24 Septembre 2002

Principe de Hartogs dans les variétés CR

Abstract

Let M be a CR manifold. The main results of this paper are the following :
A) When M is real analytic, a semi-global Hartogs extension phenomenon occurs for real analytic CR functions if and only if M is nowhere strictly pseudoconvex and $\dim_{\mathbb{R}} M \geqslant 3$.
B) When M is a standard manifold, the Hartogs-Bochner extension phenomenon occurs for non CR-confined domains if and only if M is nowhere strictly pseudoconvex and $\dim_{CR} M \geqslant 2$.
C) If M is a smooth submanifold of $\mathbb{C}^n$ foliated by complex curves, a semi-global Hartogs-Bochner extension phenomenon occurs for smooth non CR-confined domains if and only if $\dim_{CR} M \geqslant 2$.
D) If M is a real analytic nowhere strictly pseudoconvex manifold and if Ω is a sufficiently small domain in M, a hyperfunction which is real analytic in a neighborhood of $b\Omega$ and CR in a neighborhood of $\overline{\Omega}$ is in fact real analytic on Ω.

Soit M une variété CR. Les principaux résultats de cet article sont les suivants :
A) Lorsque M est réelle analytique, un phénomène semi-global de prolongement de type Hartogs a lieu pour les fonctions CR réelles analytiques si et seulement si M n'est nulle part strictement pseudoconvexe et $\dim_{\mathbb{R}} M \geqslant 3$.
B) Si M est une variété standard, le phénomène de prolongement de Hartogs-Bochner se produit pour les domaines non CR-confinés si et seulement si M est nulle part strictement pseudoconvexe et $\dim_{CR} M \geqslant 2$.
C) Si M est une sous-variété de $\mathbb{C}^n$ feuilletée par des courbes complexes, un phénomène semi-global de prolongement de type Hartogs-Bochner se produit pour les domaines non CR-confinés lisses si et seulement si $\dim_{CR} M \geqslant 2$.
D) Si M est une variété réelle analytique nulle part strictement pseudoconvexe et si Ω un domaine suffisamment petit de M, une hyperfonction qui est réelle analytique au voisinage de $b\Omega$ et CR au voisinage de $\overline{\Omega}$ est en fait réelle analytique sur Ω.

G. Henkin et V. Michel

Table des matières

1 Introduction

1.1 Historique succinct et principaux résultats

Presque un siècle sépare cet article de la découverte par Hartogs d'un phénomène d'extension forcée des fonctions holomorphes d'au moins deux variables complexes et à cette occasion, il nous parait utile d'en évoquer l'histoire[1] avant d'énoncer nos propres résultats. Si celle-ci débute sans doute quand Hurwitz [37] annonça en 1897 qu'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^2 \setminus 0$ se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C}^2$, c'est seulement dans sa thèse en 1903 que Hartogs [26, 27] décrivit le phénomène général et en donna une démonstration rigoureuse pour ses «marmites» devenues célèbres. Poincaré [52] donna en 1907 une autre preuve pour les fonctions holomorphes au voisinage de la sphère unité de $\mathbb{C}^2$, Levi [43] produisit en 1910 une version du théorème de Hartogs pour les fonctions méromorphes (invalidant ainsi l'affirmation faite par Weierstrass en 1879 que tout domaine de $\mathbb{C}^n$, n quelconque, était un domaine de méromorphie - voir [60, 36]) et en 1924 Osgood [51] énonça et prouva partiellement le théorème sous sa forme classique :

Théorème (Hartogs) *Soit dans $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, un domaine Ω borné de bord connexe. Si f est holomorphe au voisinage de $b\Omega$, alors f admet un prolongement holomorphe à Ω.*

La démonstration d'Osgood achoppait en fait sur un problème de monodromie et c'est seulement en 1936 que le théorème fut entièrement justifié par Brown [15] grâce à des considérations topologiques. En 1939 Fueter [24] donna autre une preuve lorsque $n = 2$ puis dans le

[1] Le lecteur peut aussi consulter les très intéressantes publications de Struppa [64], Fichera [20] et Range [54] pour un autre éclairage sur les phénomènes de Hartogs et de Hartogs-Severi-Bochner. Nous tenons à remercier ici S. Coen d'avoir porté à notre connaissance les références [20] et [54].

cas général en 1942 avec [25]. Ses arguments, très différents de ceux de Brown, étaient fondés sur une formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes d'une variable quaternionique ou hypercomplexe, formule obtenue en 1931 par Moisil [49] et qu'il [23] redécouvrit en 1935. C'est à partir de celle-ci que Martinelli [47, 46] écrivit sa formule et simplifia la preuve de Fueter. Dans la même période, Bochner [13, 14] donna une autre preuve du théorème de Hartogs, le généralisant même à des fonctions continues sur $b\Omega$ qu'on pourrait qualifier de «holomorphes par morceaux».

La notion de fonction et de variété CR fut proposée de façon explicite et dans des termes modernes par Wirtinger [70] en 1926. Severi [59, 61] et Kneser [40] ont obtenu des résultats prolongeant le théorème de Hartogs dans ce cadre, ce qui amène à s'interroger sur la validité du **principe de Hartogs** dans une variété CR M, c'est à dire du fait que si Ω est un domaine relativement compact de M de complémentaire connexe, toute fonction CR réelle analytique au voisinage de $b\Omega$ dans M se prolonge à Ω en fonction CR réelle analytique.

Rappelons qu'une variété CR (abstraite) est une variété réelle M de classe C^2 munie d'un sous-fibré L de $\mathbb{C}TM$ tel que $L \setminus \overline{L} = \quad 0$ et $[L, L] \subset L$, $[L, L]$ étant l'espace engendré par les crochets de Lie des éléments de L ; une fonction CR sur M est alors une fonction annulée par l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel $\overline{\partial}_M$ associé au fibré L. Notons que ceci concerne aussi l'analyse réelle car d'après un résultat énoncé par Rossi [56] et prouvé par Andreotti et Hill [6], un système $P_1, ..., P_k$ de champs de vecteurs de $\mathbb{R}^m$ dont les coefficients sont réels analytiques sur un domaine U de $\mathbb{R}^m$ peut s'interpréter comme l'opérateur de Cauchy-Riemmann tangentiel d'une variété CR dès qu'en tout point de U, l'espace qu'ils engendrent est de dimension complexe k et stable par crochet de Lie. D'après ces mêmes références, on sait aussi qu'une variété CR réelle analytique est localement analytiquement CR-isomorphe à une sous-variété générique de $\mathbb{C}^n$; la preuve d'un résultat semi-global pour une variété CR réelle analytique se réduit donc au cas des variétés CR plongées et génériques.

Si M est une sous-variété réelle de $\mathbb{C}^n$ et $z \quad M$, l'espace holomorphe tangent en z à M est l'espace $T_z^{1,0}M$ constitué par les vecteurs de $T_z^{1,0}\mathbb{C}^n$ tangents à M en z, $T^{1,0}\mathbb{C}^n$ étant le fibré complexe engendré par les champs $\partial/\partial z_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. L'espace complexe tangent à M en z est $T_z^c M = T_z M \setminus JT_z M$ où J est l'opérateur réel défini par $J \circ J = -Id_{T\mathbb{C}^n}$ et $J\left(\partial/\partial x_j\right) = \partial/\partial y_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$; l'application $Z \quad \operatorname{Re} Z$ réalise un isomorphisme de $T_z^{1,0}M$ sur $T_z^c M$ qui transforme la structure complexe naturelle de $T_z^{1,0}M$ dans la structure complexe induite sur $T_z^c M$ par J. M est CR si la dimension complexe de l'espace $T_z^{1,0}M$ est la même pour tous les points z de M. Dans ce cas, $T^{1,0}M$ est un fibré complexe de même rang que le fibré $T^c M$ muni de la structure J ; ce rang, qui par définition est la dimension CR de M, est noté $dim_{CR}M$ et vérifie $dim_{CR}M + codim_{\mathbb{R}}M \geqslant n$. M est dite générique quand $dim_{CR}M + codim_{\mathbb{R}}M = n$; $T^{1,0}M$ peut être alors vu comme étant le fibré L du paragraphe précédent. Dans la situation plongée, une fonction CR sur M est une fonction à valeurs complexes définie sur M et annulée par les champs CR, c'est à dire par les éléments de $T^c M$; dans le cas de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ par exemple, ce sont les fonctions holomorphes par rapport à la première variable et quelconques par rapport à la seconde.

Soit M une sous-variété CR réelle analytique de $\mathbb{C}^n$. Une toute première condition nécessaire à l'existence d'un phénomène de Hartogs dans M est que $\dim_{\mathbb{R}} M \geqslant 3$. Une deuxième condition est que le principe du maximum[2] soit respecté par les fonctions CR réelles analytiques sur M. Si f est en effet une fonction CR dont le module en un point z_0 excède le maximum de $\ f\ $ sur le bord d'un voisinage ouvert de z_0, la fonction $1/\left[f - f(z_0)\right]$ invalide le principe de Hartogs. Ceci exclut que M soit contenue au voisinage de l'un de ses points z_0 dans le bord d'un domaine strictement pseudoconvexe D de $\mathbb{C}^n$ car Rossi [55] a prouvé dans cette situation l'existence de fonctions pics en z_0, c'est à dire de fonctions holomorphes sur D, continues sur $\overline{D}$ et dont le module a un maximum strict en z_0. L'impossibilité pour M d'être localement contenue dans le bord d'un domaine strictement pseudoconvexe se lit sur sa forme de Levi. Pour préciser ceci, représentons M sous la forme

$$M = \quad z \quad G\ ;\ \rho_1(z) = \ldots = \rho_\ell(z) = 0 \tag{1}$$

où $\rho_1, \ldots, \rho_\ell$ sont des fonctions réelles analytiques sur un ouvert G de $\mathbb{C}^n$ telles que $d\rho_1 \quad \ldots \quad d\rho_\ell = 0$ sur M. Le fibré holomorphe tangent $T^{1,0}M$ est alors $\bigcap\limits_{1 \leqslant j \leqslant \ell} Ker\, \partial\rho_j$ où $\partial\rho_j$ est considéré comme une forme linéaire sur $T^{1,0}\mathbb{C}^n$. On note NM le fibré normal de M ; si $z \quad M$, $N_z M$ est l'orthogonal de $T_z M$ dans l'espace réel $T_z\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n$ c'est à dire $Vect_{\mathbb{R}}(\quad \rho_j(z), 1 \leqslant j \leqslant \ell)$ où $\quad = \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z_n}}\right)$. La forme de Levi (ou Levi-Tanaka) $\mathcal{L}_M(z)$ de M en z est la forme hermitienne définie sur $T_z^{1,0}M$ et à valeurs dans $N_z M$ qui est donnée par la formule

$$\mathcal{L}_M(z).t = \frac{1}{2i}\,\pi_z\left(J\left[L, \overline{L}\right]_z\right),\ t \quad T_z^{1,0}M,$$

où π_z est la projection orthogonale de $T_z\mathbb{C}^n$ sur $N_z M$, L est n'importe quel champ holomorphe tangent vérifiant $L_z = t$ et où J est l'opérateur défini plus haut. Si $\nu \quad N_z M$, on définit sur $T_z^{1,0}M$ la forme de Levi de M dans la direction ν par la formule

$$\mathcal{L}_{M,\nu}(z).t = \quad v, \mathcal{L}_M(z).t$$

où $\quad .,. \quad$ désigne la forme hermitienne usuelle de $\mathbb{C}^n$. Lorsqu'en un point z de M le système $(\quad \rho_1, \ldots, \quad \rho_\ell)$ est orthonormé, on vérifie que

$$t \quad T_z^{1,0}M,\ \mathcal{L}_{M,\nu}(z).t = - \underset{1 \leqslant j \leqslant \ell}{\quad} \quad \nu, \quad \rho_j(z) \quad \mathcal{L}_{\rho_j}(z).t \overset{déf}{=} \mathcal{L}_{\rho,\nu}(z).t$$

où si φ est une fonction de classe C^2 on a posé $\mathcal{L}_\varphi(z).t = \sum\limits_{1 \leqslant a,b \leqslant n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_a \partial \overline{z_b}}(z)\ t_a \overline{t_b}$. Si $(r_1, \ldots, r_\ell)$ est un autre jeu de fonctions définissant M, on constate que pour tout point z de M, il existe un

[2] Par principe du maximum nous entendons le fait que si f est une fonction CR sur M et si K est un compact de M, alors $\max\limits_K\ f\ \leqslant \max\limits_{bK}\ f\ $ où bK est le bord topologique de K dans M.

automorphisme F de N_zM tel que $\mathcal{L}_{r,\nu}(z) = \mathcal{L}_{\rho,F\nu}(z)$ pour tout $\nu \quad N_zM$. Par conséquent, l'absence locale d'hypersurface contenant M et bordant un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ qui se traduit par le fait que pour tout point $(z,\nu) \quad NM$ il existe $t \quad (T_z^{1,0}M) \quad 0$ tel que $\mathcal{L}_{\rho,\nu}(z).t = 0$ se traduit aussi par le fait que

$$v \quad N_zM, \quad t \quad T_z^{1,0}M, \quad t = 0 \ \ et \ \ \mathcal{L}_{M,\nu}(z).t = 0 \tag{2}$$

Définition. Suivant Trépreau [67], lorsque (2) est vérifiée en tout point z de M nous dirons que M est **nulle part strictement pseudoconvexe** ou plus brièvement que M est **non-signée** ; ces variétés sont appelées «*faiblement 1-concaves*» dans [30] et [2].

Une variété non-signée ne peut donc pas être totalement réelle et $\mathbb{C}^n$, $n \quad \mathbb{N}^*$ quelconque, est l'exemple le plus simple de variété non-signée. Notons qu'ainsi présentée la condition géométrique pour M d'être non-signée semble plus faible que celle de la validité du principe du maximum pour les fonctions CR réelles analytiques. En fait ces deux conditions sont équivalentes (voir la section 6.4).

Les variétés levi-plates (variétés pour lesquelles la forme de Levi est nulle) et en particulier les variétés du type $\mathbb{C}^k \times \mathbb{R}^\ell$ $(n = k + \ell, \ k \quad \mathbb{N}^*)$ sont des exemples de variétés non-signées. Dès 1932, Severi [61] prouva que si Ω est un domaine borné de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ tel que $\Omega \setminus (\mathbb{C} \times \quad a \quad)$ est simplement connexe pour tout $a \quad \mathbb{R}$, les fonctions qui sont réelles analytiques et holomorphes par rapport à la première variable, se prolongent à Ω en fonctions du même type. Ce théorème fut étendu par Brown [15] aux domaines bornés de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ dont le complémentaire est connexe. Le cas général est contenu dans le théorème A.

Le prototype générique des variétés non-signées est celui des variétés 1-concaves ; une variété M est dite q-concave si elle est CR et si pour tout $z \quad M$ et toute direction non nulle $\nu \quad N_zM$, la forme hermitienne $\mathcal{L}_{M,\nu}$ possède au moins q valeurs propres strictement négatives.

Lorsque M est 1-concave, Henkin [30] a en particulier prouvé que le phénomène de Hartogs se produit pour les domaines Ω suffisamment petits de bord connexe. Dans le cas particulier des variétés 2-concaves et standard, c'est à dire du type

$$M = \quad z \quad \mathbb{C}^n, \ \mathrm{Im}\, z_j = F_j(z_1, .., z_k), \ k+1 \leqslant j \leqslant n \tag{3}$$

où les F_j sont des formes quadratiques hermitiennes, ce résultat avait été établi par Naruki [50]. Si la condition de taille est parfois inutile (elle disparaît dans le cadre de [50] et dans la situation de [30], Laurent-Thiébaut [41] a montré qu'elle peut être levée en imposant à Ω d'être contenu dans un domaine de M ayant certaines propriétés de convexité relatives à l'espace ambiant $\mathbb{C}^n$), elle est rédhibitoire dans le cas général. Rappelons brièvement à ce propos l'exemple de Hill et Nacinovich [33] : dans la variété $\mathcal{N}_0 = \left\{ z \quad \mathbb{C}^3 \ ; \ 1 + \ z_3 \ ^2 = \ z_1 \ ^2 + \ z_2 \ ^2 \right\}$ qui est une sous-variété 1-concave de $\mathbb{C}^3$, la fonction $z \qquad 1/z_3$ est CR au voisinage du bord dans $\mathcal{N}_0$ de $\Omega = \quad z \quad \mathcal{N}_0 \ ; \ \ z_3 \ < 1$ mais n'a pas de prolongement CR à Ω.

