cap|Z_i|}(X)_{\mathbb{Q}}$; et on choisit $s_{i,1}, \ldots, s_{i,r_i}$ des sections rationnelles non identiquement nulles sur X de $E_{i,1}, \ldots, E_{i,r_i}$ respectivement et $s_1, \ldots, s_s$ des sections rationnelles non identiquement nulles sur X de $F_1, \ldots, F_s$ respectivement telles que les cycles $Z_i, \operatorname{div} s_{i,1}, \ldots, \operatorname{div} s_{i,r_i}, \operatorname{div} s_1, \ldots, \operatorname{div} s_s$ ainsi que les cycles $(Z' \cdot Z_i), \operatorname{div} s_{i,1}, \ldots, \operatorname{div} s_{i,r_i}, \operatorname{div} s_1, \ldots, \operatorname{div} s_s$ et $Z_K, Z'_K, (\operatorname{div} s_{i,1})_K, \ldots, (\operatorname{div} s_{i,r_i})_K, (\operatorname{div} s_1)_K, \ldots, (\operatorname{div} s_s)_K$ s'intersectent proprement.
On convient de noter $g_{i,1} = -\log \|s_{i,1}\|^2_{i,1}, \ldots, g_{i,r_i} = -\log \|s_{i,r_i}\|^2_{i,r_i}$ et $g_1 = -\log \|s_1\|_1^2, \ldots, g_s = -\log \|s_s\|_s^2$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)}_{i,1} = -\log \left(\|s_{i,1}\|^{(k)}_{i,1}\right)^2, \ldots, g^{(k)}_{i,r_i} = -\log \left(\|s_{i,r_i}\|^{(k)}_{i,r_i}\right)^2$ et $g^{(k)}_1 = -\log \left(\|s_1\|^{(k)}_1\right)^2, \ldots, g^{(k)}_s = -\log \left(\|s_s\|^{(k)}_s\right)^2$.

D'après la définition (5.10) et ([GS1], §4.2.1 et 4.2.2), on a :

$$x = \sum_{i=1}^{n} [(\, Z_i \cdot \operatorname{div} s_{i,1} \cdots \operatorname{div} s_{i,r_i}, \{g_i * (g_{i,1}, s_{i,1}) * \cdots * (g_{i,r_i}, s_{i,r_i})\}\,)] \tag{5.17}$$

et

$$\begin{aligned} x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} [(\, &(Z' \cdot Z_i) \cdot \operatorname{div} s_{i,1} \cdots \operatorname{div} s_{i,r_i} \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s, \\ &\{(g' * g_i) * (g_{i,1}, s_{i,1}) * \cdots * (g_{i,r_i}, s_{i,r_i}) * (g_1, s_1) * \cdots * (g_s, s_s)\}\,)]. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Puisque $\zeta(x) = \sum_{i=1}^{n} [Z_i \cdot \operatorname{div} s_{i,1} \cdots \operatorname{div} s_{i,r_i}] = 0$, on peut trouver une K_1-chaine f telle que :

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i \cdot \operatorname{div} s_{i,1} \cdots \operatorname{div} s_{i,r_i} = \operatorname{div} f. \tag{5.19}$$

D'après le lemme de déplacement pour les K_1-chaines (cf. [GS1], §4.2.6), on peut de plus supposer que f rencontre $Z' \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s$ presque proprement dans X_K. Cela entraîne que d'une part :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (Z_i \cdot \operatorname{div} s_{i,1} \cdots \operatorname{div} s_{i,r_i}, \{g_i * (g_{i,1}, s_{i,1}) * \cdots * (g_{i,r_i}, s_{i,r_i})\}) \\ = \widehat{\operatorname{div}}\, f + (0, \gamma_1 + \gamma_2),\end{aligned} \tag{5.20}$$

où l'on a noté :

$$\gamma_1 = \sum_{i=1}^{n} \{g_i * (g_{i,1}, s_{i,1}) * \cdots * (g_{i,r_i}, s_{i,r_i})\}, \qquad \gamma_2 = \log |f|^2;$$

et que d'autre part, d'après ([GS1],§4.2.1 et 4.2.5),

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} ((Z' \cdot Z_i) \cdot \operatorname{div} s_{i,1} \cdots \operatorname{div} s_{i,r_i} \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s, \\ \{(g' * g_i) * (g_{i,1}, s_{i,1}) * \cdots * (g_{i,r_i}, s_{i,r_i}) * (g_1, s_1) * \cdots * (g_s, s_s)\}) \\ = \widehat{\operatorname{div}}(f \cdot (Z' \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s)) + (0, \gamma') + (R, 0),\end{aligned} \tag{5.21}$$

où l'on a noté :

$$\begin{aligned}\gamma' = \sum_{i=1}^{n} \{(g' * g_i) * (g_{i,1}, s_{i,1}) * \cdots * (g_{i,r_i}, s_{i,r_i}) * (g_1, s_1) * \cdots * (g_s, s_s)\} \\ + \log |f \cdot (Z' \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s)|^2,\end{aligned} \tag{5.22}$$

où $R \in R^{p+q}_{\mathrm{fin}}(X)$ et où $f \cdot (Z' \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s)$ désigne une K_1-chaine représentant l'intersection de la K_1-chaine f et du cycle $Z' \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s$ (bien que $f \cdot (Z' \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s)$ ne soit pas définie de manière univoque, les cycles $\operatorname{div}(f \cdot (Z' \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s))$ et $\widehat{\operatorname{div}}(f \cdot (Z' \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s))$ le sont, voir [GS1], §4.2.5).

D'après (5.19) et ([GS1], §2.2.9 et 4.2.7), on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n}(g' * g_1^{(k)} * \cdots * g_s^{(k)}) * (g_i * g_{i,1}^{(k)} * \cdots * g_{i,r_i}^{(k)}) + \log |f \cdot (Z' \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s)|^2$$
$$= (g' * g_1^{(k)} * \cdots * g_s^{(k)}) \cdot \delta_{\operatorname{div} f}$$
$$+ \omega(\beta)\, c_1\big(F_1, \|.\|_1^{(k)}\big) \cdots c_1\big(F_s, \|.\|_s^{(k)}\big) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} g_i * g_{i,1}^{(k)} * \cdots * g_{i,r_i}^{(k)}\right)$$
$$+ \log |f \cdot (Z' \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s)|^2$$
$$= \Big((g' * g_1^{(k)} * \cdots * g_s^{(k)}) \cdot \delta_{\operatorname{div} f} - \omega(\beta)\, c_1\big(F_1, \|.\|_1^{(k)}\big) \cdots c_1\big(F_s, \|.\|_s^{(k)}\big) \log |f|^2$$
$$+ \log |f \cdot (Z' \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s)|^2\Big)$$
$$+ \omega(\beta)\, c_1\big(F_1, \|.\|_1^{(k)}\big) \cdots c_1\big(F_s, \|.\|_s^{(k)}\big) \left(\sum_{i=1}^{n} g_i * g_{i,1}^{(k)} * \cdots * g_{i,r_i}^{(k)} + \log |f|^2\right)$$
$$= \omega(\beta)\, c_1\big(F_1, \|.\|_1^{(k)}\big) \cdots c_1\big(F_s, \|.\|_s^{(k)}\big) \left(\sum_{i=1}^{n} g_i * g_{i,1}^{(k)} * \cdots * g_{i,r_i}^{(k)} + \log |f|^2\right),$$

dans $\widetilde{D}^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$, ce qui, en faisant tendre k vers $+\infty$, entraîne que:

$$\gamma' = \gamma_1\, \omega(y) + \gamma_2\, \omega(y),$$

dans $\widetilde{D}^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$ (une telle expression a bien un sens car $\omega(y) \in C_0^{q-1,q-1}(X_{\mathbb{R}})$). De l'égalité $x = [(0, \gamma_1 + \gamma_2)] = [(0, \varphi)]$ obtenue en combinant (5.17) et (5.20), on déduit qu'il existe une K_1-chaine g, que l'on choisit d'intersection presque propre avec $Z' \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s$ dans X_K, telle que $\operatorname{div} g = 0$ et $\gamma_1 + \gamma_2 - \varphi = -\log |g|^2$ dans $\widetilde{D}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$.

On tire de ce qui précède et de ([GS1], §4.2.5 et 4.2.7) la relation:

$$-\log |g \cdot (Z' \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s)|^2$$
$$= (\gamma_1 + \gamma_2 - \varphi)\, \omega(\beta)\, c_1\big(F_1, \|.\|_1^{(k)}\big) \cdots c_1\big(F_s, \|.\|_s^{(k)}\big),$$

valable pour tout $k \in \mathbb{N}$; ce qui montre, en faisant tendre k vers $+\infty$, que:

$$\gamma_1\, \omega(y) + \gamma_2\, \omega(y) - \varphi\, \omega(y) = -\log |g \cdot (Z' \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s)|^2,$$

dans $\widetilde{D}^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$. Comme de plus $\operatorname{div}(g \cdot (Z' \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s))_K = (\operatorname{div} g)_K \cdot (Z' \cdot \operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_s)_K = 0$, on peut affirmer que $[(0, \gamma')] = [(0, \gamma_1\, \omega(y) + \gamma_2\, \omega(y))] = [(0, \varphi\, \omega(y))]$, ce qui combiné à (5.18) et (5.21) montre que $x \cdot y = a(\varphi\, \omega(y))$.

On a donc démontré que l'accouplement (5.16) est bien défini. Les autres propriétés énoncées se déduisent aisément du théorème (5.3.10) et des propriétés analogues pour $\widehat{CH}^*(X)$.

Au cours de la démonstration précédente, on a de plus prouvé le résultat suivant :

Proposition 5.4.4. *Soient* $x \in \widehat{CH}^*_{\mathrm{int}}(X)$ *et* $\varphi \in C^*_{\log,0}(X_{\mathbb{R}})$ *tel que* $a(\varphi) \in \widehat{CH}^*_{\mathrm{int}}(X)$*, on a :*

$$a(\varphi) \cdot x = a(\varphi\, \omega(x)).$$

Remarque 5.4.5. Soient x et y deux éléments de $\widehat{CH}^*_{\mathrm{gen}}(X)$, et soient α, $\alpha' \in \widehat{CH}^*(X)$ et φ, $\varphi' \in C^*_{\log,0}(X_{\mathbb{R}})$ tels que $x = \alpha + a(\varphi)$ et $y = \alpha' + a(\varphi')$. On définit le produit de x et de y par la formule :

$$x \cdot y = \alpha \cdot \alpha' + a(\varphi\, \omega(\alpha') + \varphi'\, \omega(\alpha) + \varphi\, dd^c \varphi') \in \widehat{CH}^*_{\mathrm{gen}}(X)_{\mathbb{Q}}.$$

On peut montrer que ce produit est bien défini et qu'il munit $\widehat{CH}^*_{\mathrm{gen}}(X)_{\mathbb{Q}}$ d'une structure d'anneau commutatif, associatif et unifère. D'après la proposition (5.4.4), il coïncide sur $\widehat{CH}^*_{\mathrm{int}}(X)_{\mathbb{Q}}$ avec le produit défini au théorème (5.4.1).

Théorème 5.4.6. *Soit* $\pi : X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ *une variété arithmétique. Les morphismes :*

$$\zeta : \widehat{CH}^*_{\mathrm{int}}(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow CH^*_{\mathbb{Q}}(X)$$

et

$$\omega : \widehat{CH}^*_{\mathrm{int}}(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \overline{A}^*_{\mathrm{g}}(X_{\mathbb{R}}),$$

définis à la section (5.3) sont des morphismes d'anneaux. De plus, le produit défini à la remarque (5.4.2) et (dans le cas où $\pi : X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ *est lisse) celui défini à la remarque (5.4.3) sont compatibles avec les morphismes* ζ *et* ω*.*

Démonstration. C'est une simple conséquence du théorème (5.3.10), alinéa (5) et des propriétés analogues pour $\widehat{CH}^*(X)$.

Remarque 5.4.7. Soient $\varphi \in \overline{A}^*_{\mathrm{g}}(X_{\mathbb{R}})$ et $x \in \widehat{CH}^*_{\mathrm{int}}(X)$. On déduit aisément de la définition de $\overline{A}^*_{\mathrm{g}}(X_{\mathbb{R}})$ et des alinéas (5) et (6) du théorème (5.3.10) la formule utile suivante :

$$a(\varphi) \cdot x = a(\varphi\, \omega(x)).$$

5.5. **Degré arithmétique et hauteurs.**

5.5.1. *Degré arithmétique.*

Soit $\pi : X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K = S$ une variété arithmétique (projective) de dimension relative d. On rappelle (voir par exemple [BGS], §2.1.3) que l'on dispose des deux morphismes :

$$\deg_K : \widehat{CH}^0(S) = CH^0(S) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

et

$$\widehat{\deg} : \widehat{CH}^1(S) \longrightarrow \mathbb{R},$$

qui induisent par composition avec $\pi_* : \widehat{CH}^*(X) \to \widehat{CH}^{*-d}(S)$ les morphismes :

$$\deg_K : \widehat{CH}^d(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad \text{(degré géométrique)}$$

et

$$\widehat{\deg} : \widehat{CH}^{d+1}(X) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{(degré arithmétique).}$$

Soit $i \in \{0, 1\}$. Pour toute classe $\alpha \in \widehat{CH}^{d+i}_{\mathrm{int}}(X)$, choisissons (Z, g) un représentant de α; on déduit de ([GS1], §3.6) que la classe $[(\pi_*(Z), \pi_*(g))]$ ne dépend que de α. On dispose donc d'un morphisme, encore noté π_*, qui est défini comme suit :

$$\begin{aligned} \pi_* : \widehat{CH}^{d+i}_{\mathrm{int}}(X) &\longrightarrow \widehat{CH}^i(S) \\ [(Z,g)] &\longmapsto [(\pi_*(Z), \pi_*(g))], \end{aligned}$$

et qui prolonge à $\widehat{CH}^{d+i}_{\mathrm{int}}(X)$ le morphisme image directe usuel $\pi_* : \widehat{CH}^{d+i}(X) \to \widehat{CH}^i(S)$.

En composant $\deg_K$ et $\widehat{\deg}$ avec π_*, on obtient deux nouveaux morphismes :

$$\deg_K : \widehat{CH}^d_{\mathrm{int}}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

et

$$\widehat{\deg} : \widehat{CH}^{d+1}_{\mathrm{int}}(X) \longrightarrow \mathbb{R},$$

qui prolongent ceux définis précédemment.

5.5.2. *Hauteurs.*

Soient $Z \in Z_q(X)$ un cycle de dimension q et $\overline{L}_1 = (L_1, \|.\|_1), \ldots, \overline{L}_q = (L_q, \|.\|_q)$ des fibrés en droites admissibles sur X. Choisissons $s_1, \ldots, s_q$ des sections rationnelles non identiquement nulles sur X de $L_1, \ldots, L_q$ respectivement, telles que les cycles $Z, \operatorname{div} s_1, \ldots, \operatorname{div} s_q$ soient d'intersection propre. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, on note $g_i = -\log \|s_i\|_i^2$ et $\omega_i = c_1(\overline{L}_i)$. On définit à partir de ces données un élément de $D^{p,p}(X_{\mathbb{R}})$ que l'on note $\{(g_1, s_1) * \cdots * (g_q, s_q) | \delta_Z\}$ par la formule suivante :

$$\{(g_1,s_1)*\cdots*(g_q,s_q)|\delta_Z\} = g_1\cdot\delta_{\operatorname{div}s_2\cap\cdots\cap\operatorname{div}s_q\cap Z} + \omega_1 g_2\cdot\delta_{\operatorname{div}s_3\cap\cdots\cap\operatorname{div}s_q\cap Z} + \cdots + \omega_1\cdots\omega_{i-1}g_i\cdot\delta_{\operatorname{div}s_{i+1}\cap\cdots\cap\operatorname{div}s_q\cap Z} + \cdots + \omega_1\cdots\omega_{q-1}g_q\cdot\delta_Z. \tag{5.23}$$

On vérifie que chacun des termes de la relation (5.23) est bien défini. En effet $\omega_1\cdots\omega_{i-1}\cdot\delta_{\operatorname{div}s_{i+1}\cap\cdots\cap\operatorname{div}s_q\cap Z}$ est bien défini comme le produit de $\omega_1\cdots\omega_{i-1}\in B^{i-1,i-1}(X_{\mathbb{R}})$ et de $\delta_{\operatorname{div}s_{i+1}\cap\cdots\cap\operatorname{div}s_q\cap Z}\in B^{d-i+1,d-i+1}_{\operatorname{div}s_{i+1}\cap\cdots\cap\operatorname{div}s_q\cap Z}(X_{\mathbb{R}})$ d'après les propositions (4.4.13) et (4.4.14). Par ailleurs le produit :

$$\gamma_i = g_i\,\omega_1\cdots\omega_{i-1}\cdot\delta_{\operatorname{div}s_{i+1}\cap\cdots\cap\operatorname{div}s_q\cap Z},$$

a bien un sens d'après le théorème (4.2.9); et si l'on pose $g_i^{(t)}=\max(g_i,t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, la limite :

$$\lim_{t\to-\infty} g_i^{(t)}\omega_1\cdots\omega_{i-1}\cdot\delta_{\operatorname{div}s_{i+1}\cap\cdots\cap\operatorname{div}s_q\cap Z} = g_i\,\omega_1\cdots\omega_{i-1}\cdot\delta_{\operatorname{div}s_{i+1}\cap\cdots\cap\operatorname{div}s_q\cap Z},$$

montre que le courant γ_i ne dépend pas des choix effectués pour le définir.

Ceci étant établi, on pose :

$$h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q}(Z) := \widehat{\deg}(\pi_*(Z\cdot\operatorname{div}s_1\cdots\operatorname{div}s_q),\pi_*(\{(g_1,s_1)*\cdots*(g_q,s_q)|\delta_Z\}))\in\mathbb{R}.$$

Proposition-définition 5.5.1. *Le nombre réel $h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q}(Z)$ défini ci-dessus ne dépend pas du choix des sections $s_1,\ldots,s_q$; on l'appelle* hauteur de Z relativement à $\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q$.