Notre principal résultat est que la condition géométrique de non pseudoconvexité est nécessaire et suffisante à l'existence du phénomène de Hartogs

Théorème A. *Soit M une sous-variété CR réelle analytique de $\mathbb{C}^n$. Si M est nulle part strictement pseudoconvexe et si $\dim_{\mathbb{R}} M \geqslant 3$, alors pour tout $p \in M$ il existe $\delta_p \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si Ω est un domaine de M contenu dans $B(p, \delta_p)$ de bord connexe, toute fonction CR réelle analytique au voisinage de $b\Omega$ se prolonge à Ω en une fonction CR réelle analytique. Réciproquement, si le principe de Hartogs est valide pour tout domaine suffisamment petit de bord connexe, alors M est nulle part strictement pseudoconvexe et $\dim_{\mathbb{R}} M \geqslant 3$.*

Remarques. 1) Puisque d'après les travaux d'Oka et de Levi, une fonction méromorphe d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ est un quotient de fonctions holomorphes (voir [38] par exemple), ce théorème a comme corollaire que si M est non-signée, toute fonction méromorphe au voisinage de $b\Omega$ se prolonge en fonction méromorphe au voisinage de $\overline{\Omega}$.

2) Dans le cas particulier des variétés standard non-signées, la condition de taille disparaît. Si M est en effet donnée par (3), le biholomorphisme $z \mapsto \left(\lambda z_1, .., \lambda z_k,\ \lambda^2 z_{k+1}, ..., \lambda^2 z_n\right)$ transforme pour λ suffisamment petit un domaine arbitraire donné contenant l'origine en un domaine aussi petit qu'on veut.

3) D'après ce que nous avons dit précédemment, le théorème A peut être aussi vu comme un résultat sur la classe des opérateurs différentiels d'ordre 1 à coefficients réels analytiques. Notons que ces opérateurs ne peuvent être transformés en opérateurs à coefficients constants par un changement de coordonnées que si M est levi-plate.

4) Il semble que ce théorème soit nouveau même dans le cas apparemment simple des variétés levi-plates réelles analytiques de dimension CR 1 et de dimension réelle quatre ou plus (Brown ayant résolu le cas de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$).

Dans le cas spécial où Ω est un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ de complémentaire connexe, on sait depuis longtemps qu'il est possible d'affaiblir les hypothèses portant sur les fonctions à prolonger et notamment de ne formuler plus que des conditions tangentielles. Déjà en 1931, Severi [59] avait prouvé que si dans $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, Ω est un domaine borné de bord réel analytique, toute fonction réelle analytique sur $b\Omega$ qui vérifie les équations de Cauchy-Riemann tangentielles est la trace sur Ω d'une fonction holomorphe au voisinage de $b\Omega$; appliquant le théorème de Hartogs (alors incomplètement prouvé), il obtenait un prolongement holomorphe à Ω quand $b\Omega$ est connexe. En 1936, Kneser [40] prouvait que si G est un ouvert strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^2$, si Σ est un domaine de bG et si f est une fonction continue sur Σ qui est CR dans le sens faible où $\int_{bD} f dz_1 \wedge dz_2 = 0$ pour tout ouvert D de Σ, alors f se prolonge holomorphiquement à un ouvert contenu dans G dont le bord contient Σ ; lorsque bG est connexe et compact, le choix $\Sigma = bG$ combiné avec le théorème classique de Hartogs donnait le premier exemple de phénomène d'extension de type Hartogs-Bochner. Le résultat de Kneser semble avoir été oublié (voir [20] et [54]) ; Lewy [44] redécouvrit en 1956 le théorème de Kneser pour les fonctions CR de classe C^1.

Même si Bochner [13, 14] n'était pas allé au-delà de la remarque que sa preuve du théorème de Hartogs s'étendait aux «fonctions holomorphes par morceaux continues», ses arguments fondés sur une formule de Green de la théorie du potentiel contiennent[3] la preuve que la conclusion de Hartogs demeure pour les restrictions à $b\Omega$ des fonctions lisses par morceaux dont le $\overline{\partial}$ s'annule sur $b\Omega$. Si dans la paternité de ce phénomène Hartogs et Bochner ont donc incontestablement des droits, Severi en a aussi à part égale et nous proposons d'appeler ce phénomène, «phénomène de Hartogs-Severi-Bochner» : Severi formula les premiers théorèmes ayant trait à ce sujet tandis que Bochner produisit la preuve d'un résultat qu'il n'énonça pas. C'est seulement en 1957 que Fichera [19] fit une synthèse de cette problématique dont le résultat suivant découle : si Ω est un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 2)$ de classe C^2 et de bord connexe, toute fonction CR de classe C^1 sur $b\Omega$ se prolonge holomorphiquement à Ω.

Le phénomène de Hartogs-Severi-Bochner ayant été mis en évidence par Harvey et Lawson [28] pour les sous-variétés complexes de $\mathbb{C}^n$ à bord de bord lisse et connexe grâce aux formules de Bochner-Martinelli, il est naturel de chercher une version du théorème A dans un cadre non réel analytique. Notons qu'hormis le cas exceptionnel où M est une variété complexe, la dimension de $T_p^c b\Omega$ peut varier lorsque p parcourt $b\Omega$ et la notion de fonction CR sur $b\Omega$ pose problème. Nous dirons qu'une fonction f de classe C^m sur $b\Omega$ $(1 \leqslant m \leqslant \quad)$ est CR sur un ouvert U de $b\Omega$ si f est la restriction à U d'une fonction F de classe C^m sur un voisinage de U dans M telle que $\overline{\partial}_M F$ sur U ainsi que ses dérivées jusu'à l'ordre $m-1$; cette définition redonne la notion habituelle lorsque Ω est un domaine lisse suffisamment régulier de $\mathbb{C}^n$ ou plus généralement quand U est une sous-variété CR suffisamment lisse de $\mathbb{C}^n$ (voir la preuve de [4, prop. 3] par exemple).

Lorsque M est une sous-variété de $\mathbb{C}^n$ et Ω un domaine relativement compact de M de complémentaire connexe, nous appelons **principe de Hartogs-Severi-Bochner** l'extension CR à Ω des fonctions qui sont CR de classe $C \quad (b\Omega)$.

Dans [30], ce principe avait été validé pour les variétés 1-concaves et conjecturé pour les variétés faiblement 1-concaves (i.e. non-signées). Des énoncés concernant les variétés standard et feuilletés avait été aussi annoncés. En fait, l'exemple de la section 6.2 montre que le principe de Hartogs-Severi-Bochner n'est pas vrai même dans les variétés de la forme $\mathbb{C}^k \times \mathbb{R}^\ell$ $(k, \ell$

[3] Bochner n'a utilisé l'holomorphie (par morceaux) des fonctions qu'il considère que pour assurer l'anulation de $\overline{\partial} f$ sur $b\Omega$ et pour réaliser f comme le saut à travers $b\Omega$ de

$$F : z \qquad {}_{\zeta \quad b\Omega} \left[f(\zeta) \frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial \nu} - G(\zeta, z) \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \nu} \right] d\sigma(\zeta)$$

où $G(\zeta, z) = \frac{(n-2)!}{\pi^n} \ \zeta - z \ ^{2-2n}$. Cette fonction F est la somme d'un potentiel à double couche et d'un potentiel à simple couche et que le saut de F à travers $b\Omega$ soit f était un résultat connu depuis longtemps même pour les fonctions de classe seulement C^1 sur $b\Omega$ (voir [45] par exemple).

$\mathbb{N}^*$), variétés qui sont à la fois réelles analytiques, levi-plates, standard et feuilletées. Dans cet exemple, l'obstruction au phénomène de prolongement des fonctions CR provient d'une lacune dans la géométrie CR du domaine Ω considéré. La définition et la conjecture ci-dessous formalisent la nature de cet obstacle ; un chemin continu y est dit CR s'il est la juxtaposition de chemins dérivables γ tels que $\dot{\gamma} \quad T^c_\gamma M$.

Définition. Soit M une sous-variété CR de $\mathbb{C}^n$ et Ω un domaine de M. On dit que Ω n'est pas CR-confiné s'il existe un domaine convexe B tel que tout point p de $b\Omega$ peut être joint à un point de $M \setminus bB$ par un chemin CR tracé dans $p \quad (\overline{M \setminus B} \; \overline{\Omega})$.

Conjecture. *On considère une sous-variété CR M de $\mathbb{C}^n$ qui est nulle part strictement pseudoconvexe et de dimension CR au moins 2 ainsi qu'un domaine Ω de M relativement compact dans M. Alors si Ω est suffisamment petit et si Ω n'est pas CR-confiné, toute fonction CR sur $b\Omega$ qui est de classe C se prolonge en fonction CR de classe $C \left(\overline{\Omega}\right)$.*

Notons que cet énoncé est faux si $\dim_{CR} M = 1$ (voir l'exemple de la section 6.3). Pour les variétés standard, c'est à dire du type (3), la conjecture ci-dessus est vraie. Rappelons que ces variétés CR bien que particulières forment une classe importante d'exemples de groupe de Lie nilpotents ; la loi de groupe de M est l'application de $M \times M$ dans M , $(\zeta, z) \quad F_{1,\zeta}(z)$ où pour $\lambda \quad \mathbb{C}^*$, $F_{\lambda,\zeta}$ est l'automorphisme linéaire $z \quad \Big(\lambda z + \zeta , \lambda^2 z + \zeta + 2iF(z , \zeta)\Big)$.

Théorème B. *Soit M une variété standard. On suppose que M est nulle part strictement pseudoconvexe et que $\dim_{CR} M \geqslant 2$. Alors pour tout domaine Ω relativement compact non CR-confiné, toute fonction CR de classe C sur $b\Omega$ se prolonge en une fonction CR de classe C sur $\overline{\Omega}$. Réciproquement, si cette dernière assertion est vraie, alors M est nulle part strictement pseudoconvexe et $\dim_{CR} M \geqslant 2$.*

Un autre indice que la conjecture précédente est plausible est le théorème ci-dessous ; la notion de variété CR feuilletée par des courbes complexes est détaillée dans la section 5.3. Notons que ces variétés sont automatiquement nulle part strictement pseudoconvexes.

Théorème C. *Soit M une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^n$ feuilletée par des courbes complexes. On suppose $\dim_{CR} M \geqslant 2$. Alors pour tout point p de M, il existe $\delta_p \quad \mathbb{R}_+^*$ tel que si Ω est un domaine de M de classe C^2, contenu dans $B(p, \delta_p)$ et non CR-confiné, alors pour tout $m \quad \mathbb{N}^*$, toute fonction de classe C^{m+1} sur $b\Omega$ qui est CR se prolonge en une fonction CR de classe C^m sur $\overline{\Omega}$. Réciproquement, si cette assertion est vraie alors $\dim_{CR} M \geqslant 2$.*

Par manque de temps, nous n'avons par cherché à obtenir d'énoncé optimal pour ces deux théorèmes.

1.2 Idées des preuves et autres résultats

Les arguments avancés par Hartogs ou Osgood pour mettre en évidence le phénomène de Hartogs étaient de type local et se heurtaient à un obstacle de monodromie que Brown parvint à lever dans le cas de $\mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 2)$ ou de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ $(n \geqslant 1)$ à l'aide de considérations topologiques. Le raisonnement de Brown semble inadéquat pour une variété CR non plate . Des arguments plus globaux paraissent nécessaires pour prouver les théorèmes A, B et C.

La géométrie relativement simple des variétés standard permet l'utilisation de formules intégrales dans la preuve du théorème B. Dans le cas du théorème C, l'existence d'un feuilletage par des courbes complexes autorise l'utilisation de la formule de Cauchy à une variable pour construire un candidat raisonnable au prolongement ; le prolongement effectif est obtenu par des arguments globaux permettant de vérifier que la condition des moments est satisfaite. Pour le théorème A, la situation est radicalement différente selon que la dimension CR est 1 ou plus. Le premier cas est simple et est traité dans le même esprit que le théorème C. Dans le cas général, nous suivons le chemin découvert par Serre [58]. Cette méthode, fondée sur la cohomologie à support compact, a souvent été utilisée par la suite pour mettre en évidence un phénomène de Hartogs, par exemple comme dans [30] dans un contexte CR ou comme dans [18] pour des systèmes d'opérateurs différentiels à coefficients constants.

M et Ω vérifiant les hypothèses du théorème A, on se donne une fonction f réelle analytique et CR au voisinage de $b\Omega$. Grâce à un résultat de Tomassini [66], on sait que f est la restriction à M d'une fonction F holomorphe dans un voisinage G_0 de $b\Omega$ dans $\mathbb{C}^n$. La méthode évoquée précédemment est alors de sélectionner dans $C_0\ (G_0, [0,1])$ une fonction χ telle que $\chi = 1$ dans un voisinage G_1 de $b\Omega$ dans $\mathbb{C}^n$ et afin de corriger le défaut d'holomorphie de la fonction $(\chi F)_{G_0 \setminus M}$ prolongée par 0, de résoudre dans un espace fonctionnel adéquat le problème d'inconnue μ

$$\overline{\partial}_M \mu = -f \overline{\partial}_M \chi \ \ et \ \ Supp\, \mu \subset\subset \Omega, \tag{4}$$

puis de prouver que le prolongement CR formel $f = \chi f + \mu$ est en fait réel analytique. Grâce aux travaux de Serre sur la dualité en cohomologie, il est devenu classique que la résolution d'un problème du type (4) se ramène à une résolution de $\overline{\partial}_M$ en bidegré maximal. Nous avons obtenu :

Théorème 1 *Soient M une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^n$ et $k = \dim_{CR} M$. On suppose que M est réelle analytique et nulle part strictement pseudoconvexe. Soient p un point de M et Γ la trace sur M d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ dont la fermeture admet une base de voisinages pseudoconvexes. Il existe alors δ_p $\mathbb{R}_+^*$ ne dépendant que de p et de M tel que si $\Gamma \subset B(p, \delta_p)$, il existe pour tout L $\mathbb{R}_+^*$ un opérateur continu $T_L : C_{n,k}^{\omega,L}\left(\overline{\Gamma}\right)$ $C_{n,k-1}^{\omega}\left(\overline{\Gamma}\right)$ vérifiant $\overline{\partial}_M \circ T_L = Id$.*

Dans ce théorème, $C_{p,q}^{\omega}\left(\overline{\Gamma}\right)$ désigne l'espace des (p,q)-formes f sur M réelles analytiques dans un voisinage de $\overline{\Gamma}$. Les espaces $C_{p,q}^{\omega,L}\left(\overline{\Gamma}\right)$ sont explicitement décrits, ainsi que $\overline{\partial}_M$, dans la section 1.3 ; pour la compréhension du théorème 1 disons ici seulement que $\left(C^{\omega,L}_{p,q}\left(\overline{\Gamma}\right)\right)_{L>0}$ est une famille croissante d'espaces topologiques dont la limite inductive en $+$ est $C^{\omega}_{p,q}\left(\overline{\Gamma}\right)$ muni de sa topologie naturelle.

La preuve du théorème 1 consiste à prolonger les (n,k)-formes $\overline{\partial}_M$-fermées en formes $\overline{\partial}$-fermées dans l'espace ambiant $\mathbb{C}^n$, à résoudre le $\overline{\partial}$ pour ces formes puis à revenir à M par restriction. L'étape essentielle de ce procédé nécessite que $\overline{\Gamma}$ admette dans $\mathbb{C}^n$ une base de voisinages V où l'opérateur $\overline{\partial}$ est résoluble pour les (n,k)-formes. Depuis les travaux d'Andreotti et Grauert [5], on sait que ceci est possible dès que V est strictement $(n-k)$-convexe, ce qui signifie que V admet une fonction définissante ρ de classe C^2 dont la forme de Levi $\mathcal{L}_\rho$ a au moins $n-k+1$ valeurs propres strictement positives en tout point de bV. M étant générique, on a $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} M = \ell = n-k$ et il est connu depuis longtemps que M admet une base de voisinage $(\ell-1)$-convexes. Le résultat ci-dessous montre que dans notre situation, on peut encore gagner une valeur propre strictement positive.

Théorème 2 *Soit M une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^n$ de classe C^m (m $\mathbb{N}$ $,\omega$, $m \geqslant 2$) et nulle part strictement pseudoconvexe ; on pose $\ell = \operatorname{codim}_{\mathbb{R}} M$. Soient p un point de M et Γ la trace sur M d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ dont la fermeture admet une base de voisinages pseudoconvexes. Il existe alors δ_p $\mathbb{R}^*_+$ ne dépendant que de p et de M tel que si $\Gamma \subset B(p,\delta_p)$, $\overline{\Gamma}$ admet une base de voisinages strictement ℓ-convexes de classe C^m telle que pour chaque ouvert V de cette base, il existe un ouvert strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ qui est une extension ℓ-convexe de V (voir section 3.1 pour la définition).*

Remarque. Dans les deux théorèmes précédents, il est important de considérer $\overline{\Gamma}$ et non Γ. En effet, lorsque $M = \mathbb{C}\times\mathbb{R}$ et que Γ est un ouvert étoilé de M, Andreotti et Nacinovich [8, th. 10] ont montré non seulement que $C^{\omega}_{0,1}(\Gamma)\,/\,\overline{\partial}C^{\omega}(\Gamma)$ est de dimension infini mais aussi que Γ n'admet pas de base de voisinages constituée uniquement de domaines d'holomorphie.