Proposition 5.5.2. *Soient $Z\in Z_q(X)$ et $\overline{L}_0,\overline{L}_1=(L_1,\|.\|_1),\ldots,\overline{L}_q=(L_q,\|.\|_q)$ des fibrés admissibles sur X. Les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. *La hauteur $h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q}(Z)$ ne dépend que du cycle Z et des classes d'isomorphie isométrique des fibrés admissibles $\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q$; elle ne dépend pas de l'ordre des fibrés $\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q$.*
2. *Soient $\left(\|.\|_1^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}},\ldots,\left(\|.\|_q^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ des suites croissantes de métriques positives convergeant vers $\|.\|_1,\ldots,\|.\|_q$ sur $L_1,\ldots,L_q$ respectivement, on a :*
$$\lim_{k\to+\infty} h_{\left(L_1,\|.\|_1^{(k)}\right),\ldots,\left(L_q,\|.\|_q^{(k)}\right)}(Z) = h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q}(Z).$$
3. *Si les métriques $\|.\|_1,\ldots,\|.\|_q$ sont C^∞, alors on a :*
$$h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q}(Z) = \widehat{\deg}(\hat{c}_1(\overline{L}_1)\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_q)|Z),$$
où $(\cdot|\cdot)$ désigne l'accouplement défini dans ([BGS]*, §2.3).*
4. *Pour tout $1\leqslant i\leqslant q$, on a :*
$$h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_{i-1},\overline{L}_i\otimes\overline{L}_0,\overline{L}_{i+1},\ldots,\overline{L}_q}(Z) = h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q}(Z) + h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_{i-1},\overline{L}_0,\overline{L}_{i+1},\ldots,\overline{L}_q}(Z).$$

Démonstration des propositions (5.5.1) et (5.5.2). La proposition (5.5.1) et les assertions (1) et (4) de la proposition (5.5.2) se déduisent immédiatement des assertions (2) et (3) de la proposition (5.5.2) et des propriétés analogues dans le cas classique (cf. [BGS], §2.3). L'assertion (2) étant une conséquence du théorème (4.2.9), il suffit de prouver l'assertion (3).

En remarquant que $g_1 * (g_2 * (\cdots * (g_q)))$ est un courant de Green pour le cycle $\operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_q$, on déduit de ([GS1], §1.2.4 et 1.3.5) qu'il existe g un courant de Green de type logarithmique pour $\operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_q$ tel que :

$$g = g_1 * (g_2 * (\cdots * (g_q))) + \partial u + \overline{\partial} v. \tag{5.24}$$

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $\delta_Z^{(\varepsilon)}$ une régularisation de δ_Z comme à la proposition (4.2.12). En multipliant les deux membres de l'égalité (5.24) par $\delta_Z^{(\varepsilon)}$, il vient :

$$g \wedge \delta_Z^{(\varepsilon)} = g_1 * (g_2 * (\cdots * (g_q))) \wedge \delta_Z^{(\varepsilon)} + \partial(u\delta_Z^{(\varepsilon)}) + \overline{\partial}(v\delta_Z^{(\varepsilon)}). \tag{5.25}$$

Comme d'une part :

$$\begin{aligned} &g_1 * (g_2 * (\cdots * (g_q))) \\ &\qquad = g_1 \cdot \delta_{\operatorname{div} s_2 \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q} + \omega_1 g_2 \cdot \delta_{\operatorname{div} s_3 \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q} + \cdots + \omega_1 \cdots \omega_{q-1} g_q, \end{aligned}$$

et que d'autre part, d'après ([GS1], §2.2.12), on a les limites :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g \wedge \delta_Z^{(\varepsilon)} = g \wedge \delta_Z,$$

et pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\omega_1 \cdots \omega_{i-1}) g_i \cdot \delta_{\operatorname{div} s_{i+1} \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q} \wedge \delta_Z^{(\varepsilon)} = (\omega_1 \cdots \omega_{i-1}) g_i \cdot \delta_{\operatorname{div} s_{i+1} \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q} \wedge \delta_Z,$$

au sens de la convergence faible des courants, on tire de (5.25) l'égalité :

$$\begin{aligned} &g \wedge \delta_Z = \\ &\quad g_1 \cdot \delta_{\operatorname{div} s_2 \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q \cap Z} + \omega_1 g_2 \cdot \delta_{\operatorname{div} s_3 \cap \cdots \cap \operatorname{div} s_q \cap Z} + \cdots + \omega_1 \cdots \omega_{q-1} g_q \delta_Z \\ &\qquad = \{(g_1, s_1) * \cdots * (g_q, s_q) | \delta_Z\}, \end{aligned}$$

dans $\widetilde{D}^{d,d}(X_{\mathbb{R}})$, ce qui termine la démonstration.

Plus généralement, soient $Z \in Z_q(X)$ et $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q$ des fibrés intégrables sur X. Choisissons $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_q$ et $\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_q$ des fibrés en droites admissibles sur X tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, on ait : $\overline{L}_i = \overline{E}_i \otimes (\overline{F}_i)^{-1}$.

Proposition-définition 5.5.3. *On appelle* hauteur de Z relativement à $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q$ *et on note* $h_{\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q}(Z)$ *le nombre réel défini par la formule :*

$$h_{\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q}(Z) = \sum_{\substack{S_1, S_2 \\ S_1 \cup S_2 = \{1, \ldots, q\}}} (-1)^{\# S_2} h_{\{\overline{E}_i\}_{i \in S_1}, \{\overline{F}_j\}_{j \in S_2}}(Z).$$

La hauteur $h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q}(Z)$ ainsi définie ne dépend que de Z et des classes d'isomorphie isométrique des fibrés $\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q$. Si les fibrés $\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q$ sont admissibles, elle coïncide avec la hauteur définie à la proposition (5.5.1).

Démonstration. On suit *mutatis mutandis* la démonstration de la proposition (5.3.9) en utilisant la proposition (5.5.2).

Lorsque $\overline{L} := \overline{L}_1 = \cdots = \overline{L}_q$, on convient de noter $h_{\overline{L}}(Z)$ le nombre $h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q}(Z)$ que l'on appelle alors *hauteur de Z relativement à $\overline{L}$.*

Remarque 5.5.4. Si $q = 0$, la hauteur $h_{\overline{L}}(Z)$ n'est autre que $h(Z) = \widehat{\deg}[(Z,0)]$. Dans ce cas, la fonction $h : Z_0(X) \to \mathbb{R}$ est définie par $h(P) = \log \# k(P)$.

Remarque 5.5.5. Ces définitions ont été introduites pour la première fois dans cette généralité par Zhang (cf. [Zha], th. 1.4) sous une forme différente.

Le théorème suivant rassemble diverses propriétés de la hauteur introduite à la proposition (5.5.3) :

Théorème 5.5.6. *Soient $Z \in Z_q(X)$ et $\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_{q-1},\overline{L}_q = (L_q, \|.\|_q)$ des fibrés en droites intégrables sur X. On a les propriétés suivantes :*

1. *La hauteur $h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q}(Z)$ ne dépend pas de l'ordre de $\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q$.*
2. *L'application qui à $Z \in Z_q(X)$ et $\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q$ des fibrés en droites intégrables sur X associe $h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q}(Z) \in \mathbb{R}$ définit une forme multilinéaire :*
$$Z_q(X) \times \widehat{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{int}}(X) \times \cdots \times \widehat{\mathrm{Pic}}_{\mathrm{int}}(X) \longrightarrow \mathbb{R}.$$
3. *Si les métriques des fibrés $\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q$ sont C^∞, alors on a :*
$$h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q}(Z) = \widehat{\deg}(\hat{c}_1(\overline{L}_1)\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_q)|Z),$$
où $(\cdot|\cdot)$ désigne l'accouplement défini dans ([BGS]*, §2.3).*
4. *Si Z est le diviseur d'une fonction rationnelle sur un sous-schéma intègre contenu dans une fibre fermée de X, alors $h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q}(Z) = 0$.*
5. *Pour tout morphisme $f : X \to X'$ de variétés arithmétiques, on a :*
$$h_{f^*(\overline{L}_1),\ldots,f^*(\overline{L}_q)}(Z) = h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q}(f_*(Z)).$$
6. *Soit s_q une section rationnelle de L_q au-dessus de Z qui n'est identiquement nulle sur aucune des composantes irréductibles de Z. On a la relation :*
$$h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_{q-1}}(Z\cdot \operatorname{div} s_q) = h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q}(Z) + \int_{X(\mathbb{C})} \log\|s_q\|_q\, c_1(\overline{L}_1)\cdots c_1(\overline{L}_{q-1})\cdot\delta_Z.$$
7. *On suppose que $Z = X$, et donc que $q = d+1$. On a :*
$$h_{\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_{d+1}}(X) = \widehat{\deg}(\hat{c}_1(\overline{L}_1)\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_{d+1})),$$
où $\widehat{\deg}$ désigne le degré arithmétique sur $\widehat{CH}^{d+1}_{\mathrm{int}}(X)$ introduit au §5.5.1.

Démonstration. Par (multi)linéarité on se ramène au cas où $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_q$ sont des fibrés en droites admissibles. Les assertions (1) à (3) sont alors une conséquence immédiate de la proposition (5.5.2), et les assertions (4) à (6) se déduisent directement de (5.5.2) alinéa (2) et des assertions analogues dans le cas classique (cf. [BGS], prop. 2.3.1 et 3.2.1). Enfin l'assertion (7) est une conséquence des propositions (5.3.4) et (5.3.5), et des définitions.

La proposition suivante étend à notre cadre un énoncé de Faltings (cf. [Fa], prop. 2.6) généralisé dans ([BGS], §3.2.3) :

Proposition 5.5.7. (Positivité). *Soient $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_q$ des fibrés en droites* admissibles *sur X tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant q$, il existe une puissance tensorielle positive $\overline{L}_i^{n_i}$ de $\overline{L}_i$ engendrée par ses sections globales de norme sup inférieure ou égale à 1. Pour tout cycle* effectif *$Z \in Z_q(X)$, on a :*

$$h_{\overline{L}_1,\dots,\overline{L}_q}(Z) \geqslant 0. \tag{5.26}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la dimension de Z.

Si $\dim Z = 0$, le calcul se fait aux places finies et il n'y a pas de changement avec la situation classique (voir par exemple [BGS], prop. 3.2.4).

On se place désormais dans le cas où $\dim Z > 0$.

On peut supposer que Z est irréductible et choisir une section s_q de $L_q^{n_q}$ de norme sup inférieure ou égale à 1 qui ne s'annule pas identiquement sur Z. On déduit alors de l'alinéa (6) du théorème (5.5.6) appliqué aux fibrés $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_{q-1}, \overline{L}_q^{n_q}$ que :

$$h_{\overline{L}_1,\dots,\overline{L}_{q-1}}(Z \cdot \operatorname{div} s_q) \leqslant n_q\, h_{\overline{L}_1,\dots,\overline{L}_q}(Z) \qquad \text{si} \quad q \geqslant 2$$

et

$$h(Z \cdot \operatorname{div} s_1) \leqslant n_1\, h_{\overline{L}_1}(Z) \qquad \text{si} \quad q = 1.$$

Comme $Z \cdot \operatorname{div} s_q$ est effectif de dimension $\dim Z - 1$ et que h prend des valeurs positives ou nulles sur les cycles effectifs dans $Z_0(X)$, cela implique l'inégalité (5.26) par récurrence sur $\dim Z$.

Exemple 5.5.8. Soient $\mathbb{P}(\Delta)$ une variété torique projective lisse et $\overline{E}_1, \dots, \overline{E}_q$ des fibrés en droites sur $\mathbb{P}(\Delta)$ engendrés par leurs sections globales et munis de leur métrique canonique. D'après (4.5.8) les fibrés $\overline{E}_1, \dots, \overline{E}_q$ sont admissibles et d'après la proposition (2.3.10) et l'égalité (3.4) ils sont engendrés par leurs sections globales de norme sup inférieure ou égale à 1. On déduit de la proposition (5.5.7) que pour tout cycle effectif $Z \in Z_q(\mathbb{P}(\Delta))$, on a :

$$h_{\overline{E}_1,\dots,\overline{E}_q}(Z) \geqslant 0.$$

6. Courants de Chern canoniques sur les variétés toriques

Dans cette partie et les suivantes, nous revenons à l'étude des variétés toriques projectives lisses sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.

Soit Δ un éventail régulier complet admettant une fonction support strictement concave et soient $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q$ des fibrés en droites sur $\mathbb{P}(\Delta)$ munis à l'infini de leur métrique canonique. On donne dans cette partie une expression explicite du courant :

$$c_1(\overline{L}_1)\cdots c_1(\overline{L}_q).$$

On en déduit un premier résultat de trivialité : Si l'on note :

$$\overline{A}^*_{\mathrm{f}}(\mathbb{P}(\Delta)_{\mathbb{R}}) = \operatorname{Ker}\{d : \overline{A}^*_{\mathrm{g}}(\mathbb{P}(\Delta)_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \overline{A}^*_{\mathrm{g}}(\mathbb{P}(\Delta)_{\mathbb{R}})\}$$

et

$$[\cdot] : \overline{A}^*_{\mathrm{f}}(\mathbb{P}(\Delta)_{\mathbb{R}}) \longrightarrow H^{2*}(\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}), \mathbb{R})$$

la surjection canonique induite par l'application classe en cohomologie des courants, alors on peut construire de manière canonique une section (d'anneaux) du morphisme d'anneaux $[\cdot]$.

6.1. Préliminaires.

Soit $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la fonction argument définie pour tout $z = \rho e^{i\alpha} \in \mathbb{C}^*$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{Arg}(z) = [\alpha] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Pour tout $m \in M$, on note $\operatorname{Arg}(\chi^m)$ la fonction multiforme sur $T(\mathbb{C})$ définie comme l'argument du caractère χ^m. La différentielle $d\operatorname{Arg}(\chi^m)$ a bien un sens sur $T(\mathbb{C})$ et définit un élément de $A^{1,0}(T(\mathbb{C})) \oplus A^{0,1}(T(\mathbb{C}))$. On dispose donc d'un morphisme injectif de $\mathbb{Z}$-module :

$$\begin{aligned}\Theta : M &\longrightarrow A^{1,0}(T(\mathbb{C})) \oplus A^{0,1}(T(\mathbb{C}))\\ m &\longmapsto \frac{d\operatorname{Arg}(\chi^m)}{2\pi}.\end{aligned}$$

Ce morphisme s'étend en un morphisme d'anneaux (encore noté Θ) :

$$\Theta : \textstyle\bigwedge^*_{\mathbb{Z}} M \longrightarrow \oplus_{p,q} A^{p,q}(T(\mathbb{C})),$$

où $\bigwedge^*_{\mathbb{Z}} M$ désigne l'algèbre extérieure sur $\mathbb{Z}$ de M et où la structure d'anneau sur $\oplus_{p,q} A^{p,q}(T(\mathbb{C}))$ est celle induite par le produit extérieur. Le morphisme d'anneaux Θ est injectif.

Remarque 6.1.1. Soit $f_1, \ldots, f_d$ une base de N et $f_1^*, \ldots, f_d^*$ la base duale. Pour tout $m \in M$, on a :

$$\Theta(m) = \sum_{i=1}^{d} f_i(m) \frac{d\operatorname{Arg}(\chi^{f_i^*})}{2\pi}.$$

Remarque 6.1.2. Soit $m \in M$. On a :

$$d^c \log |\chi^m|^2 = \Theta(m) \qquad \text{sur } T(\mathbb{C}).$$

Pour tout τ élément de Δ, le $\mathbb{Z}$-module $\bigwedge_{\mathbb{Z}}^{\max}(\tau^\perp \cap M)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 1. On choisit un générateur de $\bigwedge_{\mathbb{Z}}^{\max}(\tau^\perp \cap M)$ que l'on notera dans toute la suite $\mathcal{M}_\tau$. Le choix de $\mathcal{M}_\tau$ définit une orientation sur la variété réelle C_τ^{int} de la manière suivante :

On note $h = \dim \tau$. Soient $u_1, \dots, u_h$ un système de générateurs du semi-groupe $(\tau \cap N)$ que l'on complète en une base $u_1, \dots, u_d$ de N, et $v_{h+1}, \dots, v_d$ une base du $\mathbb{Z}$-module $(\tau^\perp \cap M)$ telle que $v_{h+1} \wedge \cdots \wedge v_d = \mathcal{M}_\tau$. On note $u_1^*, \dots, u_d^*$ la base duale de $u_1, \dots, u_d$. On note enfin $B(0,1) \subset \mathbb{C}$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 et $S_1 \subset \mathbb{C}$ le cercle unité. On dispose alors du difféomorphisme :

$$\begin{aligned} \eta_\tau : C_\tau^{\mathrm{int}} &\longrightarrow B(0,1)^h \times S_1^{d-h} \\ x &\longmapsto (\chi^{u_1^*}(x), \dots, \chi^{u_h^*}(x), \chi^{v_{h+1}}(x), \dots, \chi^{v_d}(x)) \end{aligned}$$

On notera $C_\tau^{\mathrm{int},+}$ la variété réelle C_τ^{int} munie de l'orientation produit des orientations naturelles sur $B(0,1)^h$ et S_1^{d-h}. Cette orientation ne dépend que du choix de $\mathcal{M}_\tau$. On peut remarquer que pour tout $\sigma \in \Delta_{\max}$, l'orientation de $C_\sigma^{\mathrm{int},+}$ coïncide avec celle induite par sa structure complexe. Par ailleurs, on a pour tout $\tau \in \Delta$ l'égalité $|\chi^{v_{h+1}}| = \cdots = |\chi^{v_d}| = 1$ sur C_τ^{int}, ce qui entraîne que la forme $\Theta(\mathcal{M}_\tau)$ est de classe C^∞ sur un voisinage de C_τ^{int}; on dispose donc du courant réel :

$$\omega \longmapsto \int_{C_\tau^{\mathrm{int},+}} \Theta(\mathcal{M}_\tau) \wedge \omega.$$

6.2. **Calcul de $c_1(\overline{L})$.**

Soit $\overline{L}$ un fibré en droites sur $\mathbb{P}(\Delta)$ muni de sa métrique canonique. On donne, dans cette section, une expression du courant $c_1(\overline{L})$.

On rappelle tout d'abord un résultat bien connu (voir par exemple [De3], §3.3).

Proposition 6.2.1. (Formule de Green). *Soit X une variété complexe de dimension d et $\Omega \subset X$ un ouvert relativement compact tel que $\overline{\Omega}$ soit une sous-variété réelle à coins de X. Soient f et g des formes différentielles de classe C^2 sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ et de bidegrés (p,p) et (q,q) avec $p+q = d-1$. On a :*

$$\int_\Omega (f \wedge dd^c g - dd^c f \wedge g) = \int_{\partial\Omega} (f \wedge d^c g - d^c f \wedge g).$$

Soit D un diviseur (horizontal) T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$ tel que $\overline{L} = \overline{\mathcal{O}(D)}_\infty$. On rappelle que pour tout $\sigma \in \Delta$, on note $m_{D,\sigma}$ l'élément de M donnant la restriction à σ de la fonction support Ψ_D de D. On a alors le théorème suivant :

Théorème 6.2.2. *Pour toute forme test $\omega \in A^{d-1,d-1}(\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}))$, on a :*

$$\int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} c_1(\overline{L}) \wedge \omega = -\sum_{\sigma \in \Delta_{\max}} \int_{\partial C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \Theta(m_{D,\sigma}) \wedge \omega.$$

Démonstration. On montre tout d'abord que les termes intervenant dans le second membre sont bien définis. Pour tout $\sigma \in \Delta_{\max}$, la forme $\Theta(m_{D,\sigma}) \wedge \omega$ est L^1 sur $\partial C_\sigma^{\mathrm{int}}$ (cela provient du fait que la forme $d\theta = d\operatorname{Arg}(z)$ est localement L^1 sur $\mathbb{C}$). La différence $\partial C_\sigma^{\mathrm{int}} \backslash (\partial C_\sigma^{\mathrm{int}} \cap T(\mathbb{C}))$ étant de codimension réelle supérieure ou égale à 2, elle est négligeable au sens de la théorie de la mesure, ce qui entraîne que l'intégrale $\int_{\partial C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \Theta(m_{D,\sigma}) \wedge \omega$ est bien définie.

Soit maintenant $\mathbf{1}$ la section (rationnelle) canonique de $\mathcal{O}(D)$. On a, d'après la formule de Poincaré-Lelong généralisée (4.5.3) l'égalité des courants :

$$c_1(\overline{L}) = c_1(\overline{\mathcal{O}(D)}_\infty) = \delta_D + (dd^c(-\log \|\mathbf{1}\|^2_{D,\infty})).$$

On en déduit que :

$$\int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} c_1(\overline{L}) \wedge \omega = \int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} \delta_D \wedge \omega + \int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} (-\log \|\mathbf{1}\|^2_{D,\infty}) \wedge dd^c\omega. \tag{6.27}$$

Comme de plus, d'après (3.3.1), on a pour tout $\sigma \in \Delta_{\max}$ et $x \in C_\sigma$ l'égalité :

$$-\log \|\mathbf{1}(x)\|^2_{D,\infty} = \log |\chi^{m_{D,\sigma}}(x)|^2,$$

on tire de (6.27) et de (3.2.9) la relation :

(6.28)
$$\int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} c_1(\overline{L}) \wedge \omega = \int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} \delta_D \wedge \omega + \sum_{\sigma \in \Delta_{\max}} \int_{C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \log |\chi^{m_{D,\sigma}}(x)|^2 \wedge dd^c\omega.$$

On fixe provisoirement $\sigma \in \Delta_{\max}$. Soit $f_1, \ldots, f_d$ une famille génératrice de σ (et donc une $\mathbb{Z}$-base de N d'après (2.2.11)); on note $f_1^*, \ldots, f_d^*$ la base duale de M. On a $m_{D,\sigma} = \sum_{i=1}^d f_i(m_{D,\sigma}) f_i^*$, ce dont on tire :

$$\log |\chi^{m_{D,\sigma}}(x)|^2 = \sum_{i=1}^d f_i(m_{D,\sigma}) \log |\chi^{f_i^*}(x)|^2.$$

Par linéarité, on ramène ainsi le calcul de l'intégrale $\int_{C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \log |\chi^{m_{D,\sigma}}(x)|^2 \wedge dd^c\omega$ à celui des intégrales $\int_{C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \log |\chi^{f_i^*}(x)|^2 \wedge dd^c\omega$. On ne perd rien en généralité en posant $i = 1$. Dans la carte affine $\varphi : U_\sigma(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^d$ donnée par $\varphi(x) = (\chi^{f_1^*}(x), \ldots, \chi^{f_d^*}(x))$, les ensembles C_σ et C_σ^{int} sont définis par les conditions :

$$C_\sigma = \{x \in \mathbb{C}^d : \quad |x_1| \leqslant 1, \ldots, |x_d| \leqslant 1\},$$

et

$$C_\sigma^{\mathrm{int}} = \{x \in \mathbb{C}^d : \quad |x_1| < 1, \ldots, |x_d| < 1\}.$$

On remarque que :

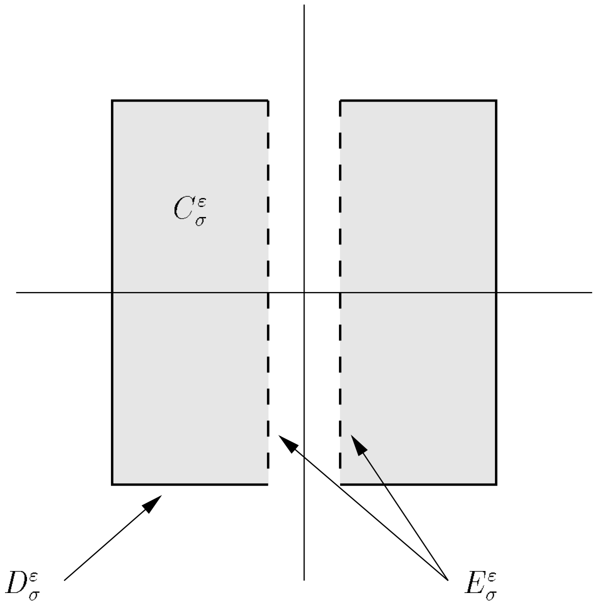
$$\partial C_\sigma = \partial C_\sigma^{\mathrm{int}} = \{x \in C_\sigma : \quad \exists i \in \{1, \dots, d\} : \quad |x_i| = 1\}.$$

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose :

$$\begin{aligned} C_\sigma^\varepsilon &= \{x \in C_\sigma^{\mathrm{int}} : \quad \varepsilon < |x_1| < 1\}, \\ D_\sigma^\varepsilon &= \{x \in \partial C_\sigma : \quad \varepsilon < |x_1| \leqslant 1\} \end{aligned}$$

et

$$E_\sigma^\varepsilon = \{x \in C_\sigma : \quad |x_1| = \varepsilon\}.$$



On a :

$$(6.29) \quad \int_{C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \log |\chi^{f_1^*}(x)|^2 \wedge dd^c\omega$$
$$= \int_{C_\sigma^\varepsilon} \log |\chi^{f_1^*}(x)|^2 \wedge dd^c\omega + \int_{C_\sigma^{\mathrm{int}} \setminus C_\sigma^\varepsilon} \log |\chi^{f_1^*}(x)|^2 \wedge dd^c\omega.$$

Comme $\log |\chi^{f_1^*}(x)|^2 = \log |x_1|^2$ est localement L^1 sur $U_\sigma(\mathbb{C})$, on a :

$$(6.30) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\sigma^{\mathrm{int}} \setminus C_\sigma^\varepsilon} \log |\chi^{f_1^*}(x)|^2 \wedge dd^c\omega = 0.$$

L'application $x \mapsto \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2$ est C^∞ sur un voisinage de C_σ^ε; il vient donc, d'après la formule de Green (6.2.1) :

$$(6.31)\quad \int_{C_\sigma^\varepsilon} \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2 \wedge dd^c\omega = \int_{C_\sigma^\varepsilon} dd^c \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2 \wedge \omega \\ + \int_{\partial C_\sigma^\varepsilon} \left(\log|\chi^{f_1^*}(x)|^2 \wedge d^c\omega - d^c \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2 \wedge \omega\right).$$

On a sur C_σ^ε l'égalité $dd^c \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2 = dd^c \log|x_1|^2 = 0$. De plus, d'après la remarque (6.1.2), on a :

$$d^c \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2 = d^c \log|x_1|^2 = \Theta(f_1^*).$$

On tire des définitions l'égalité des courants :

$$\int_{\partial C_\sigma^\varepsilon} = \int_{D_\sigma^\varepsilon} + \int_{E_\sigma^\varepsilon}$$

Comme $\log|\chi^{f_1^*}(x)|^2 = \log|x_1|^2$ est localement L^1 sur ∂C_σ, il vient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{D_\sigma^\varepsilon} \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2 \wedge d^c\omega = \int_{\partial C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2 \wedge d^c\omega.$$

De plus $\log|\chi^{f_1^*}(x)|^2 = 2\log\varepsilon$ sur E_σ^ε, et pour toute forme $\eta \in A^{2d-1}(\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}))$ on a $\int_{E_\sigma^\varepsilon} \eta = O(\varepsilon)$ quand ε tend vers 0; on en déduit que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{E_\sigma^\varepsilon} \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2 \wedge d^c\omega = 0.$$

Enfin, on a les limites :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{D_\sigma^\varepsilon} d^c \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2 \wedge \omega = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{D_\sigma^\varepsilon} \Theta(f_1^*) \wedge \omega = \int_{\partial C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \Theta(f_1^*) \wedge \omega,$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{E_\sigma^\varepsilon} d^c \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2 \wedge \omega = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{E_\sigma^\varepsilon} \frac{d\,\mathrm{Arg}(x_1)}{2\pi} \wedge \omega = \int_{C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \delta_{H_1} \wedge \omega,$$

où H_1 désigne le diviseur d'équation $\chi^{f_1^*}(x) = 0$.

En revenant au cas général ($m_{D,\sigma}$ quelconque), on déduit de (6.29), (6.30), (6.31) et des calculs de limites ci-dessus que :

$$\int_{C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \log|\chi^{m_{D,\sigma}}(x)|^2 \wedge dd^c\omega \\ = \int_{\partial C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \log|\chi^{m_{D,\sigma}}(x)|^2 \wedge d^c\omega - \int_{\partial C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \Theta(m_{D,\sigma}) \wedge \omega - \int_{C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \delta_D \wedge \omega.$$

D'après (6.28), il vient :

$$\int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} c_1(\overline{L}) \wedge \omega = \sum_{\sigma\in\Delta_{\max}} \int_{\partial C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \log|\chi^{m_{D,\sigma}}(x)|^2 \wedge d^c\omega$$
$$- \sum_{\sigma\in\Delta_{\max}} \int_{\partial C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \Theta(m_{D,\sigma}) \wedge \omega - \sum_{\sigma\in\Delta_{\max}} \int_{C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \delta_D \wedge \omega + \int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} \delta_D \wedge \omega.$$

Soient σ_1 et σ_2 deux éléments de $\Delta_{\max}$ et $\tau \in \Delta(d-1)$ une face commune de σ_1 et σ_2 (i.e. telle que $\tau < \sigma_1$ et $\tau < \sigma_2$). Du fait de la continuité de la fonction support Ψ_D, on a :

$$\log|\chi^{m_{D,\sigma_1}}(x)|^2 = \log|\chi^{m_{D,\sigma_2}}(x)|^2, \qquad (\forall x \in C_\tau). \tag{6.32}$$

Puisque Δ est complet, on a par ailleurs :

$$\sum_{\sigma\in\Delta_{\max}} \int_{\partial C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \log|\chi^{m_{D,\sigma}}(x)|^2 \wedge d^c\omega = \sum_{\substack{\sigma\in\Delta_{\max}\\ \tau\in\Delta(d-1)\\ \tau<\sigma}} \int_{C_\tau^{\mathrm{int},+}} \varepsilon_\tau(\sigma)\log|\chi^{m_{D,\sigma}}(x)|^2 \wedge d^c\omega =$$
$$\sum_{\substack{\{\sigma_1,\sigma_2\}\subset\Delta_{\max}\\ \tau=\sigma_1\cap\sigma_2\in\Delta(d-1)}} \varepsilon_\tau(\sigma_1)\left(\int_{C_\tau^{\mathrm{int},+}} \log|\chi^{m_{D,\sigma_1}}(x)|^2 \wedge d^c\omega - \int_{C_\tau^{\mathrm{int},+}} \log|\chi^{m_{D,\sigma_2}}(x)|^2 \wedge d^c\omega\right)$$

où pour tout $\sigma \in \Delta_{\max}$ et tout $\tau \in \Delta(d-1)$ tels que $\tau < \sigma$ on a posé $\varepsilon_\tau(\sigma) = 1$ si les orientations de $\partial C_\sigma^{\mathrm{int},+}$ et de $C_\tau^{\mathrm{int},+}$ sont compatibles et $\varepsilon_\tau(\sigma) = -1$ sinon.

On déduit de cela et de (6.32) que :

$$\sum_{\sigma\in\Delta_{\max}} \int_{\partial C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \log|\chi^{m_{D,\sigma}}(x)|^2 \wedge d^c\omega = 0.$$

Enfin, comme $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}}(D \cap \partial C_\sigma) \geqslant 3$, pour tout $\sigma \in \Delta_{\max}$, on a :

$$\sum_{\sigma\in\Delta_{\max}} \int_{C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \delta_D \wedge \omega = \int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} \delta_D \wedge \omega,$$

et le théorème est démontré.

Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ les éléments de $\Delta_{\max}$. Comme Δ est complet, on peut associer à tout élément τ de $\Delta(d-1)$ deux entiers $i_\tau < j_\tau$ dans $\{1, \ldots, s\}$ tels que τ soit la face commune de σ_{i_τ} et σ_{j_τ}. On munit C_τ^{int} de l'orientation compatible avec celle de $\partial C_{\sigma_{i_\tau}}^{\mathrm{int}}$ et on note $C_\tau^{\mathrm{int},++}$ la variété réelle C_τ^{int} munie de cette orientation. On peut reformuler le théorème (6.2.2) de la façon suivante :

Théorème 6.2.3. *Pour toute forme test $\omega \in A^{d-1,d-1}(\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}))$, on a :*

$$\int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} c_1(\overline{L}) \wedge \omega = \sum_{\tau\in\Delta(d-1)} \int_{C_\tau^{\mathrm{int},++}} \Theta(m_{D,\sigma_{j_\tau}} - m_{D,\sigma_{i_\tau}}) \wedge \omega.$$

6.3. **Calcul de** $c_1(\overline{L}_1)\cdots c_1(\overline{L}_q)$.

Soient $\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q$ des fibrés en droites au-dessus de $\mathbb{P}(\Delta)$ et munis sur $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ de leur métrique canonique. Le théorème suivant donne une expression du produit $c_1(\overline{L}_1)\cdots c_1(\overline{L}_q)$.

Théorème 6.3.1. *Soient $\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q$ des fibrés en droites au-dessus de $\mathbb{P}(\Delta)$ munis de leur métrique canonique.*

1. *Il existe une famille d'entiers $(a_\tau(\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q))_{\tau\in\Delta(d-q)}$ telle que, pour toute forme test $\omega\in A^{d-q,d-q}(\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}))$, on ait :*

$$\int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} c_1(\overline{L}_1)\wedge\cdots\wedge c_1(\overline{L}_q)\wedge\omega=\sum_{\tau\in\Delta(d-q)} a_\tau(\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q)\int_{C_\tau^{\mathrm{int},+}}\Theta(\mathcal{M}_\tau)\wedge\omega.$$

   Les entiers $a_\tau(\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q)$ sont définis de manière unique par cette égalité.

2. *Les entiers $a_\tau(\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q)$ vérifient les relations suivantes : Pour tout $\sigma\in\Delta(d-q-1)$, on a :*

$$\sum_{\substack{\tau>\sigma\\ \tau\in\Delta(d-q)}}\varepsilon_\sigma(\tau)a_\tau(\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q)\mathcal{M}_\tau=0;$$

   où $\varepsilon_\sigma(\tau)=1$ si les orientations de $\partial C_\tau^{\mathrm{int},+}$ et de $C_\sigma^{\mathrm{int},+}$ sont compatibles, et $\varepsilon_\sigma(\tau)=-1$ sinon.

3. *On suppose que $d<q$ et que $\overline{L}$ est un fibré en droites au-dessus de $\mathbb{P}(\Delta)$ muni de sa métrique canonique. On note D un diviseur horizontal T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$ tel que $\overline{L}=\overline{\mathcal{O}(D)}_\infty$. On a :*

$$a_\sigma(\overline{L},\overline{L}_1,\ldots,L_q)\mathcal{M}_\sigma=-\sum_{\substack{\tau>\sigma\\ \tau\in\Delta(d-q)}}\varepsilon_\sigma(\tau)a_\tau(\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q)\, m_{D,\tau}\wedge\mathcal{M}_\tau.$$

Démonstration. On remarque tout de suite que l'unicité des entiers $a_\tau(\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q)$ est une conséquence directe de la proposition (3.2.9) et du fait que le support du courant réel $\omega\mapsto\int_{C_\tau^{\mathrm{int},+}}\Theta(\mathcal{M}_\tau)\wedge\omega$ est C_τ.

D'après le théorème (6.2.3), les assertions (1) et (2) sont vraies pour $q=1$. On va montrer que si (1) et (2) sont vraies au rang q, alors (1) est vraie au rang $q+1$, (3) est vraie au rang q, et enfin (2) est vraie au rang $q+1$.