Dans notre situation, l'espace qui apparaît naturellement par la méthode de Serre est le dual topologique $C^{\omega}_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)$ de $C^{\omega}_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)$. Cet espace qui par définition est celui des fonctionnelles analytiques portables par $\overline{\Gamma}$, est peu malléable et l'utilisation des hyperfonctions paraît inévitable. Celles-ci constituent en effet un faisceau flasque sur lequel existent les outils habituels de l'analyse, intégration quand le support est compact, dérivation, et aussi la notion plus élaborée de front d'onde réel analytique (voir [34] ou [39]). On désigne par $\mathcal{B}$ le faisceau des hyperfonctions sur M. Si U est un ouvert relativement compact de M, l'espace des hyperfonctions sur U s'identifie au quotient algébrique

$$\mathcal{B}(U) = C^{\omega}_{n,k}\left(\overline{U}\right)\ \ /\ C^{\omega}_{n,k}(bU)\ \ ;$$

si κ est un compact de M, l'espace $\mathcal{B}^{\kappa}(M)$ des hyperfonctions sur M à support dans κ peut être muni d'une topologie naturelle et on dispose d'un isomorphisme topologique

$$\begin{matrix} C^{\omega}_{n,k}(\kappa) & & \mathcal{B}^{\kappa}(M) \\ \lambda & & \lambda \end{matrix} \tag{5}$$

dont l'action commute avec celle de $\overline{\partial}_M$ et qui envoie l'espace des fonctionnelles portables par un compact κ de κ dans l'espace des hyperfonctions dont le support est contenu dans κ . La section 2.1 rappelle de façon succincte comment ces faits peuvent être déduits de l'une des présentations habituelles des hyperfonctions.

Grâce à l'isomorphisme 5, un corollaire de la version duale du th. 1 (voir le th. 11 sec. 3.2 et les prop. 12 et 16 sec. 4.1) permet de résoudre le problème (4) au sens des hyperfonctions : il existe une hyperfonction u à support compact dans Ω telle que $v = \left\{\chi_M f\right\} + u$ est une hyperfonction CR au voisinage de $\overline{\Omega}$ dans M. En toute généralité, ceci ne suffit pas à entraîner que v est réelle analytique dans Ω. Cette conclusion est cependant vraie quand M est une variété complexe (car $\overline{\partial}$ est elliptique) ou quand M est 1-concave (car $\overline{\partial}_M$ est analytique hypoelliptique). Elle est aussi vraie si M est une hypersurface (non-signée) de $\mathbb{C}^n$ d'après un résultat plus fort de Trépreau [67] de propagation de régularité. En codimension quelconque nous avons :

Théorème D. *Soit M une sous-variété de $\mathbb{C}^n$, réelle analytique et CR. On suppose que M est nulle-part strictement pseudoconvexe. Alors pour tout point p de M, il existe δ_p $\mathbb{R}^*_+$ tel que si Ω est un ouvert de M contenu dans $B(p, \delta_p)$, toute hyperfonction CR au voisinage de $\overline{\Omega}$ dans M et réelle analytique au voisinage de $b\Omega$ est en fait réelle analytique sur Ω*

Incidemment, il s'avère que $u = v - \chi_M f$ est de classe C et qu'on a donc résolu le problème (4) mais il ne s'agit ici que d'un à côté de nos arguments. En fait, nous avons vu le théorème D comme une conséquence du théorème A. Le rôle des hyperfonctions dans la preuve du théorème A est de permettre la formulation et l'utilisation d'un théorème de type «Edge of the wedge» (voir th. E sec. 2.2). Le schéma simplifié de la preuve du théorème A en dimension CR au moins 2 est le suivant.

Grâce à un corollaire du théorème 1 (prop. 16), on sait que si Ω est un domaine de M répondant aux hypothèses requises, toute fonction réelle analytique et CR au voisinage de $b\Omega$ admet un prolongement en hyperfonction CR sur Ω. Lorsque Ω est suffisamment petit, M est feuilletée au voisinage de $\overline{\Omega}$ par une famille $(\mathcal{H}_\lambda)_{\lambda < \lambda_0}$ d'hypersurfaces de M qui sont CR et génériques dans $\mathbb{C}^n$. Si f est la fonction à prolonger, pour λ adéquat, f est holomorphe d'un coté $\mathcal{U}^+_\lambda$ de $\mathcal{H}_\lambda$ et reste à prolonger dans l'autre coté $\mathcal{U}^-_\lambda$. Si la borne supérieure de f sur $\mathcal{U}^+_\lambda$ excède en un point p de $\Omega \setminus \mathcal{H}_\lambda$ le maximum de f sur $b\Omega$, on produit après quelques ajustements techniques une hypersurface complexe $F = \quad f = f(p)$ qui coupe transversalement $b\Omega$ en p et telle que $g = [f - f(p)]^{-1}$ est holomorphe près de p au voisinage de $\mathcal{U}^+_\lambda \ F$. Comme F ne peut pas rencontrer $b\Omega$, g est holomorphe au voisinage de $b\Omega$ et se prolonge à Ω donc en hyperfonction CR. Considérant alors $\mathcal{U}^-_\lambda$ comme l'une des faces d'un wedge W d'arête $\mathcal{H}_\lambda$, on prolonge grâce au théorème E la fonction g en une fonction qui est holomorphe dans un wedge W d'arête $\Omega \setminus \mathcal{H}_\lambda$, contenu dans W et tangent à W. La construction des wedges W et W montre que F entre nécessairement dans W, ce qui amène une contradiction. On en déduit que la borne supérieure de f sur $\mathcal{U}_\lambda^+$ est inférieure au maximum de f sur $b\Omega$. En raisonnant avec les dérivées de f, on en conclut que le rayon de convergence de la série de Taylor de f est uniformément minoré sur $\mathcal{U}_\lambda^+$ par une constante positive et donc que f se prolonge au delà de $\mathcal{U}_\lambda^+$ dans M. Un argument de connexité termine alors la preuve.

Il existe de nombreux travaux sur le «Edge of the Wedge», le premier étant sans doute dû à Bernstein [12] en 1912 ; notons que Bernstein peut être considéré comme un précurseur pour le phénomène de Hartogs-Severi-Bochner puisqu'il a établit le prolongement holomorphe à $\mathbb{C}^2$ des fonctions continues sur $(\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{C})$ dont les fonctions partielles $f(., x_2)$ et $f(x_1, .)$ sont holomorphes pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Pour notre version, nous utilisons les formules intégrales de [1] qui présentent l'avantage d'être plus robustes que la technique des disques analytiques.

Les preuves des théorèmes A et D sont données à la fin de la section 4.3 ; le théorème B est prouvé dans la section 5.2 et le théorème C dans la section 5.3 ; les théorèmes 1 et 2 sont respectivement établis dans les sections 3.2 et 3.1.

1.3 Notations

Soit M une sous-variété de $\mathbb{C}^n$ de classe C^r ($r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty, \omega\}$), CR et générique ; il existe donc un système $(\rho_1, ..., \rho_\ell)$ de fonctions de classe C^r tel que $M = \{\rho_1 = ... = \rho_\ell = 0\}$ et $\partial\rho_1 \wedge ... \wedge \partial\rho_\ell \neq 0$ sur M. Un point générique de $\mathbb{C}^n$ étant noté $(z_1, ..., z_n)$, $\Lambda^{p,q}T^*\mathbb{C}^n$ est le fibré de base $\mathbb{C}^n$ et de fibre l'espace engendré par les formes du type $dz_{i_1} \wedge ... \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge ... \wedge d\overline{z}_{j_q}$ où les indices parcourent $\{1, ..., n\}$. Si $p, q \in \mathbb{N}$ et $z \in M$, l'idéal différentiel constitué par les formes qui s'écrivent $\sum_{1 \leqslant j \leqslant N} B_j \wedge \overline{\partial}\rho_j(z)$ avec $B_1, ..., B_N \in \Lambda^{p,q-1}T_z^*\mathbb{C}^n$ est indépendant du système de fonctions définissantes choisi ; on le note $\mathcal{J}_z^{p,q}M$. Par définition, l'espace des (p,q)-formes sur M est le fibré $\Lambda^{p,q}T^*M$ dont la fibre en un point z de M est le quotient $(\Lambda^{p,q}T_z^*\mathbb{C}^n) / \mathcal{J}_z^{p,q}M$.

Si X est une partie de M et $0 \leqslant m \leqslant r$, on définit alors $C_{p,q}^m(X)$ comme étant l'espace des sections de $\Lambda^{p,q}T^*M$ qui sont de classe C^m au voisinage de X dans M. De manière équivalente, si $\Lambda^{p,q}T_M^*\mathbb{C}^n$ est le fibré $\Lambda^{p,q}T^*\mathbb{C}^n$ restreint à M et si $\pi_{p,q}$ est la projection naturelle de $\Lambda^{p,q}T_M^*\mathbb{C}^n$ sur $\Lambda^{p,q}T^*M$, les éléments de $C_{p,q}^m(U)$ sont les $\pi_{p,q}(F|_X)$ où F décrit l'ensemble des (p,q)-formes de classe C^m au voisinage de X dans $\mathbb{C}^n$.

L'opérateur $\overline{\partial}_M$ est défini de la façon suivante : si $f \in C_{p,q}^1(U)$, alors $\overline{\partial}_M f = \pi_{p,q+1}\left(\overline{\partial}F\right)$ où F est n'importe quelle forme C^1 telle que $\pi_{p,q}(F) = f$; cette définition est licite car si F est une forme de classe C^1 appartenant à $\mathcal{J}^{p,q}M$, $\left(\overline{\partial}F\right)|_M \in \mathcal{J}^{p,q+1}M$.

Supposons maintenant M réelle analytique. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ suffisamment petit rencontrant M, on peut trouver pour chaque point z de $\mathcal{U}$ une base $(\varphi_j(z))_{1 \leqslant j \leqslant n}$ de $\Lambda^{1,0}T_z^*\mathbb{C}$

qui dépend analytiquement de z et telle que $Vect_{\mathbb{C}}\,(\,\varphi_1\,(z)\,,..,\varphi_k\,(z)\,)$ est en somme directe avec $Vect_{\mathbb{C}}\,(\,\partial\rho_1\,(z)\,,...,\partial\rho_\ell\,(z)\,)$. Alors si κ est un compact de $\mathcal{U}\setminus M$ et si $f \in C^{\omega}_{p,q}\,(\kappa)$, f admet un unique représentant du type

$$\sum_{|I|=p,\ |J|=q}{}' f_{I,J}\,\varphi^I \wedge \overline{\varphi}^J$$

où les coefficients $f_{I,J}$ sont des fonctions antisymétriques des multi-indices I et J, réelles analytiques au voisinage de κ dans $\mathbb{C}^n$, où le prime signifie que la sommation ne se fait que sur les multi-indices strictement croissants et où $\varphi^I = \varphi_{i_1} \wedge ... \wedge \varphi_{i_p}$, $\overline{\varphi}^J = \overline{\varphi_{j_1}} \wedge ... \wedge \overline{\varphi_{j_q}}$, $I = (i_1, ..., i_p) \in \{1,..,n\}^p$, $J = (j_1, ..., j_q) \in \{1,..,k\}^q$. Pour $L > 0$, on pose alors

$$\|f\|_{\kappa,L,\varphi} = \max_{|I|=p,\ |J|=q}\ \sup_{m\in\mathbb{N}}\ \max_{\kappa} \frac{|D^m\,(f_{I,J}\,|_M)|}{m!\,L^m} \tag{6}$$

et on définit $C^{\omega,L,\varphi}_{p,q}\,(\kappa)$ comme étant l'espace des formes $f \in C^{\omega}_{p,q}\,(\kappa)$ telles que $\|f\|_{\kappa,L,\varphi} < +\infty$.

Si au voisinage de κ, on dispose d'une autre base (ψ_j) du même type que (φ_j), on constate qu'il existe $C > 0$ ne dépendant que de ces bases tel que $\|\cdot\|_{\kappa,L,\varphi} \leqslant C\,\|\cdot\|_{\kappa,CL,\psi}$, ce qui entraîne que l'espace $C^{\omega,CL,\psi}_{p,q}\,(\kappa)$ est topologiquement contenu dans $C^{\omega,L,\varphi}_{p,q}\,(\kappa)$. Par conséquent, lorsque L tend vers $+\infty$ la limite inductive des espaces topologiques $(C^{\omega,L,\varphi}_{p,q}\,(\kappa)\,,\ \|\cdot\|_{\kappa,L})$ ne dépend pas de la base (φ_j) choisie. Cette limite inductive est la topologie naturelle de $C^{\omega}_{p,q}\,(\kappa)$, c'est à dire celle qu'on aurait obtenue en considérant $\Lambda^{p,q}T^*M$ comme une variété réelle analytique et les formes comme des applications à valeurs dans cette variété. Nous n'irons pas plus avant dans ces considérations car la nature semi-globale des théorèmes A, 1 et D permet de n'envisager que la situation normalisée que nous décrivons ci-après.

Lorsque $r > 0$ et E est un espace vectoriel normé, on note $B_E\,(0,r)$ la boule dans E de centre 0 et de rayon r. Dans tout cet article, pour $a_0, b_0 \in \mathbb{R}^*_+$ suffisamment petits mais fixés, on pose

$$\begin{aligned} Q_0 &= B_{\mathbb{C}^k\times\mathbb{R}^\ell}\,(0,a_0)\,, \\ R_0 &= \left\{(z',z'') \in \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^\ell;\ (z',\mathrm{Re}\,z'') \in Q_0\ et\ \mathrm{Im}\,z'' \in B_{\mathbb{R}^\ell}\,(0,b_0)\right\}. \end{aligned}$$

M étant générique, on peut trouver dans $\mathbb{R}^*_+$ des réels a_0 et b_0 tels qu'en effectuant un changement de coordonnées holomorphe dans R_0, les points de $M\setminus\overline{R_0}$ soient les solutions dans $\overline{R_0}$ du système

$$y'' = \sigma\,(z',x'') \tag{7}$$

où $z' = (z_1, ..., z_k)$, $z'' = (z_{k+1}, ..., z_n)$, $x'' = Re\,z'' = (x_{k+1}, ..., x_n)$, $y'' = Im\,z'' = (y_{k+1}, ..., y_n)$ et $\sigma = (\sigma_{k+1}, ..., \sigma_n)$ est une fonction de même classe que M au voisinage de $\overline{Q_0}$ dans $\mathbb{C}^k\times\mathbb{R}^\ell$ s'annulant à l'ordre 2 en 0.

Dans cette situation une (p,q)-forme f sur un ouvert U de $M\setminus R_0$ se laisse écrire de manière unique de la façon suivante

$$f = \sum_{|I|=p,\ |J|=q} {}' f_{I,J}\, dz^I \quad d\overline{z}^J \tag{8}$$

où les coefficients $f_{I,J}$ sont des fonctions antisymétriques des multi-indices I et J et où $dz^I = dz_{i_1} \quad ... \quad dz_{i_p}$ $(I = \ i_1, ..., i_p \ , 1 \leqslant i_1 < ... < i_p \leqslant n)$ et $d\overline{z}^J = d\overline{z_{j_1}} \quad ... \quad d\overline{z_{j_p}}$ $(J = \ j_1, ..., j_q \ ,$ $1 \leqslant j_1 < ... < j_q \leqslant k)$.

Lorsque κ est un compact contenu dans R_0, on note $\ . \ _{\kappa,L}$ la semi-norme définie par (6) quand on utilise la représentation (8). L'espace des (p,q)-formes telles que $\ f \ _{\kappa,L} < +$ est noté $C^{\omega,L}_{p,q}(\kappa)$. Dans cet article, nous n'avons besoin que de ces seuls espaces.