D'après le (1), on peut trouver une famille d'entiers $(a_\tau(\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q))_{\tau\in\Delta(d-q)}$ telle que :

$$\int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} c_1(\overline{L}_1)\wedge\cdots\wedge c_1(\overline{L}_q)\wedge\omega=\sum_{\tau\in\Delta(d-q)} a_\tau(\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q)\int_{C_\tau^{\mathrm{int},+}}\Theta(\mathcal{M}_\tau)\wedge\omega.$$

Comme d'après (3.3.1), on a pour tout $\sigma\in D$:

$$-\log\|\mathbf{1}(x)\|^2_{D,\infty}=\log|\chi^{m_{D,\sigma}}(x)|^2,\qquad(\forall x\in C_\sigma).$$

On déduit de la formule de Poincaré-Lelong généralisée (4.5.3) et de la formule de Green l'égalité :

$$
\begin{aligned}
(6.33)\quad & \int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} c_1(\overline{L}) \wedge c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_q) \wedge \omega \\
&= \int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} (dd^c(-\log \|\mathbf{1}(x)\|^2_{D,\infty}) + \delta_D) \wedge c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_q) \wedge \omega \\
&= \int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} (-\log \|\mathbf{1}(x)\|^2_{D,\infty})\, c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_q) \wedge dd^c\omega \\
&\qquad + \int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} \delta_D \wedge c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_q) \wedge \omega \\
&= \sum_{\tau \in \Delta(d-q)} a_\tau(\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q) \int_{C_\tau^{\mathrm{int},+}} \log |\chi^{m_{D,\tau}}(x)|^2\ \Theta(\mathcal{M}_\tau) \wedge dd^c\omega \\
&\qquad + \sum_{\tau \in \Delta(d-q)} a_\tau(\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_q) \int_{C_\tau^{\mathrm{int},+}} \delta_{D\cap C_\tau^{\mathrm{int}}} \wedge \Theta(\mathcal{M}_\tau) \wedge \omega.
\end{aligned}
$$

(Dans le dernier terme, on a utilisé le fait que D et C_τ^{int} s'intersectent de manière transverse).

Nous allons calculer les intégrales du type :

$$I_\tau(m_{D,\tau}) = \int_{C_\tau^{\mathrm{int},+}} \log |\chi^{m_{D,\tau}}(x)|^2\ \Theta(\mathcal{M}_\tau) \wedge dd^c\omega.$$

Fixons momentanément $\tau \in \Delta(d-q)$ et considérons $\sigma \in \Delta_{\max}$ tel que $\tau < \sigma$. Soient $f_1, \ldots, f_d$ un système de générateurs du semi-groupe $(\sigma \cap N)$ tels que $f_1, \ldots, f_{d-q}$ engendrent le semi-groupe $(\tau \cap N)$ et tels que $f^*_{d-q+1} \wedge \cdots \wedge f^*_d = \mathcal{M}_\tau$. Comme Δ est régulier, la famille $f^*_1, \ldots, f^*_d$ forme une $\mathbb{Z}$-base de M.

Par linéarité, il suffit de calculer $I_\tau(m_{D,\tau})$ pour $m_{D,\tau} = f^*_i$ avec $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Pour $i \in \{d-q+1, \ldots, d\}$, on a $|\chi^{f^*_i}(x)| = 1$ pour tout $x \in C_\tau$, et donc $I_\tau(f^*_i) = 0$.

On choisit maintenant $i \in \{1, \ldots, d-q\}$. On ne perd rien en généralité en supposant $i = 1$.

Dans la carte affine $\varphi : U_\sigma(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^d$ donnée par $\varphi(x) = (\chi^{f^*_1}(x), \ldots, \chi^{f^*_d}(x))$, les ensembles C_τ et C_τ^{int} sont définis par les conditions :

$$C_\tau = \{x \in \mathbb{C}^d : \quad |x_1| \leqslant 1, \ldots, |x_{d-q}| \leqslant 1, |x_{d-q+1}| = 1, \ldots, |x_d| = 1\}$$

et

$$C_\tau^{\mathrm{int}} = \{x \in \mathbb{C}^d : \quad |x_1| < 1, \ldots, |x_{d-q}| < 1, |x_{d-q+1}| = 1, \ldots, |x_d| = 1\}.$$

On remarque que :

$$\partial C_\tau = \partial C_\tau^{\mathrm{int}} = \{x \in C_\tau : \quad \exists i \in \{1, \ldots, d-q\} : \quad |x_i| = 1\}.$$

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose :

$$C_\tau^\varepsilon = \{x \in C_\tau^{\mathrm{int}} : \quad \varepsilon < |x_1| < 1\},$$
$$D_\tau^\varepsilon = \{x \in \partial C_\tau : \quad \varepsilon < |x_1| \leqslant 1\}$$

et

$$E_\tau^\varepsilon = \{x \in C_\tau : \quad |x_1| = \varepsilon\}.$$

On a :

$$(6.34) \quad I_\tau(f_1^*) = \int_{C_\tau^\varepsilon} \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2\, \Theta(\mathcal{M}_\tau) \wedge dd^c\omega + \int_{C_\tau^{\mathrm{int},+}\setminus C_\tau^\varepsilon} \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2\, \Theta(\mathcal{M}_\tau) \wedge dd^c\omega.$$

Comme $\log|\chi^{f_1^*}(x)|^2\, \Theta(\mathcal{M}_\tau) = \log|x_1|^2\, \Theta(\mathcal{M}_\tau)$ est localement L^1 sur C_τ, on a :

$$(6.35) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\tau^{\mathrm{int},+}\setminus C_\tau^\varepsilon} \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2\, \Theta(\mathcal{M}_\tau) \wedge dd^c\omega = 0.$$

Puisque $|\chi^{f_{d-q+1}^*}(x)| = \cdots = |\chi^{f_d^*}(x)| = 1$ pour tout $x \in C_\tau$ et que $\mathcal{M}_\tau \in \bigwedge_{\mathbb{Z}}^{\max}(\tau^\perp \cap M)$, la forme $\Theta(\mathcal{M}_\tau)$, et donc l'application $x \mapsto \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2\, \Theta(\mathcal{M}_\tau)$, sont C^∞ sur un voisinage de C_τ^ε. On peut donc appliquer la formule de Green (6.2.1) et en déduire l'égalité :

$$(6.36) \quad \int_{C_\tau^\varepsilon} \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2\, \Theta(\mathcal{M}_\tau) \wedge dd^c\omega = \int_{C_\tau^\varepsilon} dd^c\left(\log|\chi^{f_1^*}(x)|^2\, \Theta(\mathcal{M}_\tau)\right) \wedge \omega + \int_{\partial C_\tau^\varepsilon} \left(\log|\chi^{f_1^*}(x)|^2\, \Theta(\mathcal{M}_\tau) \wedge d^c\omega - d^c(\log|\chi^{f_1^*}(x)|^2\, \Theta(\mathcal{M}_\tau)) \wedge \omega\right).$$

En remarquant que $d\Theta(\mathcal{M}_\tau) = d^c\Theta(\mathcal{M}_\tau) = 0$, on a sur C_τ^ε :

$$dd^c(\log|\chi^{f_1^*}(x)|^2 \wedge \Theta(\mathcal{M}_\tau)) = dd^c(\log|\chi^{f_1^*}(x)|^2)\Theta(\mathcal{M}_\tau) = 0$$

et

$$\begin{aligned} d^c(\log|\chi^{f_1^*}(x)|^2\, \Theta(\mathcal{M}_\tau)) &= d^c(\log|\chi^{f_1^*}(x)|^2) \wedge \Theta(\mathcal{M}_\tau) \\ &= \Theta(f_1^*) \wedge \Theta(\mathcal{M}_\tau) = \Theta(f_1^* \wedge \mathcal{M}_\tau). \end{aligned}$$

On tire des définitions l'égalité des courants :

$$(6.37) \qquad \int_{\partial C_\tau^\varepsilon} = \int_{D_\tau^\varepsilon} + \int_{E_\tau^\varepsilon}$$

Comme $\log|\chi^{f_1^*}(x)|^2\, \Theta(\mathcal{M}_\tau)$ est localement L^1 sur ∂C_τ, il vient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{D_\tau^\varepsilon} \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2\, \Theta(\mathcal{M}_\tau) \wedge d^c\omega = \int_{\partial C_\tau^{\mathrm{int},+}} \log|\chi^{f_1^*}(x)|^2\, \Theta(\mathcal{M}_\tau) \wedge d^c\omega.$$

De plus, $\log|\chi^{f_1^*}(x)|^2 = 2\log\varepsilon$ sur E_τ^ε, la forme $\Theta(\mathcal{M}_\tau)$ est C^∞ sur un voisinage de C_τ, et pour toute forme $\eta \in A^{2d-q-1}(\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}))$ on a $\int_{E_\tau^\varepsilon}\eta = O(\varepsilon)$ quand ε tend vers 0; on en déduit que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{E_\tau^\varepsilon}\log|\chi^{f_1^*}(x)|^2\ \Theta(\mathcal{M}_\tau)\wedge d^c\omega = 0.$$

Enfin, puisque $\Theta(f_1^*) = d\operatorname{Arg}(x_1)/2\pi$ et la forme $\Theta(\mathcal{M}_\tau)$ est C^∞ sur un voisinage de C_τ, on a les limites :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D_\tau^\varepsilon}\Theta(f_1^*\wedge\mathcal{M}_\tau)\wedge\omega = \int_{\partial C_\tau^{\mathrm{int},+}}\Theta(f_1^*\wedge\mathcal{M}_\tau)\wedge\omega$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{E_\tau^\varepsilon}\Theta(f_1^*\wedge\mathcal{M}_\tau)\wedge\omega = \int_{C_\tau^{\mathrm{int},+}}\delta_{H_1\cap C_\tau^{\mathrm{int}}}\wedge\Theta(\mathcal{M}_\tau)\wedge\omega,$$

où H_1 désigne le diviseur d'équation $\chi^{f_1^*}(x) = 0$.

En revenant au cas général (i.e. $m_{D,\tau}$ quelconque), on déduit de (6.34), (6.35), (6.37) et des calculs de limites ci-dessus que :

$$\begin{aligned} I_\tau(m_{D,\tau}) = \int_{\partial C_\tau^{\mathrm{int},+}} &\log|\chi^{m_{D,\tau}}(x)|^2\ \Theta(\mathcal{M}_\tau)\wedge d^c\omega \\ &- \int_{\partial C_\tau^{\mathrm{int},+}}\Theta(m_{D,\tau}\wedge\mathcal{M}_\tau)\wedge\omega - \int_{C_\tau^{\mathrm{int},+}}\delta_{D\cap C_\tau^{\mathrm{int}}}\wedge\Theta(\mathcal{M}_\tau)\wedge\omega. \end{aligned}$$

(On a utilisé ici le fait que pour tout $i\in\{d-q+1,\dots,d\}$, on a $f_i^*\wedge\mathcal{M}_\tau = 0$). En utilisant (6.33) il vient :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} c_1(\overline{L})\wedge c_1(\overline{L}_1)\wedge\cdots\wedge c_1(\overline{L}_q)\wedge\omega \\ &\quad= \sum_{\tau\in\Delta(d-q)} a_\tau(\overline{L}_1,\dots,\overline{L}_1)\int_{\partial C_\tau^{\mathrm{int},+}}\log|\chi^{m_{D,\tau}}(x)|^2\ \Theta(\mathcal{M}_\tau)\wedge d^c\omega \\ &\qquad\qquad - \sum_{\tau\in\Delta(d-q)} a_\tau(\overline{L}_1,\dots,\overline{L}_1)\int_{\partial C_\tau^{\mathrm{int},+}}\Theta(m_{D,\tau}\wedge\mathcal{M}_\tau)\wedge\omega. \end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau\in\Delta(d-q)} a_\tau(\overline{L}_1,\dots,\overline{L}_1)\int_{\partial C_\tau^{\mathrm{int},+}}\log|\chi^{m_{D,\tau}}(x)|^2\ \Theta(\mathcal{M}_\tau)\wedge d^c\omega \\ &= \sum_{\sigma\in\Delta(d-q-1)}\int_{C_\sigma^{\mathrm{int},+}}\Theta\left(\sum_{\substack{\tau>\sigma\\ \tau\in\Delta(d-q)}}\varepsilon_\sigma(\tau)a_\tau(\overline{L}_1,\dots,\overline{L}_q)\ \mathcal{M}_\tau\right)\wedge(\log|\chi^{m_{D,\sigma}}(x)|^2 d^c\omega) = 0 \end{aligned}$$

d'après l'assertion (2). On a donc :

$$\int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} c_1(\overline{L}) \wedge c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_q) \wedge \omega$$
$$= \sum_{\sigma \in \Delta(d-q-1)} \int_{C_\sigma^{\mathrm{int},+}} \Theta \left(- \sum_{\substack{\tau > \sigma \\ \tau \in \Delta(d-q)}} \varepsilon_\sigma(\tau) a_\tau(\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_q)\, m_{D,\tau} \wedge \mathcal{M}_\tau \right) \wedge \omega.$$

Pour établir (1) au rang $q+1$ et (3) au rang q, il suffit maintenant de prouver que pour tout $\sigma \in \Delta(d-q-1)$ il existe un entier $a_\sigma(\overline{L}, \overline{L}_1, \dots, \overline{L}_q)$ tel que :

$$a_\sigma(\overline{L}, \overline{L}_1, \dots, \overline{L}_q)\, \mathcal{M}_\sigma = - \sum_{\substack{\tau > \sigma \\ \tau \in \Delta(d-q)}} \varepsilon_\sigma(\tau) a_\tau(\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_q)\, m_{D,\tau} \wedge \mathcal{M}_\tau.$$

Soit $\sigma \in \Delta(d-q-1)$ et $\tau_0 \in \Delta(d-q)$ tel que $\sigma < \tau_0$. On déduit de l'assertion (2) au rang q que l'on a :

$$\sum_{\substack{\tau > \sigma \\ \tau \in \Delta(d-q)}} \varepsilon_\sigma(\tau) a_\tau(\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_q)\, m_{D,\tau_0} \wedge \mathcal{M}_\tau = 0.$$

On a donc :

$$\sum_{\substack{\tau > \sigma \\ \tau \in \Delta(d-q)}} \varepsilon_\sigma(\tau) a_\tau(\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_q)\, m_{D,\tau} \wedge \mathcal{M}_\tau$$
$$= \sum_{\substack{\tau > \sigma \\ \tau \in \Delta(d-q)}} \varepsilon_\sigma(\tau) a_\tau(\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_q)\, (m_{D,\tau} - m_{D,\tau_0}) \wedge \mathcal{M}_\tau.$$

Or, comme la fonction support Ψ_D est continue en σ, on a $(m_{D,\tau} - m_{D,\tau_0}) \in \sigma^\perp \cap M$ pour tout $\tau \in \Delta(d-q)$ tel que $\tau > \sigma$, et donc $(m_{D,\tau} - m_{D,\tau_0}) \wedge \mathcal{M}_\tau \in \mathbb{Z}\mathcal{M}_\sigma$.

Montrons enfin que (2) est vraie au rang $q+1$.

Soit $\sigma' \in \Delta(d-q-2)$. D'après le (3), on a :

$$\sum_{\substack{\sigma > \sigma' \\ \sigma \in \Delta(d-q-1)}} \varepsilon_{\sigma'}(\sigma) a_\sigma(\overline{L}, \overline{L}_1, \dots, \overline{L}_q)\, \mathcal{M}_\sigma$$
$$= - \sum_{\substack{\sigma > \sigma' \\ \sigma \in \Delta(d-q-1)}} \sum_{\substack{\tau > \sigma \\ \tau \in \Delta(d-q)}} \varepsilon_{\sigma'}(\sigma) \varepsilon_\sigma(\tau) a_\tau(\overline{L}, \overline{L}_1, \dots, \overline{L}_q)\, m_{D,\tau} \wedge \mathcal{M}_\tau$$
$$= - \sum_{\substack{\tau > \sigma' \\ \tau \in \Delta(d-q)}} a_\tau(\overline{L}, \overline{L}_1, \dots, \overline{L}_q) \left(\sum_{\substack{\sigma \in \Delta(d-q-1) \\ \tau > \sigma > \sigma'}} \varepsilon_{\sigma'}(\sigma) \varepsilon_\sigma(\tau) \right) m_{D,\tau} \wedge \mathcal{M}_\tau.$$

Or pour tout $\tau \in \Delta(d-q)$ tel que $\tau > \sigma'$, on a :

$$\sum_{\substack{\sigma\in\Delta(d-q-1)\\ \tau>\sigma>\sigma'}} \varepsilon_{\sigma'}(\sigma)\varepsilon_{\sigma}(\tau) = 0,$$

du fait de la relation $\partial\circ\partial = 0$ dans le complexe simplicial associé à la triangulation de $\mathcal{S}^{d-1}$ induite par $\Delta\backslash\{0\}$.

Le théorème est donc démontré.

Remarque 6.3.2. Pour tout couple d'entiers positifs (p,q), on introduit le $\mathbb{Z}$-module :

$$C^q(\Delta,p) = \bigoplus_{\tau\in\Delta(d-q)} \bigwedge\nolimits^p(\tau^\perp).$$

On définit également un cobord $d : C^q(\Delta,p) \to C^{q+1}(\Delta,p)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} d : C^q(\Delta,p) &\longrightarrow C^{q+1}(\Delta,p)\\ \bigoplus_{\tau\in\Delta(d-q)} x_\tau &\longmapsto \bigoplus_{\sigma\in\Delta(d-q-1)} \left(\sum_{\substack{\tau>\sigma\\ \tau\in\Delta(d-q)}} \varepsilon_\sigma(\tau)x_\tau\right). \end{aligned}$$

Danilov a démontré (cf. [Da], 12.4.1) que le $q^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie du complexe $(C^*(\Delta,p)\otimes\mathbb{C}, d)$ est isomorphe à $H^{p,q}(\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}))$. En reprenant les notations du théorème (6.3.1), on peut associer au courant $c_1(\overline{L}_1)\cdots c_1(\overline{L}_q)$ un élément $C(\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q)$ de $C^q(\Delta,q)$ défini par :

$$C(\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q) = \bigoplus_{\tau\in\Delta(d-q)} a_\tau(\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q)\,\mathcal{M}_\tau.$$

D'après l'alinéa (2) de (6.3.1), on a $dC(\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q) = 0$; et donc $C(\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q)$ définit un élément de $H^{q,q}(\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}))$ dont on peut montrer qu'il coïncide avec la classe $c_1(L_1)\cdots c_1(L_q)$ par l'isomorphisme évoqué précédemment. On retrouve ainsi grâce au (3) du théorème (6.3.1) la structure multiplicative de $H^{2*}(\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}))$.

Remarque 6.3.3. Comme l'éventail Δ est régulier, la famille d'entiers $(a_\tau(\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q))_{\tau\in\Delta(d-q)}$ est un *poids de Minkowski* de codimension q de Δ au sens de [FS].

On déduit immédiatement du théorème (6.3.1) le corollaire :

Corollaire 6.3.4. *Soient $\overline{L}_1,\ldots,\overline{L}_q$ des fibrés en droites au-dessus de $\mathbb{P}(\Delta)$ munis à l'infini de leur métrique canonique; on a :*

$$\mathrm{Supp}(c_1(\overline{L}_1)\cdots c_1(\overline{L}_q)) \subset \bigcup_{\tau\in\Delta(d-q)} C_\tau.$$

On note $\mathcal{S}_N^+ = C_{\{0\}}^{\mathrm{int},+}$ le tore compact $\mathcal{S}_N$ muni de l'orientation canonique induite par le choix de $\mathcal{M}_{\{0\}}$, et $d\mu^+$ la forme volume canonique $\Theta(\mathcal{M}_{\{0\}})$. On peut alors énoncer un second corollaire :

Corollaire 6.3.5. *Soient $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_d$ des fibrés en droites au-dessus de $\mathbb{P}(\Delta)$ munis à l'infini de leur métrique canonique; pour toute fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$, on a :*

$$\int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} f\, c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_d) = \deg(c_1(L_1) \cdots c_1(L_d)) \int_{\mathcal{S}_N^+} f\, d\mu^+.$$

Démonstration. D'après le théorème (6.3.1), il existe une constante $a_{\{0\}}(\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_d) \in \mathbb{Z}$ telle que :

$$\int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} f\, c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_d) = a_{\{0\}}(\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_d) \int_{\mathcal{S}_N^+} f\, d\mu^+.$$

On prend $f = 1$ et le résultat découle alors directement de (4.7.6).

Remarque 6.3.6. En prenant $\overline{L} = \overline{L}_1 = \cdots = \overline{L}_d$ dans le corollaire (6.3.5), on constate que la métrique canonique $\|.\|_{L,\infty}$ est une solution au premier problème de Calabi pour la forme volume singulière $\delta_{\mathcal{S}_N^+} \wedge d\mu^+$ sur $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$.

Remarque 6.3.7. Soient $K_1, \dots, K_d$ des polytopes convexes de $M_\mathbb{R}$ à sommets dans M tels que $K = K_1 + \cdots + K_d$ soit d'intérieur non vide. Soient Δ' un raffinement régulier de Δ l'éventail associé à K comme au théorème (2.4.1) et à la remarque (2.4.4), et $E_1', \dots, E_d'$ les diviseurs horizontaux invariants sur $\mathbb{P}(\Delta')$ associés à $K_1, \dots, K_d$ respectivement comme au (2.4.4). En remarquant que le calcul de $c_1(\overline{E}'_{1,\infty}) \cdots c_1(\overline{E}'_{d,\infty})$ ne nécessite pas de connaître Δ' mais seulement Δ et les fonctions supports $\psi_{K_1}, \dots, \psi_{K_d}$, on déduit du théorème (6.3.1) un algorithme efficace pour le calcul du volume mixte :

$$V(K_1, \dots, K_d) = \frac{1}{d!} \deg(c_1(\overline{E}'_{1,\infty}) \cdots c_1(\overline{E}'_{d,\infty})).$$

6.4. **Diviseurs élémentaires.**

Dans ce paragraphe on établit un raffinement de (6.3.4) dans le cas où les fibrés en droites considérés sont des faisceaux associés à des diviseurs invariants élémentaires. Cela nous permet de construire de manière canonique une section du morphisme d'anneaux : $[\cdot] : \overline{A}_{\mathrm{f}}^*(\mathbb{P}(\Delta)_\mathbb{R}) \to H^{2*}(\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}), \mathbb{R})$.

Théorème 6.4.1. *Soient $D_1 = V(\tau_1), \dots, D_q = V(\tau_q)$ pour $q \leqslant d$ des diviseurs invariants élémentaires; on a :*

$$\mathrm{Supp}(c_1(\overline{\mathcal{O}(D_1)}_\infty) \cdots c_1(\overline{\mathcal{O}(D_q)}_\infty)) \subset \bigcup_{\substack{\tau \in \Delta(d-q) \\ \tau < \sigma \in \Delta_{\max} \\ \sigma > \tau_1, \dots, \tau_q}} C_\tau.$$

Démonstration. On suppose dans un premier temps que $q = 1$. Par définition, la fonction support Ψ_{D_1} de D_1 est nulle sur tout cône maximal $\sigma \in \Delta_{\max}$ ne contenant pas τ_1. L'énoncé pour $q = 1$ est alors une simple conséquence du théorème (6.2.3).

On suppose maintenant que $q > 1$. Le support du courant $c_1(\overline{\mathcal{O}(D_1)_\infty}) \cdots c_1(\overline{\mathcal{O}(D_q)_\infty})$ est inclus dans celui de $c_1(\overline{\mathcal{O}(D_1)_\infty})$ (on peut voir cela en approchant la métrique canonique sur $\mathcal{O}(D_1)$ par une métrique C^∞). On déduit de ce qui précède et du théorème (6.3.1) que :

$$\operatorname{Supp}(c_1(\overline{\mathcal{O}(D_1)_\infty}) \cdots c_1(\overline{\mathcal{O}(D_q)_\infty})) \subset \bigcup_{\substack{\tau \in \Delta(d-q) \\ \tau < \sigma \in \Delta_{\max} \\ \sigma > \tau_1}} C_\tau.$$

Le courant $c_1(\overline{\mathcal{O}(D_1)_\infty}) \cdots c_1(\overline{\mathcal{O}(D_q)_\infty})$ étant indépendant de l'ordre des diviseurs $D_1, \ldots, D_q$, il vient :

$$\operatorname{Supp}(c_1(\overline{\mathcal{O}(D_1)_\infty}) \cdots c_1(\overline{\mathcal{O}(D_q)_\infty})) \subset \bigcup_{\substack{\tau \in \Delta(d-q) \\ \tau < \sigma \in \Delta_{\max} \\ \sigma > \tau_1, \ldots, \tau_q}} C_\tau.$$

On a alors le corollaire suivant :

Corollaire 6.4.2. *Soient $D_1 = V(\tau_1), \ldots, D_q = V(\tau_q)$ pour $q \leqslant d$, des diviseurs invariants élémentaires tels que $D_1 \cdots D_q = 0$ dans $CH^*(\mathbb{P}(\Delta))$ (i.e. tels que le cône $\tau = \mathbb{R}^+\tau_1 + \cdots + \mathbb{R}^+\tau_q$ ne soit pas un élément de Δ). On a :*

$$c_1(\overline{\mathcal{O}(D_1)_\infty}) \cdots c_1(\overline{\mathcal{O}(D_q)_\infty}) = 0.$$

Démonstration. Comme $\tau \notin \Delta$, on ne peut pas trouver $\sigma \in \Delta_{\max}$ tel que $\tau_1, \ldots, \tau_q$ soient des faces de σ (sinon τ serait une face de σ, et donc un élément de Δ). On déduit de (6.4.1) que $\operatorname{Supp}(c_1(\overline{\mathcal{O}(D_1)_\infty}) \cdots c_1(\overline{\mathcal{O}(D_q)_\infty})) = \emptyset$, et donc que $c_1(\overline{\mathcal{O}(D_1)_\infty}) \cdots c_1(\overline{\mathcal{O}(D_q)_\infty}) = 0$.

On déduit de (6.4.2) et des théorèmes (2.5.7) et (6.2.3) qu'il existe un morphisme d'anneaux :

$$\varsigma : H^{2*}(\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}), \mathbb{R}) \longrightarrow \overline{A}_{\mathrm{f}}^*(\mathbb{P}(\Delta)_{\mathbb{R}})$$

tel que pour tout q-uplet $(D_1, \ldots, D_q)$ de diviseurs T-invariants sur $\mathbb{P}(\Delta)$, on ait :

$$\varsigma(c_1(\mathcal{O}(D_1)) \cdots c_1(\mathcal{O}(D_q))) = c_1(\overline{\mathcal{O}(D_1)_\infty}) \cdots c_1(\overline{\mathcal{O}(D_q)_\infty}).$$

D'après (4.7.6), ς est une section du morphisme classe $[\cdot]$.

Remarque 6.4.3. Soit $\mathcal{A}^q(\Delta)$ le groupe des poids de Minkowski de codimension q pour Δ tel qu'il est défini dans [FS]. On note $\xi : \mathcal{A}^q(\Delta) \to \overline{A}_{\mathrm{f}}^q(\mathbb{P}(\Delta)_{\mathbb{R}})$ le morphisme de groupes défini par l'identité :

$$\xi(\oplus_{\tau\in\Delta(d-q)}a_\tau) = \sum_{\tau\in\Delta(d-q)} a_\tau \int_{C_\tau^{\mathrm{int},+}} \Theta(\mathcal{M}_\tau)\wedge\cdot$$

On note également ξ le morphisme $\mathcal{A}^q(\Delta)\otimes\mathbb{R}\to\overline{A}_{\mathrm{f}}^q(\mathbb{P}(\Delta)_{\mathbb{R}})$ obtenu par extension des scalaires à partir de ξ. On peut alors factoriser l'application ς de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^q(\Delta)\otimes\mathbb{R} \arrow[r, "\xi"] & \overline{A}_{\mathrm{f}}^q(\mathbb{P}(\Delta)_{\mathbb{R}}) \\ H^{2*}(\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}),\mathbb{R}) \arrow[u, "\tilde{\varsigma}"] \arrow[ur, "\varsigma"'] & \end{tikzcd}$$

D'après la remarque (6.3.2), le morphisme $\tilde{\varsigma}$ est un isomorphisme; de plus il induit par restriction un isomorphisme d'anneaux gradués :

$$\tilde{\varsigma} : H^{2*}(\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{A}^*(\Delta).$$

L'alinéa (3) du théorème (6.3.1) redonne la structure multiplicative de $\mathcal{A}^*(\Delta)$ induite comme dans [FS] par la structure d'anneau naturelle de l'anneau de Chow opératoriel de $\mathbb{P}(\Delta)$. On retrouve ainsi , sous une forme différente, certains résultats de [FS].

7. Géométrie d'Arakelov des variétés toriques

Dans toute cette partie, $\mathbb{P}(\Delta)$ désigne une variété torique projective lisse de dimension absolue $d+1$.

On montre tout d'abord que les multihauteurs "canoniques" de $\mathbb{P}(\Delta)$ (c'est-à-dire celles relatives à des fibrés en droites munis de leur métrique canonique) sont nulles. On en déduit un résultat remarquable : La hauteur d'une hypersurface dans $\mathbb{P}(\Delta)$ relativement à un fibré en droites muni de sa métrique canonique est essentiellement donnée par la *mesure de Mahler* du polynôme qui la définit.

On construit enfin de manière canonique une section du morphisme d'anneaux :

$$\zeta : \widehat{CH}^*_{\mathrm{int}}(X) \longrightarrow CH^*(X).$$

L'existence d'une section canonique pour ζ étend les énoncés d'annulations de nombres arithmétiques obtenus dans un premier temps et conduit à une description de la structure de l'anneau $\widehat{CH}^*_{\mathrm{int}}(X)$.

7.1. **Annulation des multihauteurs.**

L'énoncé suivant est un cas particulier de ([Zha], th. 2.4). On peut également consulter ([Zha], conj. 2.5, 2.6 et th. 2.9) pour des énoncés proches de celui-ci.

Proposition 7.1.1. *Soient $\overline{L}_{1,\infty},\dots,\overline{L}_{d+1,\infty}$ des fibrés en droites sur $\mathbb{P}(\Delta)$ munis de leur métrique canonique. On a :*

$$h_{\overline{L}_{1,\infty},\dots,\overline{L}_{d+1,\infty}}(\mathbb{P}(\Delta))=0.$$

En particulier, pour tout fibré en droites sur $\mathbb{P}(\Delta)$ muni de sa métrique canonique $\overline{L}_{\infty}$, on a :

$$h_{\overline{L}_{\infty}}(\mathbb{P}(\Delta))=0.$$

Démonstration. Soit p un entier strictement supérieur à 1 et considérons l'endomorphisme $[p]:\mathbb{P}(\Delta)\to\mathbb{P}(\Delta)$ défini au (2.2.18). D'après la proposition (3.4.2), on a pour tout $1\leqslant i\leqslant d+1$:

$$[p]^*(\overline{L}_{i,\infty})\simeq(\overline{L}_{i,\infty})^p.$$

On tire de cela que pour tout $1\leqslant i\leqslant d+1$,

$$\hat{c}_1([p]^*(\overline{L}_{i,\infty}))=\hat{c}_1((\overline{L}_{i,\infty})^p)=p\,\hat{c}_1(\overline{L}_{i,\infty}).$$

On obtient donc :

$$\widehat{\deg}(\hat{c}_1([p]^*(\overline{L}_{1,\infty}))\cdots\hat{c}_1([p]^*(\overline{L}_{d+1,\infty})))\\ =p^{d+1}\,\widehat{\deg}(\hat{c}_1(\overline{L}_{1,\infty})\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_{d+1,\infty})). \tag{7.38}$$

D'autre part, on a d'après les alinéas (5) et (7) du théorème (5.5.6) :

$$\begin{aligned}&\widehat{\deg}(\hat{c}_1([p]^*(\overline{L}_{1,\infty}))\cdots\hat{c}_1([p]^*(\overline{L}_{d+1,\infty})))\\ &\qquad=h_{[p]^*(\overline{L}_{1,\infty}),\dots,[p]^*(\overline{L}_{d+1,\infty})}(\mathbb{P}(\Delta))\\ &\qquad=h_{\overline{L}_{1,\infty},\dots,\overline{L}_{d+1,\infty}}([p]_*\mathbb{P}(\Delta))\\ &\qquad=p^d h_{\overline{L}_{1,\infty},\dots,\overline{L}_{d+1,\infty}}(\mathbb{P}(\Delta))\\ &\qquad=p^d\,\widehat{\deg}(\hat{c}_1(\overline{L}_{1,\infty})\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_{d+1,\infty})).\end{aligned} \tag{7.39}$$

Comme $p>1$, la conjonction de (7.38) et de (7.39) implique que :

$$h_{\overline{L}_{1,\infty},\dots,\overline{L}_{d+1,\infty}}(\mathbb{P}(\Delta))=\widehat{\deg}(\hat{c}_1(\overline{L}_{1,\infty})\cdots\hat{c}_1(\overline{L}_{d+1,\infty}))=0.$$

7.2. Hauteurs canoniques des hypersurfaces de $\mathbb{P}(\Delta)$.

Proposition 7.2.1. *Soient $\overline{L}_{1,\infty},\dots,\overline{L}_{d,\infty}$ des fibrés en droites sur $\mathbb{P}(\Delta)$ munis de leur métrique canonique et soit s une section rationnelle non nulle d'un fibré en droites L sur $\mathbb{P}(\Delta)$. Soit alors D un diviseur T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$ tel que $L \simeq \mathcal{O}(D)$ et notons s_D la fonction rationnelle sur $\mathbb{P}(\Delta)$ correspondant à s par cet isomorphisme. On a :*

$$h_{\overline{L}_{1,\infty},\dots,\overline{L}_{d,\infty}}(\operatorname{div} s) = \deg(c_1(L_1)\cdots c_1(L_d)) \int_{\mathcal{S}_N^+} \log|s_D|\, d\mu^+.$$

Démonstration. Soit $\|.\|_\infty$ la métrique canonique de L et notons $\overline{L}_\infty = (L, \|.\|_\infty)$. Suivant l'alinéa (6) du théorème (5.5.6) il vient :

$$\begin{aligned} &h_{\overline{L}_{1,\infty},\dots,\overline{L}_{d,\infty}}(\operatorname{div} s) \\ &\qquad = h_{\overline{L}_{1,\infty},\dots,\overline{L}_{d,\infty},\overline{L}_\infty}(\mathbb{P}(\Delta)) + \int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} \log\|s\|_\infty\, c_1(\overline{L}_{1,\infty})\cdots c_1(\overline{L}_{d,\infty}); \end{aligned}$$

d'autre part on sait que $h_{\overline{L}_{1,\infty},\dots,\overline{L}_{d,\infty},\overline{L}_\infty}(\mathbb{P}(\Delta)) = 0$ du fait de la proposition (7.1.1). On termine alors la démonstration en utilisant le corollaire (6.3.5) et en remarquant que $\|s\|_\infty = |s_D|$ sur $\mathcal{S}_N$.

Définition 7.2.2. Soit s une fonction rationnelle non nulle sur $\mathbb{P}(\Delta)$. On appelle *mesure de Mahler* de s et on note $M(s)$ le nombre réel :

$$M(s) = \int_{\mathcal{S}_N^+} \log|s|\, d\mu^+.$$

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la démonstration de ([BGS], prop. 1.5.1).