Pour une fonction $u \quad C^1(U)$, $\overline{\partial}_M u$ est donné par l'expression

$$\overline{\partial}_M u = \sum_{1\leqslant j\leqslant k} \overline{L_j} u\, d\overline{z_j}$$

où les champs L_j sont définis par les formules

$$L_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + 2i \sum_{k+1\leqslant s\leqslant n} \lambda_{s,j} \frac{\partial}{\partial z_s},\ 1 \leqslant j \leqslant k, \tag{9}$$

avec $\lambda_{s,j} = \sum_{k+1\leqslant t\leqslant n} \mu_{s,t} \frac{\partial \sigma_t}{\partial z_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant k$ et $k+1 \leqslant s \leqslant n)$ $(\mu_{s,t})_{k+1\leqslant s,t\leqslant n}$ étant la matrice $\left(I - i\left(\partial\sigma_s/\partial x_t\right)_{k+1\leqslant s,t\leqslant n}\right)^{-1}$. Si f est une (p,q)-forme de classe C^1 donnée par (8), on a

$$\overline{\partial}_M f = \sum_{|I|=p,\ |J|=q} {}' \left(\overline{\partial}_M f_{I,J}\right) \quad dz^I \quad d\overline{z}^J. \tag{10}$$

Nous avons aussi besoin des notations ci-dessous (voir [31] par exemple). Lorsque u est une fonction de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, on pose $\omega(u) = du_1 \quad \ldots \quad du_n$ et

$$\omega\ (u) = \sum_{1\leqslant\nu\leqslant n} (-1)^{\nu-1} u_\nu \quad du_\mu. \tag{11}$$

Les formes ainsi définies jouissent des propriétés suivantes. Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, la forme $\frac{\omega'(u) \quad \omega(v)}{(u.v)^n}$ est fermée dans l'ouvert $\ u.v = 0\ $; dans cette expression on a posé

$$z.\zeta = z_1\zeta_1 + \cdots + z_n\zeta_n$$

lorsque $z, \zeta \quad \mathbb{C}^n$. Si λ est une fonction de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{C}$ on a

$$\omega\ (\lambda u) = \lambda^n \omega\ (u) \quad et \quad \frac{\omega\ (\lambda u) \quad \omega(v)}{(u.v)^n} = \frac{\omega\ (u) \quad \omega(v)}{(u.v)^n} \tag{12}$$

Si A est une matrice carrée dont les coefficients sont des formes différentielles, $\det A$ se définit en utilisant la formule sommatoire classique mais dans l'algèbre des formes différentielles. Avec cette définition, $\omega\ (u)$ s'écrit aussi

$$\omega\ (u) = \frac{1}{(n-1)!} \det[\,u,\ \overbrace{du}^{n-1}\,] \tag{13}$$

où l'exposant $n-1$ signifie que du est répétée $n-1$ fois.

Si $(\zeta, z, t) \quad u(\zeta, z, t)$ est une fonction de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, on note $\omega_q(u)$ la composante de $\omega\ (u)$ qui est de degré q par rapport à $d\overline{z}$ et de degré total $n-q-1$ par rapport à $d\overline{\zeta}$ et dt. On a donc

$$-\overline{\partial}_z \omega_{q-1}(u) = \overline{\partial}_\zeta \omega_q(u) + d_t \omega_q(u) \tag{14}$$

ainsi que

$$\omega_q(u) = \frac{1}{(n-q-1)!q!} \det[\,u,\, \overbrace{\overline{\partial}_z u}^{q},\, \overbrace{(\overline{\partial}_\zeta + d_t)\, u}^{n-q-1}\,]. \tag{15}$$

Remarquons que la relation d'homogénéité (12) se transmet à ω_q.

2 Un théorème de type Edge of the Wedge pour des hyperfonctions CR

2.1 Hyperfonctions CR

Dans cet article, les hyperfonctions apparaissent par le biais des formes linéaires continues sur les espaces $C^{\omega}_{n,k}(K)$ où K est un compact de M. Comme M est réelle analytique, un autre point de vue, peut-être plus académique, est de considérer les hyperfonctions à travers les fonctionnelles analytiques d'une complexification de M. La nature de cette opération est d'ignorer la structure complexe standard de $\mathbb{C}^n$ qui pourtant nous a permis de définir la structure CR de M. Dans des cartes bien choisies, il est cependant possible de relier explicitement les deux approches et ainsi d'appliquer directement la théorie des hyperfonctions telle qu'elle est souvent exposée. Nous donnons pour la commodité du lecteur une description de ce lien, les détails pouvant être lus dans [17].

On représente M dans R_0 par un graphe de la forme

$$y\ \ = \sigma(x, y\ ) \tag{16}$$

où σ est une fonction réelle analytique au voisinage de $\overline{Q_0}$ ($Q_0 = B_{\mathbb{R}^N}(0, a_0)$, $N = n + k$) s'annulant à l'ordre 2 en 0. On considère $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^N_0$ muni de ses coordonnées $(x, y\ )$ comme contenu dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k = \mathbb{C}^N_0$ dont on note $\zeta_0 = (\xi_0, \eta_0)$ les coordonnées complexes. On note $\mathcal{X}$ la projection de $M \setminus R_0$ dans Q_0, $z \quad (x, y\ )$.

Soient κ un compact de $M \setminus R_0$ et $\kappa_0 = \mathcal{X}(\kappa)$. L'espace des fonctionnelles sur κ est par définition le dual topologique $C^{\omega}_{n,q}(\kappa)$ de $C^{\omega}_{n,q}(\kappa)$ quand $C^{\omega}_{n,q}(\kappa)$ est muni de la topologie définie dans la section 1.3. Si κ est un compact contenu dans κ, une fonctionnelle $\Lambda \quad C^{\omega}_{p,q}(\kappa)$ est dite portable par κ s'il existe $\Lambda \quad C^{\omega}_{p,q}(\kappa\ )$ telle que Λ est la restriction à $C^{\omega}_{p,q}(\kappa)$ de Λ ; compte tenu du théorème de Hahn-Banach, cela revient à demander que pour tout $L \quad \mathbb{R}^*_+$, il existe une constante C telle que $\quad \Lambda, \varphi \quad \leqslant C \quad \varphi \ _{\kappa', L}$ pour toute forme $\varphi \quad C^{\omega}_{n,q}(\kappa)$; une fonctionnelle portable par un compact κ l'est aussi par n'importe quel compact κ contenant κ . L'action de $\overline{\partial}_M$ sur $C^{\omega}_{n,q}(\kappa)$ est définie par la dualité

$$(\Lambda, f) \quad C^{\omega}_{n,q}(\kappa) \times C^{\omega}_{n,q-1}(\kappa), \ \langle \overline{\partial}_M \Lambda, f \rangle = (-1)^{k-q+1} \langle \Lambda, \overline{\partial}_M f \rangle . \tag{17}$$

Notons que κ étant contenu dans R_0, l'espace $C^{-\omega}_{0,k-q}(\kappa)$ des $(0, k-q)$-formes dont les coefficients dans l'écriture (8) appartiennent à $C^{\omega}(\kappa)$ s'identifie à $C^{\omega}_{n,q}(\kappa)$ via la dualité caractérisée par la formule

$$(\Lambda, f) \quad C^{\omega}(\kappa) \times C^{\omega}(\kappa), \quad \Lambda d\overline{z}^T, f dz \quad d\overline{z}^J \quad = \varepsilon_{TJ} \quad \Lambda, f$$

où $dz = dz_1 \quad ... \quad dz_n$, J (resp. T) parcoure $\ 1, ..., k \ ^q$ (resp. $\ 1, ..., k \ ^{k-q}$) et où ε_{TJ} vaut 0 si $\ j_1, ..., j_q, t_1, ..., t_{k-q}$ n'est pas $\ 1, ..., k$ et est égal au signe de la permutation transformant $T(1, ..., n)\, J$ en $(1, ..., n)\,(1, ..., k)$ sinon. Lorsque $p > 1$, la formule (10) induit un prolongement naturel de $\overline{\partial}_M$ à $C^{-\omega}_{0,p}(\kappa)$ qui coïncide avec l'opérateur $\overline{\partial}_M$ défini par (17). De plus, un élément de $C^{\omega}_{n,q}(\kappa)$ est portable par un compact κ si et seulement si il en est de même des coefficients dans (8) de son identification dans $C^{-\omega}_{0,k-q}(\kappa)$. Désormais, nous ne ferons plus de distinction entre $C^{\omega}_{n,q}(\kappa)$ et $C^{-\omega}_{0,k-q}(\kappa)$, ce qui permet de prolonger l'isomorphisme (5) en un isomorphisme . de $C^{\omega}_{n,q}(\kappa)$ sur l'espace $\mathcal{B}^{\kappa}_{0,k-q}(M)$ des $(0, k-q)$-formes dont les coefficients dans l'écriture (8) appartiennent à $\mathcal{B}^{\kappa}(M)$; cet isomorphisme commute avec $\overline{\partial}_M$.

Si $\Lambda \quad C^{\omega}_{n,q}(\kappa)$, on note $\Lambda_{\mathcal{X}}$ la fonctionnelle qui représente Λ dans la carte $(M \setminus R_0, \mathcal{X})$; $\Lambda_{\mathcal{X}}$ est donc une forme linéaire continue opérant sur l'espace des sections réelles analytiques sur κ_0 du fibré engendré par les formes $\left(dx \quad dy^{\ J}\right)_{\ J\ =q}$ où $dx = dx_1 \quad ... \quad dx_n$ et $dy^{\ J} = dy_{j_1} \quad ... \quad dy_{j_q}$, $J = \ j_1, ..., j_q \ \subset \ 1, ..., k$. Notons $\mathcal{O}(\kappa_0)$ la limite inductive des espaces $\mathcal{O}(U)$ lorsque U décrit la famille des voisinages de κ_0 dans $\mathbb{C}^N_0$ et désignons par ${}_{n,q}\mathcal{O}(\kappa_0)$ l'espace des (n, q)-formes en $(d\xi_0, d\eta_0)$ dont les coefficients appartiennent à $\mathcal{O}(\kappa_0)$. Comme précédemment on identifie $[{}_{n,q}\mathcal{O}(\kappa_0)]$ à l'espace ${}_{0,k-q}\mathcal{O}\ (\kappa_0)$ des $(0, k-q)$-formes en $(d\xi_0, d\eta_0)$ dont les coefficients sont des fonctionnelles analytiques portables par κ_0, c'est à dire des éléments de $\mathcal{O}\ (\kappa_0)$. A $\Lambda \quad C^{\omega}_{n,q}(\kappa)$ on associe alors la fonctionnelle $\Upsilon_0 \Lambda \quad {}_{0,k-q}\mathcal{O}\ (\kappa_0)$ caractérisée par :

$$f_0 \quad \mathcal{O}(\kappa_0), \ \langle\ \Upsilon_0 \Lambda\ , \ f_0\, d\xi_0 \quad d\eta_0^J \ \rangle = \langle\ \Lambda_{\mathcal{X}}\ , f_0\,(x, y\ )\ dx \quad dy^{\ J} \ \rangle$$

où $d\xi_0 = d\xi_{0,1} \quad ... \quad d\xi_{0,n}$ et $d\eta_0^J = d\eta_{0,j_1} \quad ... \quad d\eta_{0,j_q}$, $J = \ j_1, ..., j_q \ \subset \ 1, ..., k$. Notons que $\Lambda \quad C^{\omega}_{n,q}(\kappa)$ est portable par un compact κ de κ si et seulement si $\Upsilon_0 \Lambda$ est portable par $\mathcal{X}(\kappa\ )$ au sens usuel.

Pour constater que Υ_0 est un isomorphisme topologique de $C^{\omega}_{n,q}(\kappa)$ sur ${}_{0,k-q}\mathcal{O}\ (\kappa_0)$ et déterminer en quel opérateur P est transformé $\overline{\partial}_M$, on introduit une complexification M_1 de M de la façon suivante. σ étant réelle analytique sur $\overline{Q_0}$, on peut trouver $c_0 > 0$ suffisamment petit tel que si $W_0 = Q_0 \times \quad Im(\zeta) \ < c_0$, σ ait un prolongement σ holomorphe au voisinage de $\overline{W_0}$. On note alors $\mathcal{Z} : W_0 \quad \mathbb{C}^n$ et $\mathcal{P} : W_0 \quad W_1 = \mathcal{P}(W_0)$ les applications holomorphes définies pour tout $(\xi_0, \eta_0) \quad W_0$ par

$$\mathcal{Z}(\xi_0,\eta_0) = (\,\xi_0\,,\,\xi_0 + i\sigma(\xi_0,\eta_0)\,) \ \ et \ \ \mathcal{P}(\xi_0,\eta_0) = \Big(\,\mathcal{Z}(\xi_0,\eta_0)\ ,\ \eta_0\Big)\ .$$

Puisque $\sigma_{\ Q_0}$ est réelle analytique, on peut supposer quitte à diminuer c_0 que $\mathcal{P}$ est un biholomorphisme. On pose alors

$$M_0 = Q_0,\ \ \mathcal{Z} = \mathcal{Z}^{\ M\setminus R_0}_{\ M_0},\ M_1 = \mathcal{P}(M_0) \ \ et \ \ \mathcal{P} = \mathcal{P}^{\ M_1}_{\ M_0}$$

où lorsque $f : E \quad F$ est une application et que A (resp. B) est une partie de E (resp. F), $f^{\ B}_{\ A}$ est l'application f restreinte à la source A et à l'arrivée B. Ainsi, $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{P}$ sont des difféomorphismes réels analytiques, l'application réciproque de $\mathcal{Z}$ étant $\mathcal{X}$; M_0 et M_1, qui est donnée dans les coordonnées $\zeta_1 = (\xi_1, \eta_1)$ de $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^N_1$ par le système

$$\operatorname{Im}\xi_1 = (\,Re\,\eta_1, \sigma(Re\,\zeta_1)\,) \ \ \& \ \ \operatorname{Im}\eta_1 = 0,$$

sont des sous-variétés CR totalement réelles de $\mathbb{C}^N_0$ et $\mathbb{C}^N_1$ respectivement. De plus, $\mathcal{P}$ étant un biholomorphisme, M_1 et M_0 sont CR-isomorphes et les ouverts W_0 et W_1 apparaissent comme deux complexifications de M. Bien que M_1 ne soit pas CR-isomorphe à M, la structure CR de M qui se lit dans la graduation $(\Lambda^{n,q}T^*M)_{q \ \mathbb{N}}$ est conservée d'une certaine façon par $\mathcal{P}$ car un calcul direct montre que $\Lambda^{n,q}T^*M$ est isomorphe au fibré ${}^{n,q}\Lambda T^*M_1$ engendré dans $\Lambda^{n+q,0}\,T^*_M\mathbb{C}^N_1$ par les formes $d\xi_{1,1} \quad ... \quad d\xi_{1,n} \quad d\eta_{1,j_1} \quad ... \quad d\eta_{1,j_q}$, J décrivant $\ 1,...,k\ ^q$. On en déduit que $\Lambda^{n,q}T^*M$ est isomorphe au fibré ${}^{n,q}\Lambda T^*M_0$ engendré dans $\Lambda^{n+q,0}\,T^*_M\mathbb{C}^N_1$ par les formes $d\xi_0 \quad d\eta^J_0$, J décrivant $\ 1,...,k\ ^q$.

On constate alors que Υ_0 est un isomorphisme topologique de $C^{\omega}_{n,q}(\kappa)$ sur ${}_{0,k-q}\mathcal{O}\ (\kappa_0)$ et que $P\Upsilon_0\Lambda = \Upsilon_0\overline{\partial}_M$ où P est l'opérateur de ${}_{0,k-q}\mathcal{O}\ (\kappa_0)$ dans ${}_{0,k-q+1}\mathcal{O}\ (\kappa_0)$ caractérisé par la formule

$$J \quad 1,...,k\ ^q,\quad f \quad \mathcal{O}\ (\kappa_0)\,,\ P\left(f d\eta^J_0\right) = \sum_{1\leqslant j\leqslant k} P_j f\, d\eta_{0,j} \quad d\eta^J_0\ ,$$

P_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ étant la complexification naturelle dans $\mathbb{C}^N_0$ du champ P_j qui est l'expression dans les coordonnées $(x, y\,)$ du champ antiholomorphe tangent $-2i\overline{L_j}$ défini par (9). De plus, si κ est l'adhérence d'un ouvert U de $M \setminus R_0$ et si $U_0 = \mathcal{X}(U)$, on vérifie que Υ_0 induit un isomorphisme Υ_0 de

$$\mathcal{B}(U) = C^{\omega}_{n,k}\left(\overline{U}\right)\ /\ C^{\omega}_{n,k}(bU) \tag{18}$$

sur l'espace $\mathcal{O}\ \left(\overline{U_0}\right) / \mathcal{O}\ (bU_0)$ qu'il est plus traditionnel de présenter comme l'espace des hyperfonctions sur U. En outre, on a

$$P\Upsilon_0 = \Upsilon_0 \overline{\partial}_M \tag{19}$$

où $P = {}_{1\leqslant j\leqslant k} \; P_j \, dy_j$.

Grâce à l'isomorphisme Υ_0, on transporte sur $\mathcal{B}(U)$ la théorie classique des hyperfonctions. En particulier, on dispose pour $f \quad \mathcal{B}(U)$ d'une notion de support qui est la trace sur U du plus petit compact K de U tel que f est représentable par un élément $C^{\omega}_{n,k}\left(\overline{U}\right)$ portable par K. Ainsi, $f \quad \mathcal{B}(U)$ est à support compact dans U si et seulement si f est représentable par une fonctionnelle portable par un compact de U.