Proposition 7.2.3. *Soient n un entier positif et U un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Si F est une fonction méromorphe sur $U \times \mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ dont le diviseur* $\operatorname{div} F$ *est plat sur U (relativement à la première projection), alors la mesure de Mahler $M(F(u,\cdot))$ dépend continûment de u.*

7.3. Un exemple.

Plaçons nous sur $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ vu comme variété torique de façon standard, et soit $P \in \mathbb{Z}[X_0,\dots,X_n]$ un polynôme homogène de degré $k \in \mathbb{N}^*$. Le polynôme P définit une section globale (encore notée P) de $\mathcal{O}(k)$ et la hauteur de l'hypersurface $\operatorname{div} P$ est donnée d'après la proposition (7.2.1) par :

$$h_{\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty}(\operatorname{div} P) = M(P) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \log|P(e^{i\theta_0},\dots,e^{i\theta_n})|\, d\theta_0\cdots d\theta_n.$$

On peut trouver dans certains cas une formule explicite pour $M(P)$.

Soit par exemple la forme linéaire $P(X_0, \ldots, X_n) = a_0X_0 + \cdots + a_nX_n$ avec $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ et notons $I(a_0, \ldots, a_n) = M(a_0X_0 + \cdots + a_nX_n)$ sa mesure de Mahler.

On déduit de la formule de Jensen l'égalité :

$$I(a_0, a_1) = \log \mathrm{Sup}(|a_0|, |a_1|).$$

Le calcul de $I(a_0, a_1, a_2)$ est plus délicat et fait l'objet de l'énoncé suivant, obtenu en collaboration avec J. Cassaigne :

Proposition 7.3.1.

1. *Si $|a_0|$, $|a_1|$ et $|a_2|$ sont les longueurs des côtés d'un triangle du plan (i.e. vérifient les inégalités $|a_i| \leqslant |a_j| + |a_k|$ avec $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$) alors :*

$$I(a_0, a_1, a_2) = \frac{\alpha_0}{\pi} \log |a_0| + \frac{\alpha_1}{\pi} \log |a_1| + \frac{\alpha_2}{\pi} \log |a_2| + \frac{1}{\pi} \mathcal{D}\left(\left|\frac{a_1}{a_0}\right| e^{i\alpha_2}\right),$$

   où $\mathcal{D}(\cdot)$ désigne le dilogarithme de Bloch-Wigner défini par :

$$\mathcal{D}(z) = \Im(\mathrm{li}_2(z) + \log |z| \log(1 - z)) \qquad \textit{pour} \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1\},$$

   et où α_0, α_1 et α_2 sont les mesures principales non orientées des angles aux sommets A_0, A_1 et A_2 d'un triangle du plan $\mathcal{T} = (A_0, A_1, A_2)$ tel que $|a_0| = A_1A_2$, $|a_1| = A_0A_2$ et $|a_2| = A_0A_1$.
2. *Sinon,*

$$I(a_0, a_1, a_2) = \log \mathrm{Sup}(|a_0|, |a_1|, |a_2|).$$

Démonstration. Démontrons tout d'abord l'assertion (1). Les expressions considérées étant symétriques du fait de l'équation fonctionnelle vérifiée par $\mathcal{D}(\cdot)$, on peut supposer que $|a_0| \geqslant |a_1| \geqslant |a_2|$. On a, en toute généralité, les relations :

$$\begin{aligned} I(a_0, a_1, a_2) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| a_0e^{i\theta_0} + a_1e^{i\theta_1} + a_2e^{i\theta_2} \right| d\theta_0 d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| |a_0| + |a_1|e^{i\theta_1} + |a_2|e^{i\theta_2} \right| d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \mathrm{Sup}\left(\left| |a_0| + |a_1|e^{i\theta_1} \right|, |a_2| \right) d\theta_1, \end{aligned} \tag{7.40}$$

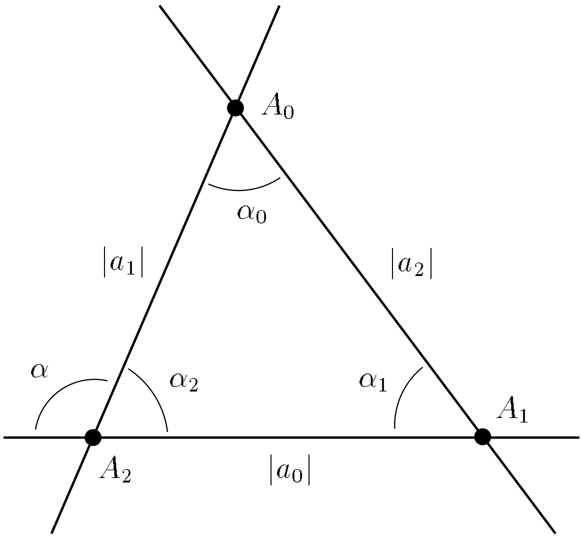
la dernière égalité étant obtenue par application de la formule de Jensen. On pose alors $\alpha = \pi - \alpha_2$ et on vérifie que $\left| |a_0| + |a_1|e^{i\alpha} \right| = |a_2|$. On déduit de cela et de (7.40) la relation :

$$I(a_0, a_1, a_2) = \frac{\alpha_2}{\pi} \log |a_2| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \log \left| |a_0| + |a_1|e^{i\theta_1} \right| d\theta_1,$$

ce dont on tire :

$$I(a_0,a_1,a_2)=\frac{\alpha_2}{\pi}\log|a_2|+\frac{\alpha_0}{\pi}\log|a_0|+\frac{\alpha_1}{\pi}\log|a_0| + \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\log\left|1+\left|\frac{a_1}{a_0}\right|e^{i\theta_1}\right|\,d\theta_1, \tag{7.41}$$

puisque $\alpha=\alpha_0+\alpha_1$.



Enfin,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\log\left|1+\left|\frac{a_1}{a_0}\right|e^{i\theta_1}\right|\,d\theta_1 &= \frac{1}{2\pi}\Re\left(\int_{-\alpha}^{\alpha}\log\left(1+\left|\frac{a_1}{a_0}\right|e^{i\theta_1}\right)\,d\theta_1\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\Im\left(\int_L\frac{\log(1-z)}{z}\,dz\right),\end{aligned}$$

où L est un chemin allant de $(-|a_1/a_0|e^{-i\alpha})$ à $(-|a_1/a_0|e^{i\alpha})$ d'indice zéro par rapport à 0 et 1.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} & \log\left|1+\left|\frac{a_1}{a_0}\right|e^{i\theta_1}\right| d\theta_1 \\
&= \frac{1}{2\pi}\Im\left(\mathrm{li}_2\left(-\left|\frac{a_1}{a_0}\right|e^{-i\alpha}\right)-\mathrm{li}_2\left(-\left|\frac{a_1}{a_0}\right|e^{i\alpha}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\Im\left(\mathrm{li}_2\left(\left|\frac{a_1}{a_0}\right|e^{i\alpha_2}\right)\right)-\frac{1}{2\pi}\Im\left(\mathrm{li}_2\left(\left|\frac{a_1}{a_0}\right|e^{-i\alpha_2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\Im\left(\mathrm{li}_2\left(\left|\frac{a_1}{a_0}\right|e^{i\alpha_2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\mathcal{D}\left(\left|\frac{a_1}{a_0}\right|e^{i\alpha_2}\right)-\frac{1}{\pi}\log\left|\frac{a_1}{a_0}\right|\Im\left(\log\left(1-\left|\frac{a_1}{a_0}\right|e^{i\alpha_2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\mathcal{D}\left(\left|\frac{a_1}{a_0}\right|e^{i\alpha_2}\right)+\frac{\alpha_1}{\pi}\log\left|\frac{a_1}{a_0}\right|,
\end{aligned}$$

ce qui ajouté à (7.41) donne le résultat annoncé.

Plaçons nous maintenant sous les hypothèses de l'assertion (2). Les expressions considérées étant symétriques, on peut supposer que $|a_0|+|a_1|<|a_2|$. Le résultat se déduit alors directement de la relation (7.40).

Remarque 7.3.2. La proposition (7.3.1) généralise certains résultats partiels dus à Smyth (cf. [Sm], voir également [Bo]). Pour un point de vue moderne sur la mesure de Mahler, on peut consulter [Den]. On peut s'inspirer de l'approche de ([Den], §3) pour donner une interprétation de la proposition (7.3.1) dans le langage de la K-théorie et des structures de Hodge-Tate mixtes.

Remarque 7.3.3. Si l'on considère le plan euclidien comme le bord du demi-espace de Poincaré $\mathcal{H}_3$ muni de la métrique hyperbolique usuelle, le nombre $\mathcal{D}\left(\left|\frac{a_1}{a_0}\right|e^{i\alpha_2}\right)$ intervenant dans la proposition (7.3.1) est le volume du tétraèdre hyperbolique idéal dans $\mathcal{H}_3$ de sommets (A_0, A_1, A_2, ∞).

7.4. **L'anneau de Chow arithmétique généralisé d'une variété torique.**

L'objet de cette section est de prouver le résultat suivant :

Théorème 7.4.1. *Soit $\mathbb{P}(\Delta)$ une variété torique projective lisse de dimension relative d sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. Il existe une unique section $\hat{\varsigma}$ du morphisme $\zeta : \widehat{CH}^*_{\mathrm{int}}(\mathbb{P}(\Delta)) \to CH^*(\mathbb{P}(\Delta))$ telle que :*

- *$\hat{\varsigma}$ soit un morphisme d'anneaux;*
- *pour tout fibré en droites L sur $\mathbb{P}(\Delta)$, on ait $\hat{\varsigma}(c_1(L)) = \hat{c}_1(\overline{L}_\infty)$.*

On montre tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 7.4.2. *Si $D_1, \dots, D_q$ $(q \leqslant d)$ sont des diviseurs T-invariants élémentaires tels que $D_1 \cdots D_q = 0$ dans $CH^*(\mathbb{P}(\Delta))$, alors :*

$$\hat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(D_1)}_\infty) \cdots \hat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(D_q)}_\infty) = 0 \qquad \textit{dans} \quad \widehat{CH}^q_{\mathrm{int}}(\mathbb{P}(\Delta)).$$

Démonstration. On a :

$$\zeta(\hat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(D_1)}_\infty) \cdots \hat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(D_q)}_\infty)) = c_1(\mathcal{O}(D_1)) \dots c_1(\mathcal{O}(D_q)) = 0.$$

De plus,

$$\omega(\hat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(D_1)}_\infty) \cdots \hat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(D_q)}_\infty)) = c_1(\overline{\mathcal{O}(D_1)}_\infty) \dots c_1(\overline{\mathcal{O}(D_q)}_\infty) = 0$$

d'après le corollaire (6.4.2). Il existe donc $\alpha \in D^{q-1,q-1}(\mathbb{P}(\Delta)_{\mathbb{R}})$ tel que :

$$\hat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(D_1)}_\infty) \cdots \hat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(D_q)}_\infty) = [(0, \alpha)] \qquad \text{dans} \quad \widehat{CH}_{\mathrm{int}}(\mathbb{P}(\Delta)), \tag{7.42}$$

et comme $dd^c\alpha = 0$, on peut choisir α dans $Z^{q-1,q-1}(\mathbb{P}(\Delta)_{\mathbb{R}})$.

Soient maintenant $\overline{L}_{q+1,\infty}, \dots, \overline{L}_{d+1,\infty}$ des fibrés en droites sur $\mathbb{P}(\Delta)$ munis de leur métrique canonique. On déduit de (7.42) la relation :

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}(\hat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(D_1)}_\infty) \cdots \hat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(D_q)}_\infty) \cdot \hat{c}_1(\overline{L}_{q+1,\infty}) \dots \hat{c}_1(\overline{L}_{d+1,\infty}))& \\ = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} \alpha\, c_1(\overline{L}_{q+1,\infty}) \cdots c_1(\overline{L}_{d+1,\infty}),&\end{aligned}$$

ce qui entraîne, d'après la proposition (7.1.1) que :

$$\int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} \alpha\, c_1(\overline{L}_{q+1,\infty}) \cdots c_1(\overline{L}_{d+1,\infty}) = 0, \tag{7.43}$$

quels que soient les fibrés en droites $L_{q+1}, \dots, L_{d+1}$ choisis.

Comme l'anneau de cohomologie de De Rham de $\mathbb{P}(\Delta)$ est engendré par les classes des diviseurs dans $\mathbb{P}(\Delta)$ (cf. théorème 2.5.7), on déduit de (7.43) et de (4.7.6) que :

$$\int_{\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})} \alpha \wedge \beta = 0,$$

quel que soit $\beta \in H^{d-q,d-q}(\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})_{\mathbb{R}})$ et ceci implique par dualité de Poincaré que $\alpha = 0$ dans $\widetilde{D}^{q-1,q-1}(\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})_{\mathbb{R}})$.

On passe maintenant à la démonstration du théorème (7.4.1). En reprenant les notations du théorème (2.5.7), soit $\hat{\varsigma} : \mathcal{S} \to \widehat{CH}^*_{\mathrm{int}}(\mathbb{P}(\Delta))$ le morphisme d'anneaux défini par $\hat{\varsigma}(t_\tau) = \hat{c}_1(\overline{\mathcal{O}(V(\tau))}_\infty)$ pour tout $\tau \in \Delta(1)$. On déduit de la proposition (3.4.1) et du lemme (7.4.2) respectivement les inclusions $\mathcal{J} \subset \operatorname{Ker} \hat{\varsigma}$ et $\mathcal{I} \subset \operatorname{Ker} \hat{\varsigma}$. On conclut la démonstration en utilisant le théorème (2.5.7).

8. Un théorème de Bernstein-Koushnirenko arithmétique

Ce chapitre est consacré à établir, comme application des résultats des pages qui précèdent, un analogue arithmétique du théorème de Bernstein-Koushnirenko. Rappelons que ce théorème fournit une borne du nombre de zéros communs dans $(\mathbb{C}^*)^n$ à n polynômes de Laurent $P_1, \ldots, P_n$ dans $\mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}]$ en terme de volumes mixtes associés aux polyhèdres de Newton de $P_1, \ldots, P_n$.

Lorsque $P_1, \ldots, P_n$ appartiennent à $\mathbb{Z}[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}]$ nous démontrons une majoration sur la hauteur de leurs zéros communs (cf. corollaire (8.2.3)). Cette majoration fait intervenir un certain invariant réel $L(\nabla)$, associé à un polytope convexe ∇ dans M, que nous définissons et étudions dans la section (8.1).

8.1. A propos d'une constante associée à un polytope convexe.

8.1.1. *Définitions et propriétés.* Soit ∇ un polytope convexe dans $M_{\mathbb{R}}$ à sommet dans M que l'on suppose d'intérieur non vide (si tel n'est pas le cas, on s'y ramène en se plaçant dans $M' = M \cap (\mathbb{R}\nabla + \mathbb{R}(-\nabla))$.

On note Δ l'éventail dans N associé à ∇ par le théorème (2.4.1) et $\mathbb{P}(\nabla)$ la variété torique $\mathbb{P}(\Delta)$. On note également E l'unique diviseur de Cartier horizontal T-invariant sur $\mathbb{P}(\nabla)$ tel que $K_E = \nabla$. D'après (2.4.1), on sait que le faisceau $\mathcal{O}(E)$ est ample.

On associe alors à ∇ la constante réelle $L(\nabla)$ définie de la manière suivante :

$$L(\nabla) = \operatorname*{Sup}_{s \in \Gamma(\mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C}), \mathcal{O}(E))} \left(\operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C})} \log \|s(x)\|_{E,\infty} - M(s) \right).$$

Proposition 8.1.1. *La constante $L(\nabla)$ est bien définie et est positive.*

Démonstration. La différence :

$$\operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C})} \log \|s(x)\|_{E,\infty} - \int_{S_N^+} \log |s(x)| \, d\mu^+$$

ne change pas lorsque s est multipliée par une constante $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On a donc :

$$L(\nabla) = \operatorname*{Sup}_{s \in \mathbb{P}(\Gamma(\mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C}), \mathcal{O}(E)))} \left(\operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C})} \log \|s(x)\|_{E,\infty} - M(s) \right).$$

Comme $\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(\mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C}), \mathcal{O}(E))$ est finie, $\mathbb{P}(\Gamma(\mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C}), \mathcal{O}(E)))$ est compact et l'on déduit de la proposition (7.2.3) que $|L(\nabla)| < +\infty$. Enfin pour toute section $s \in \Gamma(\mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C}), \mathcal{O}(E))$, on a :

$$\int_{S_N^+} \log |s(x)| \, d\mu^+ \leqslant \operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C})} \log \|s(x)\|_{E,\infty} \int_{S_N^+} d\mu^+ = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C})} \log \|s(x)\|_{E,\infty},$$

et donc $L(\nabla) \geqslant 0$.