Naturellement, Υ_0 induit un isomorphisme Υ_0 de

$$\mathcal{B}_{0,k-q}(U) \overset{déf}{=} C^{\omega}_{n,q}\left(\overline{U}\right) \;/\; C^{\omega}_{n,q}(bU) \tag{20}$$

sur ${}_{0,k-q}\mathcal{O}\ \left(\overline{U_0}\right) /{}_{0,k-q}\mathcal{O}\ (bU_0)$ qui vérifie aussi (19) ; le support d'un élément f de $\mathcal{B}_{0,k-q}(U)$ est défini de façon similaire à celui d'un élément de $\mathcal{B}(U)$. Identifiant $\mathcal{B}_{0,k-q}(U)$ à l'espace des $(0,k-q)$-formes sur M dont les coefficients dans (8) sont des hyperfonctions, ce support est bien l'intersection des supports des coefficients de f. Remarquons qu'avec cette identification, l'action de $\overline{\partial}_M$ sur f est aussi donnée par la formule (10).

Si $1 \leqslant j \leqslant k$, on note $Car\,(P_j)$ l'ensemble caractéristique de P_j au sens usuel ; c'est l'ensemble des couples (p,p^*) de $M_0 \times T^*M_0$ tels que p^* annule le symbole de P_j évalué en p. Désignons par $Car\,(P)$ l'ensemble caractéristique de P, c'est à dire $\backslash_{1\leqslant j\leqslant k} Car\,(P_j)$. Considérons une hypersurface réelle N de M définie par une fonction φ de classe C^1 au voisinage de M. On note (ρ_j) le système de fonctions $(y_{k+j} - \sigma_{k+j})_{1\leqslant j\leqslant \ell}$ qui définit M. Dire que N est caractéristique pour $\overline{\partial}_M$ c'est par définition dire que l'hypersurface $N_0 = \mathcal{X}\,(N \setminus R_0)$ est caractéristique pour P au sens usuel. C'est donc affirmer que $d\,(\varphi \circ \mathcal{Z})$ est une section de $Car\,(P)$ ou encore que $\overline{\partial}\varphi$ est annulée par les champs de vecteur $\overline{L_j}$, ce qui revient à demander l'appartenance de $\partial\varphi$ à l'orthogonal dans le fibré des $(1,0)$-formes de $\mathbb{C}^n$ de $\;L_1,...,L_k\;$. Ce fibré étant engendré par $\partial\rho_1,...,\partial\rho_\ell$, N_0 est donc caractéristique pour P si et seulement si $(\partial\varphi,\partial\rho_1,...,\partial\rho_\ell)$ est liée. Par contraposée, N_0 est non-caractéristique pour P si et seulement si $(\partial\varphi,\partial\rho_1,...,\partial\rho_\ell)$ est libre ce qui revient à dire que N est une sous-variété de M, CR et générique. Cette dernière propriété ne faisant plus intervenir de coordonnées et se généralisant immédiatement au cas des sous-variétés de codimension arbitraire dans M, nous venons de vérifier le lemme suivant :

Lemme 3 *Les sous-variétés de M non-caractéristiques pour $\overline{\partial}_M$ sont les sous-variétés de M qui sont CR et génériques dans $\mathbb{C}^n$.*

Considérons maintenant une hyperfonction f sur un ouvert U de $M \setminus R_0$; c'est un fait classique de la théorie que f se prolonge une hyperfonction sur M à support dans $\overline{U}$. Soit κ un compact de R_0 tel que $\overline{U} \subset \overset{\circ}{\kappa}$. D'après ce qui précède, $f_0 = \Upsilon_0 f$ est une hyperfonction dont le support est contenu dans $\kappa_0 = \mathcal{X}(\kappa)$ et l'identité (19) entraîne que $Pf_0 = \Upsilon_0 \overline{\partial}_M f = 0$ sur U. Grâce à un théorème de Sato (pour une démonstration, voir par exemple [34, th. 9.5.1]) cette relation permet d'estimer a priori le front d'ondes analytique $FO_A(f_0)$ de f_0, objet qui gouverne la régularité de f_0 et dont le lecteur peut trouver la définition dans [34] ou [39]. Plus précisément, on a

$$FO_A(f_0)_p \subset Car(P)_p = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant k} Car(P_j)_p\,,\ p \quad U_0 \tag{21}$$

où $U_0 = \mathcal{X}(U)$. Nous avons vu que si N est une sous-variété réelle analytique non-caractéristique de M, alors $N_0 = \mathcal{X}(N \setminus R_0)$ est non-caractéristique pour P. Compte tenu de (21), il est alors classique (voir [39] par exemple) que f_0 admet une restriction $f_0 {}_{N_0 \setminus U_0}$ à $N_0 \setminus U_0$ dans la classe des hyperfonctions à support compact dans N_0. Il s'ensuit que $f_0 {}_{N_0 \setminus U_0}$ est représentable par une fonctionnelle analytique $[f_0 {}_{N_0 \setminus U_0}]$ à support compact dans $N_0 \setminus U_0$. Par transport, on en conclut que f admet une restriction $\left\{\Upsilon_0^{-1}[f_0 {}_{N_0 \setminus U_0}]\right\}$ à $N \setminus U$ dans la classe des hyperfonctions à support dans $N \setminus \kappa$. Nous avons donc le lemme suivant :

Lemme 4 *Soit N une sous-variété non-caractéristique de M. Alors toute hyperfonction CR sur un ouvert U de M admet une restriction à $N \setminus U$.*

2.2 Edge of the Wedge (th. E)

Dans cette section, on considère dans un domaine convexe G de $\mathbb{C}^n$ une sous-variété N de $\mathbb{C}^n$ définie par s fonctions $\rho_1, ..., \rho_s$ réelles analytiques sur $\overline{G}$ telles que $\partial\rho_1 \quad ... \quad \partial\rho_s = 0$ sur $\overline{G}$. Dans cette situation où N est le lieu de rencontre des bords des sous-variétés $N_1^G, ..., N_s^G$ définies par

$$N_j^G = G \setminus \quad \rho_j < 0 \ et\ \rho_\nu = 0 \ si\ \nu = j \quad , 1 \leqslant j \leqslant s,$$

le théorème «Edge of the Wedge» de [1] permet d'affirmer que toute fonction CR continue sur N qui dans chaque N_j^G se prolonge en fonction CR près de N s'étend holomorphiquement à un wedge d'arête N. Le théorème E généralise ce résultat en permettant l'utilisation d'hyperfonctions et améliore le domaine du prolongement holomorphe dans la mesure où on obtient ici un wedge tangent au wedge géométrique que forment $N_1^G, ..., N_s^G$.

Théorème E. *On se donne dans $\mathbb{C}^n$ un domaine convexe D de classe C^2 qui rencontre N et pour chaque $j \quad 1, ..., s$ on pose*

$$N_j = N_j^G \setminus D\ ;$$

δ_j étant fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, on note K_j la partie du bord de N_j qui réside dans $-\delta_j \leqslant \rho_j \ \setminus bD$. On considère une fonction f qui est holomorphe au voisinage de $N \setminus \overline{D}$ et de chacun des compacts K_j. On suppose en outre que f se prolonge en hyperfonction CR à chacune des sous-variétés N_j, $1 \leqslant j \leqslant s$.

Alors il existe $C \quad [1, + \quad [$ *tel que si le diamètre de* D *est au plus* $1/C$*,* f *se prolonge holomorphiquement au domaine*

$$\rho_j < -C \quad \rho_\nu^2 \, , \; 1 \leqslant j \leqslant s \quad \setminus D \tag{22}$$
$$\nu = j$$

où $D \;\; = D \setminus \left\{ - (\rho_1 + ... + \rho_s) < \min \left(\delta, \frac{1}{C}, \frac{C}{48} dist\,(.,bD)^2 \right) \right\}$*,* δ *étant le plus petit des réels* $\delta_1, ..., \delta_s$*.*

Plus précisément, on peut choisir C *de la forme* $\kappa_0 C_0$ *où* κ_0 *ne dépend que de* n *et où* C_0 *est le maximum sur* $\overline{G}$ *du module des dérivées d'ordre au plus trois des fonctions* $\rho_1, ..., \rho_s$*.*

Remarque. Le théorème E s'applique en particulier lorsque pour certains entiers j on a $\delta_j > \sup_{z \quad N_j^G \setminus bD} - \rho_j\,(z)$; l'hypothèse sur $f_{\;N_j}$ est alors qu'elle est holomorphe au voisinage de bN_j.

La preuve du théorème s'appuie sur les formules intégrales contenues dans [29] et [1]. On raisonne au voisinage d'un point fixé de N ; en effectuant un changement unitaire de coordonnées, on se ramène au cas où ce point est 0 et $\partial\rho_\nu\,(0) = dz_\nu$ pour $1 \leqslant \nu \leqslant s$. En posant

$$\rho_{s+1} = - (\rho_1 + \cdots + \rho_s)$$

on obtient une fonction analytique réelle sur G telle que si D est un domaine convexe contenu dans G et si $D_j = \;\; z \quad D \; ; \; \rho_j\,(z) < 0 \;\;, 1 \leqslant j \leqslant s+1$, alors

$$\begin{gathered} D \quad N = \quad_{1 \leqslant j \leqslant s+1} D_j, \qquad _{1 \leqslant j \leqslant s+1} D_j = \\ \partial\rho_{j_1} \quad ... \quad \partial\rho_{j_s} = 0 \;\; sur \;\; N \setminus D \end{gathered} \tag{23}$$

pour tout s-uple $(j_1, ..., j_s)$ d'éléments distincts de $\;\; 1, ..., s+1 \;\;$. Si on remplace le jeu de fonctions $(\rho_j)_{1 \leqslant j \leqslant s+1}$ par celui formé par les fonctions

$$\rho_j = \rho_j - A\rho^2, \; 1 \leqslant j \leqslant s+1 \tag{24}$$

où $A \quad \mathbb{R}_+^*$ et $\rho = \left(\rho_1^2 + \cdots + \rho_s^2\right)^{1/2}$, on obtient des fonctions ρ_j et des domaines $D_j = D \setminus \;\; \rho_j < 0 \;\;$ qui vérifient encore (23). Le premier ingrédient de la preuve du th. E est la construction de fonctions barrières adéquates $P_1, ..., P_s$:

Lemme 5 *Il existe une constante* C *du type évoqué dans le th. E telle que si* $A \geqslant C$ *et* $D \subset B\,(0, 1/C)$*, il existe pour tout* $j \quad\;\; 1, ..., s+1 \;\;$ *une fonction* $P_j = (P_{j,1}, ..., P_{j,n})$ *réelle analytique sur* $\overline{D} \times \overline{D}$ *et holomorphe par rapport à* $\zeta_1, ..., \zeta_s$ *telle que la fonction* Φ_j *définie sur* $\overline{D} \times \overline{D}$ *par*

$$\Phi_j\,(\zeta, z) = (z - \zeta)\,.P_j\,(z, \zeta) \tag{25}$$

vérifie

$$\operatorname{Re} \Phi_j\,(\zeta, z) \leqslant \rho_j\,(z) - \rho_j\,(\zeta) - \gamma \;\; \zeta - z \;\;^2 , \;\; z, \zeta \quad \overline{D} \tag{26}$$

où $\gamma = A/24$*.*

Preuve. Si $z, \zeta \quad \overline{G}$, on a

$$\left|\rho_j(z) + \operatorname{Re} F_j(z, \zeta - z) + \mathcal{L}_{\rho_j}(z) \,.\, (z - \zeta) - \rho_j(\zeta)\right| \leqslant C_1 A \quad z - \zeta \quad^3$$

où pour $h \quad \mathbb{C}^n$, $F_j(z, h) = 2\partial\rho_j(z)\,.h + H^c_{\rho_j}(z)\,.h$ ($H^c_{\rho_j}(z)$ est le hessien complexe de ρ_j en z) et où C_1 est de la forme $\kappa_1 C_0$, κ_1 étant un réel positif qui ne dépend que de n et C_0. Par ailleurs, lorsque $h \quad \mathbb{C}^n$ on a

$$\mathcal{L}_{\rho_j}(z)\,.h = \mathcal{L}_{\rho_j}(z)\,.h - 2A \mathop{\qquad}\limits_{1\leqslant\nu\leqslant s} \partial\rho_\nu(z)\,.h \quad^2 - 2A \mathop{\qquad}\limits_{1\leqslant\nu\leqslant s} \rho_\nu(z)\,\mathcal{L}_{\rho_\nu}(z)\,.h$$

et donc pour une constante C_2 du même type que C_1,

$$\begin{aligned}\rho_j(z) - \rho_j(\zeta) \geqslant & -\operatorname{Re} F_j(z, \zeta - z) - C_1 A \quad z - \zeta \quad^3 \\ & + 2A \mathop{\qquad}\limits_{1\leqslant\nu\leqslant s} \partial\rho_\nu(z)\,.\,(\zeta - z) \quad^2 - C_2\,[1 + Ar(z)] \quad \zeta - z \quad^2\end{aligned}$$

où $r(z) = (\mathop{\qquad}\limits_{1\leqslant\nu\leqslant s} \rho_\nu(z)^2)^{1/2}$. Mais pour une constante C_3 du même type que C_1 on a

$$\partial\rho_\nu(z)\,.\,(\zeta - z) \quad^2 \geqslant \frac{1}{2} \quad \zeta_\nu - z_\nu \quad^2 - (C_3)^2 \quad \zeta - z \quad^2 \quad z \quad^2.$$

et donc

$$\begin{aligned}\rho_j(z) - \rho_j(\zeta) \geqslant -\operatorname{Re} \Bigg(& F_j(z, \zeta - z) + A\,(C_3 \quad z \quad)^2 \mathop{\qquad}\limits_{s+1\leqslant\nu\leqslant n} \quad \zeta_\nu - z_\nu \quad^2 \\ & + A \mathop{\qquad}\limits_{1\leqslant\nu\leqslant s} \left(1 - (C_3 \quad z \quad)^2\right) \quad \zeta_\nu - z_\nu \quad^2 - \quad C_1 A \quad z - \zeta \quad + C_2\,[1 + Ar(z)] \quad \zeta - z \quad^2.\end{aligned}$$

Puisque $r(z) \leqslant C_4 \quad z$ pour une constante C_4 du même type que C_1, on en déduit qu'il existe une constante C similaire telle que si z et ζ sont astreints à être dans un domaine convexe D contenu dans une boule ouverte de diamètre au plus $1/C$ et si $A \quad [C, + \quad [$ on obtient

$$\rho_j(z) - \rho_j(\zeta) \geqslant -\operatorname{Re} \quad F_j(z, \zeta - z) + \frac{A}{2} \mathop{\qquad}\limits_{s+1\leqslant\nu\leqslant n} \quad \zeta_\nu - z_\nu \quad^2 \quad + \frac{A}{12} \mathop{\qquad}\limits_{1\leqslant\nu\leqslant s} \quad \zeta_\nu - z_\nu \quad^2$$

Finalement, si on pose $\quad {}^c\rho_j = (\partial\rho_j/\partial z_\nu)_{1\leqslant\nu\leqslant n}$, $\quad {}_{2,\nu}\rho_j = (\partial^2\rho_j/\partial\overline{z_\nu}\partial\overline{z_\mu})_{1\leqslant\mu\leqslant n}$ et

$$\begin{aligned} P_j(z, \zeta) \equiv & -2\,(\quad {}^c\rho_j)(z) - \quad \zeta - z, (\quad {}_{2,\nu}\rho_j)(z) \\ & - \frac{13A}{24}\left(0, ..., 0, \overline{\zeta_{s+1}} - \overline{z_{s+1}}, ..., \overline{\zeta_n} - \overline{z_n}\right) \\ \Phi_j(z, \zeta) \equiv & F_j(z, \zeta) - \frac{13A}{24} \mathop{\qquad}\limits_{s+1\leqslant\nu\leqslant n} \quad \zeta_\nu - z_\nu \quad^2 \equiv \mathop{\qquad}\limits_{1\leqslant\nu\leqslant n} (\zeta_\nu - z_\nu)\,P_{j,\nu}(\zeta, z)\end{aligned}$$

on obtient

$$\rho_j(z) - \rho_j(\zeta) - \frac{A}{24} \quad \zeta - z \quad^2 \geqslant \operatorname{Re} \Phi_j(z, \zeta)$$

pour tout $\zeta, z \quad \overline{D}$. Etant donné que par construction $\Phi_j(z, \zeta)$ est holomorphe par rapport à $(\zeta_1, ..., \zeta_s)$, le lemme est prouvé. ■

Lorsque $J = (j_1, ..., j_m)$ est un m-uple d'entiers distincts, on pose $J = \ j_1, ..., j_m\ $. Si $J \subset \ 1, ..., s+1\ $ on pose

$$D_J = D \setminus \ \ \rho_j < 0,\ j \quad J \quad \textit{et}\ \ \Gamma_J = D \setminus \ \ \rho_j = 0,\ j \quad J \ \ ,$$

Γ_J ayant l'orientation induite par celle de $\mathbb{C}^n$ et le système $(\ \rho_{j_1}, ..., \ \rho_{j_m})$. A l'aide des fonctions ρ_j on définit de manière analogue D_J et Γ_J, Γ_J étant orienté de façon similaire à Γ_J. Ces conventions fournissent plusieurs orientations pour $N \setminus D$. Plus précisément, si $1 \leqslant j \leqslant s+1$ et $j = (1, ..., j-1, j+1, \ldots s+1)$, alors

$$\Gamma_j = \Gamma_j = (-1)^{s+1}\, N \setminus D \tag{27}$$

où $N \setminus D$ est ici implicitement muni de l'orientation induite par $\mathbb{C}^n$ et le système $(\ \rho_1, ..., \ \rho_s)$. Nous pouvons maintenant décrire de façon précise des lieux où les fonctions $\Phi_1, ..., \Phi_s$ ne s'annulent pas, préliminaire nécessaire aux formules intégrales dont nous avons besoin.

Lemme 6 *On adopte les notations et les hypothèses du lemme 5 ainsi que le choix $A = C$. On se donne $\varepsilon > 0$ et j dans $\ 1, ..., s\ $. On pose*

$$\begin{aligned} M_j^\varepsilon &= D \setminus \ \ 0 < \rho_1 = \ldots = \rho_{j-1} = \rho_{j+1} = \ldots = \rho_{s+1} < \varepsilon \\ N_j^\varepsilon &= \left\{\zeta \quad N_j^G\ ;\ 0 > \rho_j(\zeta) > -\varepsilon\right\}\ \textit{et}\ \Sigma_j^\varepsilon = \left(\partial N_j^\varepsilon\right)\ \ \Gamma_j \end{aligned} \tag{28}$$

ainsi que (voir dessin)

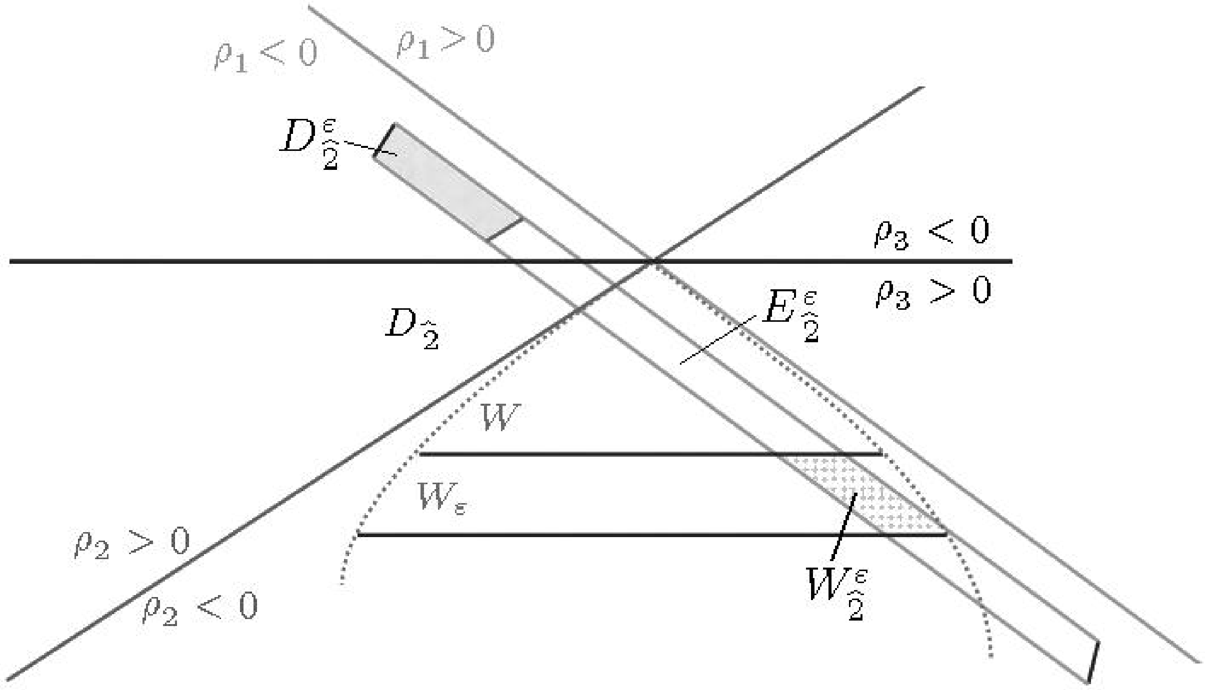
$$\begin{aligned} &E_j^\varepsilon = D \setminus \left\{-2B\varepsilon^2 < \rho_\nu < -B\varepsilon^2,\ \nu \quad 1, ..., j-1, j+1, ..., s\right\}, \\ &D_j^\varepsilon = E_j^\varepsilon \setminus \left\{\rho_j > 2nB\varepsilon^2\right\}, \\ &W = D \setminus \left\{\rho_\nu < -16nB\rho^2,\ 1 \leqslant \nu \leqslant s\right\},\ W^\varepsilon = W \setminus \left\{\frac{1}{16n}\varepsilon < \rho_{s+1} < \varepsilon\right\}, \\ &D_0 = D \setminus \ \ \rho_{s+1} < \frac{\gamma}{2} dist\,(.,bD)^2\ \ ,\ D_0^\varepsilon = D_0 \setminus \left\{\rho_{s+1} < \frac{1}{8n}\varepsilon\right\} \end{aligned}$$

où $B = 16nA$. Alors il existe une constante C de même nature que C telle que si $D \subset B(0, 1/C)$, on a $\operatorname{Re} \Phi_\nu(\zeta, z) < 0$ pour tout $\nu \quad 1, ..., s+1 \quad j$ du moment que (ζ, z) est dans l'un des ensembles

$$\overline{M_j^\varepsilon} \times (D_j \ \ N),\ \ \overline{N_j^\varepsilon} \times D_j^\varepsilon\ \ \textit{et}\ \ \Sigma_j^\varepsilon \times \ \ (W^\varepsilon \quad E_j^\varepsilon) \setminus D_0^\varepsilon\ \ .$$

De plus, il existe dans $\mathbb{R}_+^*$ un réel ε_0 dont l'inverse est une constante du même type que C et tel que si $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $E_j^\varepsilon \setminus D_0^\varepsilon$ est un domaine qui contient D_j^ε et $E_j^\varepsilon \setminus \left\{\frac{-5}{48n}\varepsilon < \rho_j < \frac{-3}{48n}\varepsilon\right\}$ est un ouvert vide contenu dans $W_j^\varepsilon = E_j^\varepsilon \setminus D_0^\varepsilon \setminus W^\varepsilon$.

Remarque. Avant de prouver ce lemme, il est sans doute souhaitable d'expliquer le sens des ensembles ci-dessus. $W \setminus D_0^{\varepsilon_0}$ est essentiellement le wedge intervenant dans le th. E ; $W \setminus D_0^{\varepsilon_0}$ est la réunion des ensembles $W^\varepsilon \setminus D_0^\varepsilon$ lorsque ε décrit $]0, \varepsilon_0]$. Pour chaque ε dans $]0, \varepsilon_0]$, les intégrales que nous écrirons plus loin et qui a priori ne sont définies que pour z dans l'un des domaines D_j seront transformées à l'aide de la formule de Stokes en une intégrale ayant encore un sens quand $z \quad W^\varepsilon$. Le fait que la bande E_j^ε coupe D_j^ε et W^ε permettra de constater que ces nouvelles formules définissent bien ensemble une même fonction. Le dessin ci-dessous illustre la situation .



Preuve. 1) Si $(\zeta, z) \quad \overline{M_j^\varepsilon} \times (D_j \quad N)$ et $\nu \quad 1, ..., s+1 \quad j$, on a $\rho_\nu(z) < 0$ et $\rho(\zeta) \geqslant 0$ de sorte que $\operatorname{Re} \Phi_\nu(\zeta, z) \leqslant -\gamma \;\; z - \zeta \;\; ^2 < 0$.

2) Supposons maintenant $(\zeta, z) \quad \overline{N_j^\varepsilon} \times D_j^\varepsilon$. On a donc $-\gamma \;\; z - \zeta \;\; ^2 < 0$, $\rho_j(\zeta) \quad [-\varepsilon, 0]$ tandis que pour $\nu \quad 1, ..., s \quad j$, on a $\rho_\nu(\zeta) = 0$ et $\rho_\nu(\zeta) = -A\rho_j(\zeta)^2 \geqslant -A\varepsilon^2$. Par conséquent lorsque $\nu \quad 1, ..., s \quad j$ on a

$$\operatorname{Re} \Phi_\nu(z, \zeta) < \rho_\nu(z) + A\varepsilon^2 < 0$$

car $\rho_\nu(z) < -B\,\varepsilon^2$ puisque $z \quad E_j^\varepsilon$. Par ailleurs, comme

$$\rho_{s+1}(z) \leqslant \rho_{s+1}(z) \leqslant -\rho_j(z) + 2(s-1)B\varepsilon^2 < -2B\varepsilon^2$$
$$\rho_{s+1}(\zeta) = -\rho_j(\zeta) - A\rho_j^2(\zeta) \geqslant -A\varepsilon^2$$

on a aussi

$$\operatorname{Re} \Phi_{s+1}(\zeta, z) < -(2B - A)\,\varepsilon^2 < 0.$$

3) Supposons $(\zeta, z) \quad \Sigma_j^\varepsilon \times [W^\varepsilon \setminus D_0^\varepsilon]$. On a encore $-\gamma \;\; z - \zeta \;\; ^2 < 0$ car $z = \zeta$. Soit $\nu \quad 1, ..., s$. On a

$$\rho_\nu(z) = \rho_\nu(z) - A\rho^2(z) \leqslant -\left(16n^2B + A\right)\rho^2(z) = -\left(n\,(16n)^2 + 1\right)A\,\rho^2(z)$$

Puisque les nombres $\rho_1(z), ..., \rho_s(z)$ sont tous de même signe on a $\rho^2(z) \leqslant \rho_{s+1}(z)^2 \leqslant n\rho^2(z)$ et donc

$$\rho_\nu(z) \leqslant -\left(n(16n)^2 + 1\right) A\frac{\rho_{s+1}(z)^2}{n} \leqslant -\left(1 + \frac{1}{n(16n)^2}\right) A\varepsilon^2.$$

car $\rho_{s+1}(z) \geqslant \varepsilon/16n$. Comme $-\rho_\nu(\zeta) = A\rho_j(\zeta)^2 \leqslant A\varepsilon^2$, ceci entraîne

$$\operatorname{Re}\Phi_\nu(\zeta, z) < \frac{-A}{n(16n)^2}\varepsilon^2 < 0$$

Puisque 0 $\quad N$, il existe une constante C_1 de même nature que C telle que

$$\rho < C_1 \, diamètre\,(D).$$

Prenons $C = 8n(1 + C_1)(1 + C)$ et imposons à D d'être contenu dans $B(0, 1/C)$ et d'avoir un diamètre au plus égal à $1/C$. Dans ces conditions, nous disposons de la majoration

$$A\rho < 1/8n \;\; sur \;\; D \tag{30}$$

et donc de l'inégalité

$$-\rho_{s+1} = \rho_j + A\rho_j{}^2 \leqslant (1 - 1/8n)\,\rho_j < 0 \;\; sur \;\; N_j.$$

Lorsque ζ réside dans la partie de Σ_j^ε contenue dans $\quad \rho_j = -\varepsilon \quad$ on en déduit

$$\operatorname{Re}\Phi_{s+1}(\zeta, z) \leqslant \rho_{s+1}(z) - (1 - 1/8n)\,\varepsilon - \gamma \;\; z - \zeta \;\; ^2 < -(1 - 4/n)\,\varepsilon < 0$$

puisque $z \quad D_0^\varepsilon$. Si ζ n'est pas dans $\Sigma_j^\varepsilon \setminus \quad \rho_j = -\varepsilon \quad$, c'est qu'il appartient à $\Sigma_j^\varepsilon \setminus bD$ et du coup

$$\operatorname{Re}\Phi_{s+1}(\zeta, z) \leqslant \rho_{s+1}(z) - \gamma \;\; \zeta - z \;\; ^2 \leqslant -\frac{\gamma}{2} dist\,(z, bD)^2 < 0.$$

4) Supposons $(\zeta, z) \quad \Sigma_j^\varepsilon \times [\,E_j^\varepsilon \setminus D_0^\varepsilon\,]$. On a alors $\operatorname{Re}\Phi_\nu(\zeta, z) < 0$ lorsque $\nu \quad\; 1, ..., s \quad\; j$ pour les mêmes raisons que dans le second cas étudié. La majoration $\operatorname{Re}\Phi_{s+1}(\zeta, z) < 0$ est obtenue comme dans le cas précédent lorsque $\rho_j(\zeta) = -\varepsilon$. Dans le cas contraire, $\zeta \quad bD$ et comme $z \quad D_0$ on a

$$\rho_{s+1}(z) - \gamma \;\; \zeta - z \;\; ^2 \leqslant -\frac{\gamma}{2} dist\,(z, bD)^2 < 0$$

Etant donné que par ailleurs

$$\rho_{s+1}(\zeta) = \rho_j(\zeta) - A\rho_j(\zeta)^2 \leqslant [1 - A\rho_j(\zeta)]\,\rho_j(\zeta) \leqslant [1 - 1/8n]\,\rho_j(\zeta) < 0$$

on a donc encore $\operatorname{Re}\Phi_{s+1}(\zeta, z) < 0$ dans ce cas ci.

5) Puisqu'on a supposé $\quad_{1\leqslant\nu\leqslant s} \quad \overline{\partial}\rho_\nu = 0$ sur G, $(\rho_1, ..., \rho_s)$ peut être complété en un système de coordonnées réelles et il est alors clair que $E_j \setminus D_0^\varepsilon$ est un domaine. $E_j^\varepsilon \setminus D_0^\varepsilon$ contient D_j^ε car si $z \quad D_j^\varepsilon$, on a

$$\rho_{s+1}(z) = -\rho_j(z) - \quad_{1\leqslant\nu\leqslant s,\, \nu=j} \quad \rho_\nu(z) \leqslant -2nB\varepsilon^2 - (s-1)\,B\varepsilon^2 < 0.$$

Soit maintenant $z \quad E_j^{\varepsilon}$. Lorsque $\mu \quad 1,...,s \quad j$, on a $\rho_\mu^2(z) \leqslant 4B^2\varepsilon^4$ et donc

$$\rho^2(z) - \rho_j^2(z) = \qquad \underset{1\leqslant\mu\leqslant s,\ \mu=j}{} \rho_\mu^2(z) \leqslant 4(s-1)B^2\varepsilon^4 \leqslant \frac{1}{32n}\varepsilon^2 \tag{31}$$

à condition de choisir $0 < \varepsilon < \varepsilon_1 = \frac{1}{64nB}$. Sous cette réserve, pour $\nu \quad 1,...,s \quad j$ on déduit de (31) et de la majoration $\rho_\nu(z) < -B\varepsilon^2$ que l'inégalité $\rho_\nu(z) < -16nB\rho^2(z)$ est vraie du moment que

$$-B\varepsilon^2 < -16nB\left[\rho_j(z)^2 + \frac{1}{32n}\varepsilon^2\right]$$

et donc dès que

$$\rho_j(z) \ < \varepsilon/ \ \overline{32n}\ . \tag{32}$$

La condition $\rho_j(z) < -16nBA\rho^2(z)$ est réalisée lorsque

$$\rho_j(z)\left[1 + 16nB\rho_j(z)\right] < -16nB \qquad \underset{1\leqslant\nu\leqslant s,\ \nu=j}{} \rho_\nu^2(z)\,.$$

Quitte à remplacer C par une constante plus grande du même type, l'inégalité (30) peut être renforcée au point que $16nB\rho < \frac{1}{2}$ sur D et en supposant $\rho_j(z) \leqslant 0$ on obtient $\rho_j(z)\left[1 + 16NB\rho_j(z)\right] \leqslant \frac{1}{2}\rho_j(z) \leqslant 0$. Compte tenu de (31), on en déduit que la majoration $\rho_j(z) < -16nB\rho^2(z)$ est vraie du moment que

$$\rho_j(z) < -(16/n)\varepsilon^2 \tag{33}$$

Ainsi, combinant (32) et (33) on constate que $z \quad W$ si

$$-\varepsilon \quad \overline{32n} < \rho_j(z) < -(16/n)\varepsilon^2 \tag{34}$$

Par définition de E_j^{ε} nous avons par ailleurs

$$2(s-1)B\varepsilon^2 \geqslant \rho_{s+1}(z) + \rho_j(z) \geqslant (s-1)B\varepsilon^2.$$

Puisque $D_0^{\varepsilon} \setminus W^{\varepsilon} = \left\{\frac{1}{16n}\varepsilon < \rho_{s+1}(z) < \frac{1}{8n}\varepsilon\right\}$, $z \quad D_0^{\varepsilon} \setminus W^{\varepsilon}$ si

$$\frac{1}{16n}\varepsilon - (s-1)B\varepsilon^2 < -\rho_j(z) < \frac{1}{8n}\varepsilon - 2(s-1)B\varepsilon^2. \tag{35}$$