Proposition 8.1.2. *Soient Δ' un éventail complet dans $N_{\mathbb{R}}$ et E_1 un diviseur de Cartier T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta')$ tel que $\mathcal{O}(E_1)$ soit engendré par ses sections globales. Si l'on note $\nabla_1 = K_{E_1} \subset M_{\mathbb{R}}$ le polytope convexe à sommets dans M associé à E_1, alors on a :*

$$L(\nabla_1) = \operatorname*{Sup}_{s\in\Gamma(\mathbb{P}(\Delta')(\mathbb{C}),\mathcal{O}(E_1))} \left(\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{P}(\Delta')(\mathbb{C})} \log\|s(x)\|_{E_1,\infty} - \int_{S_N^+} \log|s(x)|\,d\mu^+ \right).$$

Démonstration. On pose $V' = \mathbb{R}\nabla_1 + \mathbb{R}(-\nabla_1)$ et on note $M' = M\cap V'$. Soit M'' un sous-groupe de M tel que l'on ait : $M = M'\oplus M''$; on tire :

$$T(\mathbb{C}) = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[M'])\times\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[M'']) = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\operatorname{rg} M'}(\mathbb{C})\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\operatorname{rg} M''}(\mathbb{C}).$$

Notons pr_1 la première projection et soit $m\in M'$. Par construction, m induit un caractère $\chi^m_{\nabla_1}$ sur $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\operatorname{rg} M'}(\mathbb{C})\subset\mathbb{P}(\nabla_1)(\mathbb{C})$. Du fait de l'inclusion $M'\subset M$, m induit également un caractère $\chi^m_{\Delta'}$ sur $T(\mathbb{C})\subset\mathbb{P}(\Delta')(\mathbb{C})$ et les deux caractères sont liés par la relation :

$$\chi^m_{\Delta'} = \chi^m_{\nabla_1}\circ pr_1 = pr_1^*(\chi^m_{\nabla_1}).$$

On note E_1' le diviseur de Cartier T-invariant sur $\mathbb{P}(\nabla_1)$, dont l'existence est assurée par le théorème (2.4.1), tel que $K_{E_1'} = \nabla_1$ et E_1' est ample. D'après la proposition (2.3.10), on dispose d'un isomorphisme canonique :

$$pr_1^* : \Gamma(\mathbb{P}(\nabla_1)(\mathbb{C}),\mathcal{O}(E_1')) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}(\Delta')(\mathbb{C}),\mathcal{O}(E_1)).$$

Pour tout $s\in\Gamma(\mathbb{P}(\nabla_1)(\mathbb{C}),\mathcal{O}(E_1'))$ et $x\in T(\mathbb{C})$, on a :

$$\|pr_1^*(s)(x)\|_{E_1,\infty} = \|s(pr_1(x))\|_{E_1',\infty},$$

et comme $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\operatorname{rg} M'}(\mathbb{C})$ (resp. $T(\mathbb{C})$) est dense dans $\mathbb{P}(\nabla_1)(\mathbb{C})$ (resp. dans $\mathbb{P}(\Delta')(\mathbb{C})$), on a :

$$\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{P}(\Delta')(\mathbb{C})}\|pr_1^*(s)(x)\|_{E_1,\infty} = \operatorname*{Sup}_{x'\in\mathbb{P}(\nabla_1)(\mathbb{C})}\|s(x')\|_{E_1',\infty}.$$

De plus, pour tout $s\in\Gamma(\mathbb{P}(\nabla_1)(\mathbb{C}),\mathcal{O}(E_1'))$, on a :

$$\int_{\mathcal{S}_N^+}\log|pr_1^*(s)(x)|\,d\mu^+ = \int_{\mathcal{S}_{N'}^+}\log|s(x')|\,d\mu^+.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} L(\nabla_1) &= \operatorname*{Sup}_{s\in\Gamma(\mathbb{P}(\nabla_1)(\mathbb{C}),\mathcal{O}(E_1'))}\left(\operatorname*{Sup}_{x'\in\mathbb{P}(\nabla_1)(\mathbb{C})}\log\|s(x')\|_{E_1',\infty} - \int_{S_{N'}^+}\log|s(x')|\,d\mu^+\right)\\ &= \operatorname*{Sup}_{s\in\Gamma(\mathbb{P}(\Delta')(\mathbb{C}),\mathcal{O}(E_1))}\left(\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{P}(\Delta')(\mathbb{C})}\log\|s(x)\|_{E_1,\infty} - \int_{S_N^+}\log|s(x)|\,d\mu^+\right). \end{aligned}$$

Proposition 8.1.3. (Fonctorialité). *Soient* ∇_1 *et* ∇_2 *deux polytopes convexes dans* M *et soit* $\nabla = \nabla_1 + \nabla_2$. *Pour* $i \in \{1,2\}$, *on a :*

$$L(\nabla_i) \leqslant L(\nabla).$$

Démonstration. Il suffit de démontrer le résultat pour $i = 1$.

On suppose que ∇ est d'intérieur non vide (si tel n'est pas le cas, on s'y ramène en se plaçant dans $M' = M \cap (\mathbb{R}\nabla + \mathbb{R}(-\nabla))$. D'après le théorème (2.4.3), il existe des diviseurs de Cartier T-invariants E_1, E_2 sur $\mathbb{P}(\nabla)$ tels que l'on ait $K_{E_i} = \nabla_i$ pour $i \in \{1,2\}$. Les faisceaux inversibles $\mathcal{O}(E_1)$ et $\mathcal{O}(E_2)$ sont engendrés par leurs sections globales et l'on a $E = E_1 + E_2$.

Soit $s_1 \in \Gamma(\mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C}), \mathcal{O}(E_1))$ et soit $x_0 \in \mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C})$ tel que :

$$\|s_1(x_0)\|_{E_1,\infty} = \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C})} \|s_1(x)\|_{E_1,\infty}.$$

On peut trouver $\sigma \in \Delta_{\max}$ tel que $x_0 \in C_\sigma$.

On déduit de l'égalité $E = E_1 + E_2$ que $m_{\nabla,\sigma} = m_{\nabla_1,\sigma} + m_{\nabla_2,\sigma}$. D'après le théorème (2.3.14) on a $m_{\nabla_2,\sigma} \in \nabla_2$, et donc $s_1 \otimes \chi^{m_{\nabla_2,\sigma}} \in \Gamma(\mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C}), \mathcal{O}(E))$. De plus grâce à la proposition (3.3.1) on peut affirmer que :

$$\|s_1 \otimes \chi^{m_{\nabla_2,\sigma}}(x_0)\|_{E,\infty} = \|s_1(x_0)\|_{E_1,\infty}$$

et donc que :

$$\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C})} \|s_1 \otimes \chi^{m_{\nabla_2,\sigma}}(x)\|_{E,\infty} \geqslant \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C})} \|s_1(x)\|_{E_1,\infty}.$$

Comme $\int_{S_N^+} \log|\chi^{m_{\nabla_2,\sigma}}|\, d\mu^+ = 0$, on déduit finalement de la proposition (8.1.2) la majoration :

$$\begin{aligned}
L(\nabla_1) &= \operatorname*{Sup}_{s_1\in\Gamma(\mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C}),\mathcal{O}(E_1))} \left(\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C})} \log\|s_1(x)\|_{E_1,\infty} - \int_{S_N^+} \log|s_1(x)|\, d\mu^+ \right) \\
&\leqslant \operatorname*{Sup}_{s\in\Gamma(\mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C}),\mathcal{O}(E))} \left(\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{P}(\nabla)(\mathbb{C})} \log\|s(x)\|_{E,\infty} - \int_{S_N^+} \log|s(x)|\, d\mu^+ \right) \\
&= L(\nabla).
\end{aligned}$$

8.1.2. *Majoration de* $L(\nabla)$. Dans ce paragraphe, ∇ désigne un polytope convexe dans $M_\mathbb{R}$ à sommets dans M et supposé *d'intérieur non vide* (si tel n'est pas le cas, on s'y ramène en se plaçant dans $M' = M \cap (\mathbb{R}\nabla + \mathbb{R}(-\nabla))$). On note ∇_0 l'ensemble des sommets de ∇ et Δ l'éventail complet associé à ∇ par la construction du théorème (2.4.1). On note E le diviseur ample sur $\mathbb{P}(\Delta)$ associé à ∇ par cette construction; on sait que $K_E = \nabla$.

D'après la remarque (2.4.4), il existe un raffinement Δ' de Δ tel que $\mathbb{P}(\Delta')$ est projective et lisse. On note $i_* : \mathbb{P}(\Delta') \to \mathbb{P}(\Delta)$ le morphisme équivariant induit par l'inclusion $i : \Delta' \hookrightarrow \Delta$ et on pose $E' = (i_*)^*(E)$. On sait alors que $K_{E'} = \nabla$ et le faisceau inversible $\mathcal{O}(E')$ est engendré par ses sections globales.

Suivant Lelong (cf. [Le1]) on définit pour n un entier strictement positif les constantes suivantes :

$$C_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} \qquad \text{et} \qquad C_n = 0 \quad \text{pour} \quad n = 1,$$
$$C'_n = \sum_{i=1}^{2n-2}\frac{1}{i} + \sum_{i=2n-1}^{+\infty}\frac{1}{i2^i}\,.$$

La proposition suivante est une conséquence directe des énoncés donnés dans [Le1] :

Proposition 8.1.4. *Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme, on a :*

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{|z_i|\leqslant 1\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \log|P(z_1,\dots,z_n)| - M(P) \leqslant (C_n + C'_n)\deg P.$$

Démonstration. Voir [Le1], th. 2, prop. 4 et équation (14). Voir aussi [Le2].

A tout $\sigma \in \Delta'_{\max}$ on attache un nombre réel $L(\sigma)$ que l'on définit de la façon suivante :

$$L(\sigma) = \operatorname*{Sup}_{s\in\Gamma(\mathbb{P}(\Delta')(\mathbb{C}),\mathcal{O}(E'))} \left(\operatorname*{Sup}_{x\in C_\sigma} \log\|s(x)\|_{E',\infty} - \int_{S_N^+} \log|s(x)|\, d\mu^+ \right).$$

L'éventail Δ' étant complet, on déduit des propositions (3.2.3) et (8.1.2) l'égalité :

$$L(\nabla) = \operatorname*{Sup}_{\sigma\in\Delta'_{\max}} L(\sigma). \tag{8.44}$$

Pour tout $\sigma \in \Delta'_{\max}$, on choisit $f_1, \dots, f_d$ une famille génératrice de σ (qui est donc une $\mathbb{Z}$-base de N) et on note $f_1^*, \dots, f_d^*$ la base duale de M.

Dans la carte affine $\varphi : U_\sigma(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^d$ donnée par $\varphi(x) = (\chi^{f_1^*}(x), \dots, \chi^{f_d^*}(x))$, l'ensemble C_σ est défini par les conditions :

$$C_\sigma = \{z \in \mathbb{C}^d : \quad |z_1| \leqslant 1, \dots, |z_d| \leqslant 1\}.$$

Soit $s \in \Gamma(\mathbb{P}(\Delta')(\mathbb{C}), \mathcal{O}(E'))$. Dans la carte affine $U_\sigma(\mathbb{C})$, la fonction rationnelle $Q = s \cdot \chi^{-m_{E,\sigma}}$ est un polynôme. Comme

$$\int_{S_N^+} \log|Q|\, d\mu^+ = \int_{S_N^+} \log|s\cdot\chi^{-m_{E,\sigma}}|\, d\mu^+ = \int_{S_N^+} \log|s|\, d\mu^+,$$

et que pour tout $x \in C_\sigma$ on a :

$$\log\|s(x)\|_{E,\infty} = \log|Q(x)|,$$

on obtient d'après la proposition (8.1.4) la majoration :

$$\begin{aligned}\operatorname*{Sup}_{x\in C_\sigma} \log \|s(x)\|_{E,\infty} - \int_{S_N^+} \log |s|\, d\mu^+ &= \operatorname*{Sup}_{\substack{|z_i|\leqslant 1\\ 1\leqslant i\leqslant d}} \log |Q(z)| - M(Q)\\ &\leqslant (C_d + C'_d)\deg(Q). \qquad (8.45)\end{aligned}$$

Au vu de la description des sections globales de $\mathcal{O}(E')$ que l'on déduit de la proposition (2.3.10), il vient :

$$\deg Q \leqslant \operatorname*{Sup}_{m\in(\nabla - m_{E',\sigma})} \|m\|_1 = \operatorname*{Sup}_{m\in(\nabla_0 - m_{E',\sigma})} \|m\|_1,$$

où l'on a posé $\|m\|_1 = \sum_{i=1}^d |< f_i, m >|$. On déduit de cela et de (8.45) la majoration :

$$L(\sigma) \leqslant (C_d + C'_d) \operatorname*{Sup}_{m\in(\nabla_0 - m_{E',\sigma})} \|m\|_1. \qquad (8.46)$$

Les relations (8.44) et (8.46) fournissent un procédé théorique pour l'obtention d'une majoration de l'invariant $L(\nabla)$. Malheureusement, la détermination de l'éventail Δ', et *a fortiori* de la base $f_1, \ldots, f_d$, repose non seulement sur la connaissance de la géométrie du polytope ∇ mais également sur les propriétés arithmétiques de l'éventail Δ. Il n'est donc pas possible, en général, de trouver une majoration de $\deg Q$ en fonction de la géométrie du polytope ∇ uniquement.

On suppose désormais que ∇ est un polytope absolument simple, ce qui nous autorise à poser $\Delta' = \Delta$. On donne, dans ce cas, une majoration totalement explicite de l'invariant $L(\nabla)$ en terme de la combinatoire du polytope ∇.

Pour tout $S \in \nabla_0$ on note $l_1(S), \ldots, l_d(S)$ la base de M associée au sommet S comme à la proposition (2.3.20).

Pour tout $S \in \nabla_0$ et tout $P \in (\nabla \cap M)$ on peut trouver $a_1^{(S)}(P), \ldots, a_d^{(S)}(P)$ des entiers positifs tels que :

$$P - S = \sum_{i=1}^{d} a_i^{(S)}(P) l_i(S).$$

On pose alors :

$$N_S(P) = \sum_{i=1}^{d} a_i^{(S)}(P) \in \mathbb{N}.$$

Définition 8.1.5. On appelle *norme* du polytope convexe absolument simple ∇ et on note $N(\nabla)$ l'entier strictement positif défini par :

$$N(\nabla) = \operatorname*{Sup}_{S\in\nabla_0} \operatorname*{Sup}_{S'\in\nabla_0\setminus\{S\}} N_S(S').$$

Proposition 8.1.6. *Soit ∇ un polytope convexe absolument simple dans M. On a :*

$$L(\nabla) \leqslant (C_d + C'_d) N(\nabla).$$

Démonstration. On déduit des définitions l'inégalité :

$$\operatorname*{Sup}_{m \in (\nabla_0 - m_{E,\sigma})} \|m\|_1 = \operatorname*{Sup}_{S \in \nabla_0 \setminus \{m_{E,\sigma}\}} N_{m_{E,\sigma}}(S) \leqslant N(\nabla),$$

valable pour tout $\sigma \in \Delta_{\max}$, ce qui joint aux relations (8.44) et (8.46) donne le résultat annoncé.

8.2. **Un théorème de Bernstein-Koushnirenko arithmétique.**

8.2.1. *Rappels.* Soient $X \in Z_p(\mathbb{P}(\nabla))$ et $Y \in Z_q(\mathbb{P}(\nabla))$ deux cycles effectifs tels que $p + q \geqslant d + 1$. On note $W_1, \ldots, W_r$ les composantes irréductibles de l'intersection (ensembliste) $|X| \cap |Y|$, ce qui nous permet d'écrire :

$$|X| \cap |Y| = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant r} W_i\ .$$

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, on a :

$$\dim W_i \geqslant p + q - d - 1. \tag{8.47}$$

On dit que W_i est *propre* si (8.47) est une égalité, et que W_i est *impropre* sinon. On définit alors la *partie propre* $(X \cdot Y)_{\mathrm{pr}}$ de l'intersection de X avec Y par la formule :

$$(X \cdot Y)_{\mathrm{pr}} = \sum_{W_i \text{ propre}} m_i W_i \in Z_{p+q-d-1}(\mathbb{P}(\nabla)),$$

où m_i désigne la multiplicité d'intersection de X avec Y le long de W_i donnée par la formule des “Tor” de Serre. En d'autres termes, $(X \cdot Y)_{\mathrm{pr}}$ est la somme des composantes propres de l'intersection de X avec Y comptées avec leur multiplicité.

Si X, Y et Z sont trois cycles effectifs de $\mathbb{P}(\nabla)$, alors on a :

$$((X \cdot Y)_{\mathrm{pr}} \cdot Z)_{\mathrm{pr}} = (X \cdot (Y \cdot Z)_{\mathrm{pr}})_{\mathrm{pr}},$$

et dans toute la suite on écrira $(X \cdot Y \cdot Z)_{\mathrm{pr}}$ pour désigner l'un ou l'autre de ces cycles.

Pour plus de détails sur ces questions, on peut consulter ([BGS], §5.5) d'où est extraite notre présentation.

Ceci étant rappelé, nous énonçons les résultats que nous avons en vue :

8.2.2. *Présentation des résultats.* On se place sur $\mathbb{P}(\Delta')$ une variété torique projective lisse de dimension relative d, associée à un éventail $\Delta' \subset N_{\mathbb{R}}$.

On considère $E_1, \ldots, E_d$ des diviseurs de Cartier horizontaux T-invariants sur $\mathbb{P}(\Delta')$ tels que les faisceaux inversibles $\mathcal{O}(E_1), \ldots, \mathcal{O}(E_d)$ soient engendrés par leurs sections globales. On pose $E = E_1 + \cdots + E_d$ et on note $\nabla = K_E$, $\nabla_1 = K_{E_1}, \ldots, \nabla_d = K_{E_d}$ les polytopes convexes à sommets dans M associés à E, $E_1, \ldots, E_d$ respectivement; on sait d'après (2.3.15) que $\nabla = \nabla_1 + \cdots + \nabla_d$. On supposera ici que le polytope ∇ est *d'intérieur non vide.*

Théorème 8.2.1. *Soient $s_1, \ldots, s_d$ des sections régulières non nulles sur $\mathbb{P}(\Delta')$ des faisceaux $\mathcal{O}(E_1), \ldots, \mathcal{O}(E_d)$; et notons* $\operatorname{div} s_1, \ldots, \operatorname{div} s_d$ *respectivement le lieu de leurs zéros. On a l'inégalité :*

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty}&((\operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_d)_{\mathrm{pr}}) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{d} \frac{\deg(E \cdot E_1 \cdots \widehat{E_i} \cdots E_d)}{\deg(E^d)}\, h_{\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty}(\operatorname{div} s_i) \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{d} L(\nabla_i) \deg(E \cdot E_1 \cdots \widehat{E_i} \cdots E_d), \end{aligned}$$

où le symbole $\widehat{E_i}$ signifie que l'on omet ce terme dans le produit d'intersection considéré.