Lorsque $0 < \varepsilon < \varepsilon_2 = \frac{1}{96n(s-1)B}$, la condition $\frac{-5}{48n}\varepsilon < \rho_j(z) < \frac{-3}{48n}\varepsilon$ suffit à entraîner (35) et (34) et donc finalement que $z \quad E_j^{\varepsilon} \setminus D_0^{\varepsilon} \setminus W^{\varepsilon}$. Le lemme est prouvé. ■

Grâce au lemme 5, on dispose pour chaque $j \quad 1,...,s+1$ d'une fonction Φ_j de la forme (25) et vérifiant (37). On se donne pour D une fonction définissante ρ_0 qui est convexe de classe C^2 et on note Φ_0 la fonction $(\zeta, z) \quad (\zeta - z).P_0(\zeta)$ où $P_0 = 2\partial\rho_0/\partial z$; on a donc

$$(z,\zeta) \quad D \times bD,\ \operatorname{Re}\Phi_0(\zeta, z) = 0. \tag{36}$$

Avant d'écrire les formules intégrales dont nous avons besoin, il nous faut encore introduire quelques notations. $\mathbb{R}^{s+2}$ étant muni de son orientation usuelle, on note Δ le simplexe formé par les éléments $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_{s+1})$ de $[0,1]^{s+2}$ tels que $\lambda_0 + \cdots + \lambda_{s+1} = 1$ et orienté par le vecteur normal $(1, ..., 1)$. De même, si $J = (j_1, ..., j_m)$ est un m-uple d'éléments distincts de $\ 0, ..., s+1$ et si $J \ = \ \ j_1, ..., j_m$, on note Δ_J le simplexe formé par les éléments λ de $[0,1]^{s+2}$ tels que $\underset{j \quad J}{} \lambda_j = 1$ et orienté par la famille de vecteurs orthonormés $\left(\mathbf{1}_{\ J} \ (\nu)\right)_{1 \leqslant \nu \leqslant n}$; on a donc

$$\partial \Delta_J = \underset{1 \leqslant \nu \leqslant m}{} \qquad \Delta_{J_\nu} \tag{37}$$

où $J_\nu = (j_1, ..., j_\nu, j_{\nu+1}, \dots j_m)$, $1 \leqslant \nu \leqslant m$. On note η_J la fonction de $\ \mathrm{Re}\, \Phi_\nu < 0, \ \nu \qquad J \quad \times \Delta_J$ dans $\mathbb{C}^n$ définie par

$$\eta_J(\zeta, z, \lambda) = \underset{j \quad J}{} \quad \lambda_j \frac{P_j(\zeta, z)}{\Phi_j(\zeta, z)} \ ;$$

η_J est donc holomorphe par rapport à $(\zeta_1, ..., \zeta_s)$ et réelle analytique.

Soit $j \qquad 1, ..., s+1$; on pose $0j = (0, 1, .., j-1, j+1, ..., s+1)$. Compte tenu du lemme 6, pour $\nu \qquad j$ et $z \quad D \setminus D_j$, on a $\mathrm{Re}\, \Phi_\nu(., z) < 0$ sur N de sorte que si $f \quad C^\omega\left(N \setminus \overline{D}\right)$ il est possible de poser

$$\frac{1}{c_{n,s}} f_j(z) = \underset{(\zeta,\lambda) \quad \Gamma_j \times \Delta_j}{} \qquad f(\zeta)\, \omega\ \left(\eta_j(z, \zeta, \lambda)\right) \quad \omega(\zeta) + \tag{38}$$

$$(-1)^s \underset{(\zeta,\lambda) \quad \partial\Gamma_j \times \Delta_{0,j}}{} \qquad f(\zeta)\, \omega\ \left(\eta_{0j}(z, \zeta, \lambda)\right) \quad \omega(\zeta)\,.$$

où $c_{n,s} = (-1)^{n-s} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}$. Pour des raisons de degré, f_j est une fonction qui, compte tenu de la régularité de η_j, est réelle analytique sur $D \setminus D_j$. Ces fonctions f_j donnent une décomposition de f lorsque f est CR réelle analytique :

Lemme 7 *Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $N \setminus \overline{D}$. Alors les fonctions $f_1, ..., f_{s+1}$ se prolongent en fonction réelles analytiques au voisinage de $N \setminus D$ et la formule*

$$f(z) = f_1(z) + \cdots + f_{s+1}(z) \tag{39}$$

est vraie en tout point z de $N \setminus D$.

Preuve. La relation (39) est prouvée dans [29, th. 0] lorsque f est une fonction intégrable CR au sens des distributions. Il s'agit donc seulement de prouver la première assertion de ce lemme. Soit $j \qquad 1, ..., s+1$. On sait d'après le lemme 6 que la forme $\omega\ (\eta_j)$ ne présente pas de singularité le long de $X_j^\varepsilon = \overline{M_j^\varepsilon} \times D_j \times \Delta_j$ de sorte que pour z dans D_j la forme $\overline{\partial}_\zeta \ \ f(\zeta)\, \omega\ (\eta_j) \quad \omega(\zeta) \ _z$ est intégrable sur $M_j^\varepsilon \times \Delta_j$. Puisque par hypothèse f est au holomorphe au voisinage de $N \setminus \overline{D}$, on a $\overline{\partial}_\zeta \ \ f(\zeta)\, \omega\ (\eta_j) \quad \omega(\zeta) \ = f(\zeta)\, \overline{\partial}_\zeta \ \ \omega\ (\eta_j) \quad \omega(\zeta)$ sur X_j^ε pourvu que $\varepsilon > 0$ soit assez petit. Considérant $\omega\ (\eta_j)$ comme un déterminant de la forme (13), on développe $\omega\ (\eta_j)$ à l'aide des formules sommatoires classiques. Etant donné que M_j^ε est de dimension réelle $2n - s + 1$, l'intégration sur M_j^ε ne retient dans ce développement que les termes de degré $n-s$ par rapport à $d\overline{\zeta}_1, .., d\overline{\zeta}_n$ et de degré s par rapport à $d\lambda$. Par conséquent, lorsque z est fixé dans D_j, l'intégrale sur $M_j^\varepsilon \times \Delta_j$ de la forme citée plus haut est une combinaison linéaire d'intégrales de formes du type

$$f(\zeta)\,\overline{\partial}_\zeta \left[\overline{\partial}_\zeta u_{\alpha_1} \quad ... \quad \overline{\partial}_\zeta u_{\alpha_{n-s}} \quad d_t u_{\beta_1} \quad ... \quad d_t u_{\beta_s} \quad \omega(\zeta)\right]_z$$

où $u = \eta_j$. Or u est holomorphe par rapport à $(\zeta_1, ..., \zeta_s)$ car $\eta_1, ..., \eta_{s+1}$ le sont. Par conséquent, la forme $\overline{\partial}_\zeta u$ est dans l'espace engendré par $d\overline{\zeta_{s+1}}, ..., d\overline{\zeta_n}$ et la forme ci-dessus est une somme de termes qui chacun se factorise par un produit du type $d\,\overline{\zeta}_{\gamma_1} \quad ... \quad d\,\overline{\zeta}_{\gamma_{n-s+1}}$ avec $\gamma_1, ..., \gamma_{n-s+1}$ $s-1, ..., , n$. Tous ces termes sont donc nuls ce qui signifie que l'image réciproque sur $M_j^\varepsilon \times \Delta_j$ de $\overline{\partial}_\zeta \;\; f(\zeta)\,\omega\;(\eta_j) \quad \omega(\zeta) \;\;_z$ est nulle. Grâce à la formule de Stokes, on en déduit que si $z \quad D_j$, on a

$$\frac{1}{c_{n,s}} f_j(z) = - \int_{(\zeta,\lambda) \quad (\partial M_j^\varepsilon \quad \Gamma_j) \times \Delta_j} f(\zeta)\;\omega\;\Big(\eta_j(z,\zeta,\lambda)\Big) \quad \omega(\zeta) +$$

$$(-1)^s \int_{(\zeta,\lambda) \quad \partial\Gamma_j \times \Delta_{0,j}} f(\zeta)\;\omega\;\Big(\eta_{0j}(z,\zeta,\lambda)\Big) \quad \omega(\zeta)\,.$$

Comme $\rho_\nu = \varepsilon$ sur $\partial M_j^\varepsilon \;\; \Gamma_j$ lorsque $\nu \qquad j$, il est clair au vu de (26) que la formule ci-dessus définit encore une fonction réelle analytique au voisinage de $N \setminus D$ dans $\mathbb{C}^n$. ∎

Nous pouvons maintenant achever la preuve du th. E .

Preuve du théorème E. On se donne une fonction f comme dans l'énoncé de ce théorème. Soit alors $\varepsilon \quad]0, \varepsilon_1]$ où $\varepsilon_1 = \min(\varepsilon_0, \delta_1, ..., \delta_s)$, ε_0 étant pris comme dans le lemme 6. D'après ce même lemme, on sait que si $1 \leqslant j \leqslant s$ et $(z,\lambda) \quad D_j^\varepsilon \times \Delta_j$ la fonction $\zeta \quad \eta_j(z,\zeta,\lambda)$ est réelle analytique au voisinage de $\overline{N_j^\varepsilon}$. Le bord de la sous-variété N_j^ε est constitué d'une part de $N \quad \left[\overline{D} \setminus bN_j\right]$ et d'autre part de $\overline{L_j^\varepsilon}$ où

$$L_j^\varepsilon = D \setminus \quad \rho_j = -\varepsilon,\; \rho_\nu = 0,\; \nu \qquad 1, ..., s \qquad j \quad .$$

Par hypothèse, f est holomorphe au voisinage de $\left[N \setminus \overline{D}\;\right] \quad bN_j$ et se prolonge à N_j en une hyperfonction CR que nous notons encore f. Il en résulte qu'au voisinage de $\overline{N_j}$ dans N_j^G l'image réciproque du premier intégrande dans (38) est une forme fermée. Par ailleurs, L_j^ε étant une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^n$, L_j^ε est non-caractéristique (voir section 2.1) et f y admet donc une restriction. Par conséquent, la formule de Stokes pour les hyperfonctions livre que pour tout $z \quad D \setminus D_j^\varepsilon$

$$\frac{1}{c_{n,s}} f_j(z) = - \int_{(\zeta,\lambda) \quad \Sigma_j^\varepsilon \times \Delta_j} f(\zeta)\;\omega\;\Big(\eta_j(z,\zeta,\lambda)\Big) \quad \omega(\zeta) + \tag{40}$$

$$(-1)^s \int_{(\zeta,\lambda) \quad \partial\Gamma_j \times \Delta_{0,j}} f(\zeta)\;\omega\;\Big(\eta_{0,j}(z,\zeta,\lambda)\Big) \quad \omega(\zeta)\,.$$

Grâce au lemme 6, on constate que le membre de droite de cette égalité fournit une formule pour un prolongement f_j^ε de f_j à $(W^\varepsilon \quad E_j^\varepsilon) \setminus D_0^\varepsilon \setminus D$. D'après la dernière assertion du lemme 6, lorsque $\varepsilon \quad]0, \varepsilon_1[$ est suffisamment voisin de ε l'intersection de $E_j^\varepsilon \setminus D_0^\varepsilon \setminus D$ et de $E_j^{\varepsilon'} \setminus D_0^{\varepsilon'} \setminus D$ est un domaine qui rencontre $D_j^\varepsilon \setminus D_j^{\varepsilon'} \setminus D_1$ et $W^\varepsilon \setminus W^{\varepsilon'} \setminus D$. Par conséquent $f_j^\varepsilon = f_j^{\varepsilon'}$ sur $D_j^\varepsilon \setminus D_j^{\varepsilon'} \setminus D$ et le principe de l'unicité du prolongement analytique donne $f_j^\varepsilon = f_j^{\varepsilon'}$ sur $W^\varepsilon \setminus W^{\varepsilon'}$. En fin de compte, ceci prouve que f_j se prolonge en une fonction réelle analytique, que nous notons encore f_j, sur $W \setminus E_j \setminus D$ où

$$W = \{\rho_\nu < -B\,\rho^2,\ 1 \leqslant \nu \leqslant s\}$$
$$E_j = \{-B\ \varepsilon_0^2 < \rho_\nu < 0,\ \nu \quad 1, ..., j-1, j+1, ..., s\}$$
$$D = D \setminus \quad -(\rho_1 + \cdots + \rho_s) < \min\left(\varepsilon_1, \frac{\gamma}{2} dist\,(., bD)^2\right)$$

avec $B = 16nB = 256n^2A$ et $B = 32nsA$. Puisque $W \subset D_{s+1}$ la fonction

$$F : z \qquad \underset{1 \leqslant j \leqslant s+1}{\ } f_j\,(z)$$

est réelle analytique sur $W \setminus D$. Grâce que lemme 7, on sait qu'elle coïncide avec f sur $N \setminus D$ qui est une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^n$. On en déduit que F et f sont égales au voisinage de $N \setminus D$ dans $\mathbb{C}^n$, ce qui entraîne, puisque F est réelle analytique, que F est holomorphe sur $W \setminus D$. Le théorème E est donc prouvé.

3 L'opérateur $\overline{\partial}_M$ sur une variété nulle part strictement pseudoconvexe

3.1 Base de voisinages adaptés (th. 2)

Dans cette section, on prouve le théorème 2.

Au cours de l'introduction, nous avons mentionné la définition d'un ouvert strictement q-convexe. Nous aurons aussi besoin de la notion ci-dessous (voir [31, déf. 12.1, p. 100] par exemple). On rappelle qu'une fonction $\rho : U \quad \mathbb{R}$ est p-convexe si sa forme de Levi possède au moins p valeurs propres strictement positives en tout point de U.

Définition. Soient V et X deux domaines de $\mathbb{C}^n$. On dit que X est une extension q-convexe de V si $V \subset X$ et si les deux conditions suivantes sont réalisées

1. bV est compact
2. Il existe un voisinage ouvert Y de $X \quad V$ dans X et une fonction $(q+1)$-convexe $\theta : Y \quad \mathbb{R}$ telle que $V \setminus Y = \quad z \quad Y\ ;\ \theta\,(z) < 0 \quad$ et telle que pour tout $c \quad]0, \underset{U}{sup}\,\theta[$, l'ensemble $\quad z \quad Y\ ;\ 0 \leqslant \theta \leqslant c \quad$ est compact.

On se place désormais dans la situation du théorème 2 ; M est donc est une sous-variété CR générique de de $\mathbb{C}^n$ au moins de classe C^2. On suppose que M est nulle part strictement pseudoconvexe et on se donne un point p de M que par translation on ramène à l'origine. La conclusion du th. 2 permettant l'usage d'ouverts arbitrairement petits et M étant générique, on peut considérer que M est donnée dans R_0 par (7) ; lorsque $a_1 \quad]0, a_0]$, on utilise aussi la notation

$$\begin{aligned} Q_{a_1} &= B_{\mathbb{C}^k \times \mathbb{R}^\ell}(0, a_1) , \\ R_{a_1} &= \left\{ (z \,, z \;) \quad \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^\ell ;\ (z \,, \operatorname{Re} z \;) \quad Q_{a_1} \ et\ \operatorname{Im} z \qquad B_{\mathbb{R}^\ell}(0, b_0) \, ; \ \right\} \end{aligned}$$

Pour ne pas trop alourdir les calculs qui vont suivre, on convient des points suivants :

- On note indifféremment Cte toutes les constantes qui ne dépendent que de a_0, b_0 et $C = \quad \rho \quad _{C^2(Q_0)}$. Toutes ces constantes seront prises dans $]1, + \quad [$.
- Si g et f sont deux fonctions complexes définies sur un même ensemble, on écrit $g = O(f)$ lorsque $\ g \ \leqslant Cte \ \ f \ $.
- Si P_α est une propriété indexée par un paramètre α appartenant à un espace vectoriel réel ou complexe, on dit que P_α est vraie pour α assez petit lorsqu'il existe une constante telle que P_α est vraie pour $\ \alpha \ \leqslant \frac{1}{Cte}$.
- Si f est une fonction définie en $z \quad \mathbb{C}^n$, on écrit f au lieu de $f(z)$ à chaque fois que le risque d'ambiguïté est minime.

Pour $j = 1, ..., \ell$, on note ρ_j la fonction définie sur R_0 par

$$z \quad R_0,\ \rho_j(z) = y_{k+j} - \sigma_{k+j}(z \,, x \;) , \tag{41}$$

et ρ celle définie par la formule

$$\rho = \sum_{1 \leqslant j \leqslant \ell} \rho_j^2 \, .$$

On fixe une constante A dans $]1, + \quad [$ et lorsque $\varepsilon \quad \mathbb{R}_+^*$ on considère

$$\begin{aligned} r : z & \quad e^{A \ z \ ^2} \rho(z) \\ G_\varepsilon &= \ \ z \quad R_0 \ ; \ r(z) < \varepsilon \\ M_\varepsilon &= \ \ z \quad R_0 \ ; \ r(z) = \varepsilon \end{aligned} \quad .$$

Le th. 2 résulte du lemme ci-dessous que nous prouverons après en avoir déduit le th. 2.