En utilisant le fait que :

$$\deg(E \cdot E_1 \cdots \widehat{E_i} \cdots E_d) = d!\, V(\nabla, \nabla_1, \ldots, \widehat{\nabla_i}, \ldots, \nabla_d),$$

où $V(\nabla, \nabla_1, \ldots, \widehat{\nabla_i}, \ldots, \nabla_d)$ désigne le volume mixte des polytopes $\nabla, \nabla_1, \ldots, \widehat{\nabla_i}, \ldots, \nabla_d$ (voir par exemple [Oda], §A.4 et p. 78-79, et aussi [Fu2], §5.4) et l'égalité :

$$h_{\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty}(\operatorname{div} s_i) = \deg(E^d)\, M(s_i),$$

valable pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$ d'après la proposition (7.2.1), on peut réécrire la majoration du théorème (8.2.1) sous la forme :

$$\begin{aligned} (8.48)\quad h_{\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty}&((\operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_d)_{\mathrm{pr}}) \\ &\leqslant d! \sum_{i=1}^{d} V(\nabla, \nabla_1, \ldots, \widehat{\nabla_i}, \ldots, \nabla_d)\, M(s_i) \\ &\qquad + d! \sum_{i=1}^{d} L(\nabla_i) V(\nabla, \nabla_1, \ldots, \widehat{\nabla_i}, \ldots, \nabla_d). \end{aligned}$$

Définition 8.2.2. Soit $P \in \mathbb{Z}[X_1, 1/X_1, \ldots, X_d, 1/X_d]$ un polynôme de Laurent, et notons $(a_m)_{m \in \mathbb{Z}^d}$ la famille presque nulle de ses coefficients (i.e. définie par l'égalité $P(X) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} a_m X^m$). On appelle *support* du polynôme P et on note $\operatorname{Supp} P$ le sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$ défini par :

$$\operatorname{Supp} P = \{m \in \mathbb{Z}^d : \quad a_m \neq 0\}.$$

Le *polyhèdre de Newton* du polynôme P est l'enveloppe convexe de son support $\operatorname{Supp} P$. C'est un polytope convexe à sommets dans $\mathbb{Z}^d$.

Pour tout corps de nombres $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$, notons S_K l'ensemble canonique des places de K (voir par exemple [Lan], II §1). Pour tout $\nu \in S_K$, on note $|\cdot|_\nu$ la valeur absolue *normalisée* sur K en la place ν, celle-ci étant définie par : $|\cdot|_\nu = |\sigma(\cdot)|$ si ν est associée à un plongement réel $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{R}$, $|\cdot|_\nu = |\sigma(\cdot)|^2$ si ν est associée à un plongement complexe $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, et $|\cdot|_\nu = (N\mathfrak{p})^{-v_{\mathfrak{p}}(\cdot)}$ si ν est une place non-archimédienne associée à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$.

On peut alors énoncer le corollaire suivant, de forme plus élémentaire :

Corollaire 8.2.3. *Soient $P_1, \dots, P_d \in \mathbb{Z}[X_1, 1/X_1, \dots, X_d, 1/X_d]$ des polynômes de Laurent à coefficients entiers, et notons $\nabla_1, \dots, \nabla_d$ respectivement leur polyhèdre de Newton. Notons $\nabla = \nabla_1 + \cdots + \nabla_d$ leur somme de Minkowski, que nous supposons d'intérieur non vide. Notons $Z_1, \dots, Z_d$ le lieu des zéros de $P_1, \dots, P_d$ respectivement dans $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^d$ et $(Z_1 \cap \cdots \cap Z_d)_{\mathrm{pr}}$ l'ensemble des points isolés du schéma $Z_1 \cap \cdots \cap Z_d$, et pour chaque point x de cet ensemble notons $l(x)$ sa multiplicité et $h_\nabla(x)$ sa hauteur définie par l'égalité :*

$$h_\nabla(x) = \sum_{\nu\in S_K} \log\left(\max_{m\in\nabla\cap M} |\chi^m(x)|_\nu\right),$$

où K désigne un corps de nombres contenant les coordonnées de x. On a :

$$\frac{1}{d!}\sum_{x\in(Z_1\cap\cdots\cap Z_d)_{\mathrm{pr}}} l(x)h_\nabla(x) \leqslant \sum_{i=1}^{d} V(\nabla, \nabla_1, \dots, \widehat{\nabla}_i, \dots, \nabla_d)(M(P_i) + L(\nabla_i)).$$

Démonstration. Soit Δ l'éventail dans N que l'on associe à ∇ grâce au théorème (2.4.1) et soit E l'unique diviseur de Cartier horizontal T-invariant sur $\mathbb{P}(\Delta)$ tel que $K_E = \nabla$ et E est ample. D'après le théorème (2.4.3) il existe des diviseurs de Cartier horizontaux T-invariants $E_1, \dots, E_d$ sur $\mathbb{P}(\Delta)$ tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, $K_{E_i} = \nabla_i$ et le faisceau inversible $\mathcal{O}(E_i)$ est engendré par ses sections globales. De plus on a $E = E_1 + \cdots + E_d$.

D'après la remarque (2.4.4), il existe un raffinement Δ' de Δ tel que $\mathbb{P}(\Delta')$ est *projective* et *lisse*. On note $i_* : \mathbb{P}(\Delta') \to \mathbb{P}(\Delta)$ le morphisme équivariant induit par l'inclusion $i : \Delta' \hookrightarrow \Delta$ et on pose $E' = (i_*)^*(E)$, $E'_1 = (i_*)^*(E_1), \dots, E'_d = (i_*)^*(E_d)$. On sait alors que $K_{E'} = \nabla$, $K_{E'_1} = \nabla_1, \dots, K_{E'_d} = \nabla_d$ et que les faisceaux inversibles $\mathcal{O}(E')$, $\mathcal{O}(E'_1), \dots, \mathcal{O}(E'_d)$ sont engendrés par leurs sections globales.

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, on déduit de l'inclusion $\operatorname{Supp} P_i \subset \nabla_i$ que P_i s'étend en une section régulière non nulle s'_i de E'_i sur $\mathbb{P}(\Delta')$. On peut donc appliquer l'inégalité (8.48) sur $\mathbb{P}(\Delta')$ et on trouve :

$$\begin{aligned}h_{\overline{\mathcal{O}(E')}_\infty}((\operatorname{div} s'_1 \cdots \operatorname{div} s'_d)_{\mathrm{pr}}) \\ \leqslant d! \sum_{i=1}^{d} V(\nabla, \nabla_1, \dots, \widehat{\nabla_i}, \dots, \nabla_d)\, M(s'_i) \\ + d! \sum_{i=1}^{d} L(\nabla_i) V(\nabla, \nabla_1, \dots, \widehat{\nabla_i}, \dots, \nabla_d).\end{aligned}$$

On se ramène de $\mathbb{P}(\Delta')(\overline{\mathbb{Q}})$ à $T(\overline{\mathbb{Q}}) = (\overline{\mathbb{Q}}^*)^d$ en utilisant la positivité de $h_{\overline{\mathcal{O}(E')}_\infty}$ (cf. exemple 5.5.8). Enfin l'égalité $h_{\overline{\mathcal{O}(E')}_\infty}(x) = h_\nabla(x)$ pour tout $x \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^d$ est une conséquence directe de la construction par image inverse de $\|.\|_{E',\infty}$ (cf. §3.3.3).

8.2.3. *Démonstration du théorème.*

On démontre tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 8.2.4. *Soit k un entier compris entre 1 et d, et soit $Z \in Z_k(\mathbb{P}(\Delta'))$ un cycle effectif tel que la section s_k de $\mathcal{O}(E_k)$ ne soit identiquement nulle sur aucune des composantes irréductibles de Z. On a :*

$$\begin{aligned}h_{\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty, \overline{\mathcal{O}(E_1)}_\infty, \dots, \overline{\mathcal{O}(E_{k-1})}_\infty}(Z \cdot \operatorname{div} s_k) \\ \leqslant h_{\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty, \overline{\mathcal{O}(E_1)}_\infty, \dots, \overline{\mathcal{O}(E_k)}_\infty}(Z) \\ + \deg(E \cdot E_1 \cdots E_{k-1} \cdot Z) \left(L(\nabla_k) + \frac{h_{\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty}(\operatorname{div} s_k)}{\deg(E^d)} \right).\end{aligned}$$

Démonstration. D'après le théorème (5.5.6) alinéa (6), on a :

$$\begin{aligned}h_{\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty, \overline{\mathcal{O}(E_1)}_\infty, \dots, \overline{\mathcal{O}(E_{k-1})}_\infty}(Z \cdot \operatorname{div} s_k) = h_{\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty, \overline{\mathcal{O}(E_1)}_\infty, \dots, \overline{\mathcal{O}(E_k)}_\infty}(Z) \\ + \int_{Z(\mathbb{C})} \log \|s_k\|_{E_k,\infty} c_1(\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty) c_1(\overline{\mathcal{O}(E_1)}_\infty) \cdots c_1(\overline{\mathcal{O}(E_{k-1})}_\infty).\end{aligned}$$

On déduit de la proposition (8.1.2) que :

$$\operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{P}(\Delta')(\mathbb{C})} \log \|s_k(x)\|_{E_k,\infty} \leqslant M(s_k) + L(\nabla_k).$$

De l'inégalité précédente et de la positivité des courants $c_1(\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty), c_1(\overline{\mathcal{O}(E_1)}_\infty), \dots, c_1(\overline{\mathcal{O}(E_{k-1})}_\infty)$ (cf. exemple 4.5.8) on tire que :

$$\begin{aligned}\int_{Z(\mathbb{C})} \log \|s_k\|_{E_k,\infty} c_1(\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty) c_1(\overline{\mathcal{O}(E_1)}_\infty) \cdots c_1(\overline{\mathcal{O}(E_{k-1})}_\infty) \\ \leqslant \left(\int_{Z(\mathbb{C})} c_1(\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty) c_1(\overline{\mathcal{O}(E_1)}_\infty) \cdots c_1(\overline{\mathcal{O}(E_{k-1})}_\infty) \right) (M(s_k) + L(\nabla_k)) \\ = \deg(E \cdot E_1 \cdots E_{k-1})(M(s_k) + L(\nabla_k)).\end{aligned}$$

Enfin, on a d'après la proposition (7.2.1) l'égalité :

$$M(s_k) = \frac{h_{\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty}(\operatorname{div} s_k)}{\deg(E^d)},$$

ce qui suffit à établir le résultat.

On passe maintenant à la démonstration du théorème :

On construit par récurrence une suite finie $Z_0, Z_1, \ldots, Z_d$ de cycles effectifs dans $\mathbb{P}(\Delta')$ tels que $Z_i \in Z^i(\mathbb{P}(\Delta'))$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant d$ de la façon suivante :

- On pose $Z_0 = \mathbb{P}(\Delta')$.
- Pour $i \geqslant 1$, le cycle Z_i est défini comme la somme avec multiplicités des composantes de $Z_{i-1} \cdot \operatorname{div} s_{d+1-i}$ dont l'intersection avec $\operatorname{div} s_{d-i}$ est propre.

Comme dans $\mathbb{P}(\Delta')$ l'intersection d'un cycle de codimension k par une hypersurface est soit vide, soit un cycle de codimension $k+1$, toute composante non vide de :

$$((|Z_{i-1}| \cap |\operatorname{div} s_{d+1-i}|) - |Z_i|) \cap |\operatorname{div} s_{d-i}| \cap \cdots \cap |\operatorname{div} s_1|$$

est au moins de dimension 1. On est donc assuré de l'égalité :

$$Z_d = (\operatorname{div} s_1 \cdots \operatorname{div} s_d)_{\mathrm{pr}}.$$

Pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, le cycle $(Z_{d-k} \cdot \operatorname{div} s_k) - Z_{d-k+1}$ est effectif. On déduit de cela et de l'exemple (5.5.8) que :

$$h_{\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty, \overline{\mathcal{O}(E_1)}_\infty, \ldots, \overline{\mathcal{O}(E_{k-1})}_\infty}(Z_{d-k+1}) \leqslant h_{\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty, \overline{\mathcal{O}(E_1)}_\infty, \ldots, \overline{\mathcal{O}(E_{k-1})}_\infty}(Z_{d-k} \cdot \operatorname{div} s_k).$$

Du fait de la positivité des fibrés $\mathcal{O}(E), \mathcal{O}(E_1), \ldots, \mathcal{O}(E_{k-1})$ on a de même :

$$\deg(E \cdot E_1 \cdots E_{k-1} \cdot Z_{d-k}) \leqslant \deg(E \cdot E_1 \cdots \widehat{E_k} \cdots E_d).$$

En appliquant le lemme (8.2.4), on obtient pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$ l'inégalité :

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty, \overline{\mathcal{O}(E_1)}_\infty, \ldots, \overline{\mathcal{O}(E_{k-1})}_\infty}&(Z_{d-k+1}) \\ &\leqslant h_{\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty, \overline{\mathcal{O}(E_1)}_\infty, \ldots, \overline{\mathcal{O}(E_k)}_\infty}(Z_{d-k}) \\ &\quad + \deg(E \cdot E_1 \cdots \widehat{E_k} \cdots E_d) \left(L(\nabla_k) + \frac{h_{\overline{\mathcal{O}(E)}_\infty}(\operatorname{div} s_k)}{\deg(E^d)} \right). \end{aligned}$$

Une récurrence finie permet alors de conclure.

Références

[BeT] Bedford E. et Taylor B.A.: A new capacity for plurisubharmonic functions, ***Acta math.*** **149**, (1982), 1-41.

[BaT] Batyrev V.V. et Tschinkel Y.: Rational Points of Bounded Height on Compactifications of Anisotropic Tori, ***IMRN*** **12**, (1995), 591-635.

[BGS] Bost J.-B., Gillet H. et Soulé C.: Heights of projective varieties and positive Green forms, ***Journal of the AMS*** **7**, (1994), 903-1027.

[Bo] Boyd D.W.: Speculations concerning the range of Mahler's measure, ***Canad. Math. Bull.*** **24**, (1981), 453-469.

[Br] Brylinski J.-L.: **Éventails et variétés toriques**, Séminaire sur les singularités des surfaces, Centre de Math. de l'École Polytechnique, Palaiseau 1976-1977, Lectures Notes in Mathematics **777**, Springer-Verlag, (1980).

[Da] Danilov V.I.: The geometry of toric varieties, ***Russian Math. Surveys*** **33**, (1978), 97-154.; ***Uspehi Mat. Nauk.*** **33**, (1978), 85-134.

[De1] Demailly J.-P.: Courants positifs et théorie de l'intersection , ***Gazette des mathématiciens*** **53**, (1992), 131-158.

[De2] Demailly J.-P.: Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory, *in* ***Complex Analysis and Geometry***, Univ. Ser. Math., (1993), 115-193.

[De3] Demailly J.-P.: Analytic Geometry, Preprint, 1993.

[Dema] Demazure M.: Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona, ***Ann. Sci. École Norm. Sup.*** **(4) 3**, (1970), 507-588.

[Den] Deninger C.: Deligne periods of mixed motives, K-theory and the entropy of certain $\mathbb{Z}^n$-actions, Preprint, 1996.

[EGA2] Grothendieck A. et Dieudonné J.: Éléments de géométrie algébrique II, Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes, ***Publ. Math., IHES*** **8**, (1961).

[EGA3] Grothendieck A. et Dieudonné J.: Éléments de géométrie algébrique III, Étude cohomologique des faisceaux cohérents, ***Publ. Math., IHES*** **11**, (1961), et **17**, (1963).

[Eh] Ehlers F.: Eine klasse komplexer Mannigfaltigkeiten und die Auflösung einiger isolierter Singularitäten, ***Math. Ann.*** **218**, (1975), 127-156.

[Fa] Faltings, G.: Diophantine approximation on Abelian varieties, ***Ann. of Math.*** **133**, (1991), 549-576.

[Fu1] Fulton W.: **Intersection Theory**, Springer-Verlag (1984).

[Fu2] Fulton W.: **Introduction to toric varieties**, Princeton University Press, (1993).

[FS] Fulton W. et Sturmfels B.: Intersection theory on Toric Varieties, Preprint, 1994.

[Gi] Gillet H.: Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory, ***Adv. in Math.*** **40 n°3**, (1981), 203-289.

[GS1] Gillet H. et Soulé C.: Arithmetic intersection theory, ***Publ. Math., IHES*** **72**, (1990), 94-174.

[GS2] Gillet H. et Soulé C.: Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metrics, I, II, ***Annals of Math.***, **131** (1990), 163-203 et 205-238.

[KKMS] Kempf G., Knudsen F., Mumford D. et Saint-Donat B.: **Toroidal Embeddings I**, Lecture Notes in Mathematics **339**, Springer-Verlag, (1973).

[Ko1] Koushnirenko A.G.: Polyhèdres de Newton et nombres de Milnor, ***Invent. math.*** **32**, (1976), 1-31.

[Ko2] Koushnirenko A.G.: Newton polytopes and the Bézout theorem, ***Functional Analysis and its applications*** **vol. 10, n°3**, (1976), 233-235.

[Lan] Lang S.: **Algebraic Number Theory**, Springer-Verlag, (1970).

[Lau] Laurent M.: Sur le théorème de Bézout, Prépublication LMD Luminy, 1994.

[Le1] Lelong P.: Fonctions plurisousharmoniques de croissance logarithmique; extension du résultant des polynômes, ***C. R. Acad. Sci. Paris*** **t. 309, série I**, (1989), 315-320.

[Le2] Lelong P.: Mesure de Mahler des polynômes et majoration par convexité, ***C. R. Acad. Sci. Paris*** **t. 315, série I**, (1992), 139-142.

[Ma1] Maillot V.: Un calcul de Schubert arithmétique, ***Duke Math. J.*** **80**, (1995), 195-221.

[Ma2] Maillot V.: Un théorème de Bernstein-Koushnirenko arithmétique, ***C. R. Acad. Sci. Paris*** **t. 323, série I**, (1996), 977-980.

[Oda] Oda T.: **Convex Bodies and Algebraic Geometry**, Springer-Verlag, (1988).

[Ri] Richberg R.: Stetige streng pseudokonvexe Funktionen, ***Math. Ann.*** **175**, (1968), 257-286.

[Sm] Smyth C.J.: On measures of polynomials in several variables, ***Bull. Austral. Math. Soc.*** **23**, (1981), 49-63.

[Zha] Zhang S.S.: Small Points and Adelic Metrics, ***J. Algebraic Geometry*** **4**, (1995), 281-300.

Département de Mathématiques et d'Informatique, École Normale Supérieure,
45 rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, FRANCE.
e-mail: vmaillot@ens.fr