Lemme 8 *Lorsque A est supérieur à une constante ne dépendant que C, n, a_0 et b_0, il existe $a_1 \quad]0, a_0[$ et $\varepsilon_0 \quad]0, 1[$ ne dépendant que de C, n, a_0 et b_0, tels que les assertions suivantes sont vraies*

a) Si $\varepsilon > 0$, $G_\varepsilon \subset \ \ dist(., M) \leqslant \ \ \overline{\varepsilon} \ $.

b) Si $z \quad (R_{a_1} \setminus G_{\varepsilon_0}) \ \ M$, $\quad r(z) \ \geqslant \ \ \overline{r(z)}/2$ et il existe un sous-espace E_z de $Ker\, \partial r(z)$ de dimension ℓ tel que si $\theta \quad E_z$, $\mathcal{L}_r(z) . \theta \geq r(z) \ \ \theta \ ^2$.

Preuve du théorème 2.

Reprenant les notations du lemme ci-dessus, on fixe ε dans $]0, \varepsilon_0[$ et on se donne un ouvert S de $R_{a_1} \setminus G_{\varepsilon_0}$ admettant une base de voisinage pseudoconvexes, ce qui permet de sélectionner une famille $(S_t)_{0<t\leqslant 1}$ d'ouverts strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$ relativement compacts dans $R_{a_1} \setminus G_{\varepsilon_0}$ telle que

$$t, t \quad [0,1]\,,\ t < t \ = \quad S_t \subset\subset S_{t'}$$
$$(S_t)_{0<t\leqslant 1} \ \textit{est une base de voisinages de } \overline{S}\ .$$

Puisque $r = 0$ sur $M \setminus R_0$, $(G_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ est une base de voisinages dans R_0 de $M \setminus R_0$ qui est un fermé de R_0. Comme (S_t) est une base de voisinages dans R_0 du fermé $\overline{S}$, $(G_\varepsilon \setminus S_t)_{\varepsilon,t}$ est une base de voisinages de $M \setminus \overline{S}$ dans R_0. Pour obtenir la conclusion du théorème, il suffit donc de prouver que pour tout $(\varepsilon, t) \quad]0, \varepsilon_0[\times]0,1[$, $G_\varepsilon \setminus S_t$ contient un voisinage V de $M \setminus \overline{S}$ strictement ℓ-convexe et pour lequel il existe un ouvert pseudoconvexe dont V est une extension ℓ-convexe.

Fixons donc (ε, t) dans $\quad]0, \varepsilon_0[\times]0,1[$ et $\gamma > 0$ étant pour l'instant une constante arbitraire, considérons la fonction $g = e^{\gamma r}$. Lorsque $z \quad G_{\varepsilon_0} \setminus R_{a_1}$ et $\theta \quad \mathbb{C}^n$, on a

$$\mathcal{L}_g.\theta = \gamma e^{\gamma r}\left[\mathcal{L}_r.\theta + \gamma \ \ \partial r.\theta \ ^2\right]\ .$$

Si de plus $\theta \quad E_z \oplus \mathbb{C}\nu$ où $\nu = \frac{r}{r}$ (la somme est bien orthogonale puisque $E_z \subset Ker\,\partial r = \nu \quad$), θ s'écrit $x + \lambda\nu$ avec $(x, \lambda) \quad E_z \times \mathbb{C}$ vérifiant $\ x\ ^2 + \ \lambda\ ^2 = \ \theta\ ^2$ et il vient grâce au a) du lemme 8

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma e^{\gamma r}}\mathcal{L}_g.\theta &= \mathcal{L}_r.x + 2Re\left[\lambda\mathcal{L}_r.(\nu, x)\right] + \ \lambda\ ^2\mathcal{L}_r.\nu + \gamma\ \ \lambda\ ^2\ \ \partial r\ ^2 \\ &\geqslant \ x\ ^2 - 2\ \ \mathcal{L}_r\ \ \ x\ \ \lambda\ - \ \ \mathcal{L}_r\ \ \ \lambda\ ^2 + \gamma\ \lambda\ ^2\frac{r}{4} \\ &\geqslant \frac{r}{2}\ \ x\ ^2 + \left(\gamma\frac{r}{4} - \frac{16}{r}\ \ \mathcal{L}_r\ ^2 - \ \ \mathcal{L}_r\ \right)\ \lambda\ ^2\ .\end{aligned}$$

Lorsque $z \quad G_{\varepsilon_0} \ \ G_{\varepsilon/2}$, on a $r \geqslant \varepsilon/2$ et il suffit de prendre a priori $\gamma = \frac{Cte}{\varepsilon^2}$ pour obtenir que

$$\frac{1}{\gamma e^{\gamma r}}\mathcal{L}_g.\theta \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\ \ x\ ^2 + \ \lambda\ ^2 \geq \frac{\varepsilon}{4}\ \theta\ ^2\,,\ \theta \quad E_z \oplus \mathbb{C}\nu$$

et donc que g est strictement $(\ell+1)$-convexe dans $G_{\varepsilon_0} \ \ G_{\varepsilon/2}$.

Pour conclure, on répète alors une construction faite par Laurent-Thiébaut dans [41, prop. 2.7]. On sait que S_t admet une fonction définissante ψ de classe C^2 et strictement plurisousharmonique au voisinage de $\overline{S_t}$. On pose

$$g_\varepsilon = g - e^{\varepsilon\gamma} = e^{\gamma r} - e^{\varepsilon\gamma}\,,\ \ \mu = \underset{\overline{S_t}}{max}\, g_\varepsilon$$

et considérant pour $c \quad]0, \underset{\overline{S}}{min}\ \ \psi\ \ [$ l'ouvert $S_t = \ \ \psi < -c \ \ $, on se donne $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\mu < C_1 \ \ et \ \ C_1 - C_2 c \ < 0\ .$$

On se donne un réel $\beta > 0$ que nous choisirons ultérieurement ainsi qu'une fonction convexe v

de classe C telle que $v(t) = t$ si $t \geqslant 2\beta$, $v(0) = \beta$ et $v \leqslant 1$, ce qui permet d'obtenir une fonction maximum approchée en posant $max_v(x,y) = \frac{1}{2}[x + y + v(x-y)]$. On définit alors une fonction θ de classe $C^m\left(\overline{S_t}\right)$ en posant

$$\varphi = C_1 + C_2\psi, \quad \theta = max_v(\varphi, g_\varepsilon)$$

et on considère

$$W = \left\{z \quad \overline{S_t}\ ;\ \theta(z) < 0\right\}\ .$$

Etant donné que $max \leqslant max_v \leqslant \beta + max$, on a $W \subset G_\varepsilon \setminus S_t$ et aussi $M \setminus \overline{S} \subset W$ du moment que $\beta < inf\,(e^{\varepsilon\gamma} - 1\,,\, C_2 c \ - C_1)$. Si on impose aussi $\beta < C_1 - \mu$, on a $\varphi = C_1 > g_\varepsilon + \beta$ sur bS_t et donc $\theta = \varphi$ au voisinage de bS_t. W est alors un ouvert de $\mathbb{C}^n$ relativement compact dans S_t.

Posons $E = \overline{S}_t \ W$. θ est strictement plurisousharmonique au voisinage de $E \backslash \ \ \varphi - g_\varepsilon \geqslant 2\beta$ car $\theta = \varphi$ sur $\ \varphi - g_\varepsilon \geqslant 2\beta$. θ est strictement $(\ell+1)$-convexe au voisinage de $E \backslash \ \ \varphi - g_\varepsilon \leqslant -2\beta$ car d'une part g_ε est strictement $(\ell+1)$-convexe sur $G_{\varepsilon_0} \ G_{\varepsilon/2}$ et car d'autre part sur l'ensemble $\ \varphi - g_\varepsilon \leqslant -2\beta \quad W$ on a $g_\varepsilon = \theta \geqslant 0$. Enfin, sur l'ensemble $E \setminus \quad \varphi - g_\varepsilon \ \leqslant 2\beta$ on a $max(\varphi, g_\varepsilon) \geqslant -\beta$ et donc $g_\varepsilon \geqslant -\beta$. En imposant la condition $\beta < e^{\varepsilon\gamma} - e^{\varepsilon\gamma/2}$, on obtient que g_ε est strictement $(\ell+1)$-convexe au voisinage de $E \setminus \quad \varphi - g_\varepsilon \ \leqslant 2\beta$ et φ étant plurisousharmonique, un calcul immédiat montre qu'il en est de même de θ. En fin de compte, θ est strictement $(\ell+1)$-convexe au voisinage de E dans $\mathbb{C}^n$.

Ainsi, S_t est une extension ℓ-convexe de W. Il se peut cependant que bW ait des points singuliers et donc que W ne soit pas strictement ℓ-convexe. Cette objection peut être levée en utilisant la théorie de Morse. On sait qu'il existe dans $\mathbb{C}^n$ un ensemble N de mesure nulle tel que $\theta + \ \ .,u\ \ ,\ u \quad \mathbb{C}^n \ \ N$ n'a de point critique qu'isolé. Lorsque $u \quad \mathbb{C}^n \ \ N$, on pose alors $\theta_u = \theta + \ u \ \ .^2 + \ .,u$ et $\varphi_u = \varphi + \ u \ \ .^2 + \ .,u$. La fonction $\ u \ \ .^2 + \ ,u$ étant plurisousharmonique, θ_u est strictement $(\ell+1)$-convexe au voisinage de $\overline{S_t} \ W$ dans S_t et au voisinage de bS_t coïncide avec la fonction strictement plurisousharmonique φ_u. On fixe alors $u \quad \mathbb{C}^n \ \ N$ assez petit de sorte que $M \setminus \overline{S} \subset \ \ \theta_u < 0 \ \ \subset G_\varepsilon \setminus S_t$ et que $\ \varphi_u \leqslant 0$ soit suffisamment proche de $\overline{S_t}$ afin que φ_u soit strictement plurisousharmonique au voisinage de $\ \varphi_u \leqslant 0$. Les éventuels points critiques de θ_u étant isolés, on peut trouver $\eta > 0$ assez petit tel que θ_u n'ait pas de point critique sur le bord de $V = \ \ \theta_u < -\eta$ et tel que $M \setminus \overline{S} \subset V \subset G_\varepsilon \setminus S_t$. Par construction, V est un voisinage strictement ℓ-convexe de $M \setminus \overline{S}$ de classe C^m et $\ \varphi_u < 0$, qui est un ouvert strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, est une extension ℓ-convexe de V. La preuve du th. 2 moyennant celle du lemme 8, est achevée. ■

Preuve du lemme 8. L'assertion (a) est évidente car si $z \quad G_\varepsilon\ (\varepsilon > 0)$ et $\zeta = (z\ , x\ \ + i\sigma(z\ , x\ \ ))$, $\zeta \quad M$ et donc

$$dist\,(z, M) \leqslant \ z - \zeta \ = \ \ \overline{\rho} \leqslant \ \ \overline{r} \leqslant \ \ \overline{\varepsilon}\ .$$

Fixons maintenant ε_0 dans $]0,1[$ et a dans $]0,a_0[$. Soit $z \quad (R_a \setminus G_{\varepsilon_0}) \quad M$. Puisque $y \quad = (\rho_1,..,\rho_\ell)+\sigma$ et σ s'annule à l'ordre 2 en 0, il vient

$$y \quad \leqslant \quad \overline{r\, e^{-A\, z\, ^2}} + O\Big(\; (z\, , x\ \ )\ ^2 \Big) \ .$$

Par ailleurs,

$$r = e^{A\, z\, ^2} [\quad \rho + A\rho\, z\,] \, , \qquad \rho = 2 \sum_{1 \leqslant j \leqslant \ell} \rho_j \quad \rho_j . \tag{42}$$

et comme

$$\rho_j = \quad y_{k+j} - \quad \sigma_{k+j}\,(z\, , x\ \ ) = \quad y_{k+j} + O\,(\ z\, , x\ \ \ )\, , \ 1 \leqslant j \leqslant \ell \, ,$$

on obtient

$$e^{-A\, z\, ^2} \quad r = \sum_{1 \leqslant j \leqslant \ell} \rho_j \quad y_{k+j} + AO\,(\ z \quad \overline{\rho}) \ .\tag{43}$$

On en déduit que

$$r \ = e^{A\, z\, ^2} \quad \overline{\rho}\ [1 + AO\,(\ z \quad \overline{\rho})] \tag{44}$$

ce qui donne la première affirmation de (b) si $A\,(a+\varepsilon_0)$ est suffisamment petit.

Il s'agit maintenant de prouver qu'il existe un sous-espace de dimension ℓ de $Ker\,\partial r$ sur lequel $\mathcal{L}_r$ est définie positive. Lorsque $\theta \quad Ker\,\partial r$, (42) montre que $\partial\rho.\theta = -A \ \ \theta, z \ \ \rho$ et un calcul immédiat donne que

$$\begin{aligned} e^{-A\, z\, ^2}\mathcal{L}_r.\theta &= \mathcal{L}_\rho.\theta - A^2\rho \quad \theta, z \quad ^2 + A\rho \ \ \theta\ ^2 \\ &\geqslant \mathcal{L}_\rho.\theta + A\,\big(1 - 2 \ \ z\ ^2 A\big) \ \ \theta\ ^2\, \rho\ . \end{aligned}$$

Il suffit donc que $A\,(a+\varepsilon_0)^2$ soit assez petit pour que

$$\theta \quad Ker\,\partial r, \ \mathcal{L}_r.\theta \geqslant e^{A\, z\, ^2}\left(\mathcal{L}_\rho.\theta + \frac{1}{2}A\rho \ \ \theta\ ^2\right) \ . \tag{45}$$

Nous sommes donc amenés à étudier la restriction de $\mathcal{L}_\rho$ à $Ker\,\partial r$. Compte tenu de (42), on a

$$\mathcal{L}_\rho.\theta = \mathcal{L}_1.\theta + \mathcal{L}_2.\theta$$

où

$$\mathcal{L}_1.\theta = 2 \sum_{1 \leqslant j \leqslant \ell} \partial\rho_j.\theta\ ^2 \quad et \ \ \mathcal{L}_2.\theta = 2 \sum_{1 \leqslant j \leqslant \ell} \rho_j \mathcal{L}_{\rho_j}.\theta \ .$$

Posons $\zeta = (z\, , x\ \ + i\sigma\,(z\, , x\ \ ))\, ; \, \zeta \quad M$ et comme les dérivées de ρ d'ordre 1 ou 2 en z et en ζ coïncident, on a

$$T^{1,0}_\zeta M = \bigcap_{1 \leqslant j \leqslant \ell} Ker\,\partial\rho_j \ \ et \ \ \mathcal{L}_{\rho_j} = \mathcal{L}_{\rho_j}\,(\zeta)\, , \ 1 \leqslant j \leqslant \ell \ .$$

On pose

$$X = \big(T^{1,0}_\zeta M\big) \quad \cap \ Ker\,\partial r$$

où $\big(T^{1,0}_\zeta M\big)$ est le supplémentaire orthogonal de $T^{1,0}_\zeta M$ dans $T^{1,0}_\zeta \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n$. Puisque les formes

$\partial\rho_j$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes, $T^{1,0}_\zeta M$ est de dimension $n-\ell$ et donc X est au moins de dimension $\ell-1$.

1) *Minoration de* $\mathcal{L}_\rho$ sur $\left(T^{1,0}_\zeta M\right)$.

On sait qu'une base de $T^{1,0}_\zeta M$ est donnée par les vecteurs $L_1,...,L_k$ définis par (9). Les champs

$$H_j = \frac{\partial}{\partial z_{k+j}} + 2i \sum_{1\leqslant p\leqslant k} \overline{\lambda_{k+j\,p}} \frac{\partial}{\partial z_p},\ 1 \leqslant j \leqslant \ell.$$

forment donc une base de $\left(T^{1,0}_\zeta M\right)$. Un calcul élémentaire montre que si a est assez petit, alors pour tout $s \quad 1,...,\ell$ et $\theta = \underset{1\leqslant j\leqslant \ell}{\Sigma} \theta_j H_j$ de norme 1, on a

$$\partial\rho_s.\theta\ ^2 \geq \frac{1}{4}\ \theta_s\ ^2 - Cte\ \ a \quad et \quad \sum_{1\leqslant j\leqslant \ell} \theta_j\ ^2 \geqslant \frac{1}{2}\ .$$

Ceci entraîne que pour a assez petit,

$$\theta \quad \left(T^{1,0}_\zeta M\right)\ ,\ \mathcal{L}_1.\theta \geqslant \frac{1}{8}\ \theta\ ^2\ . \tag{46}$$

Etant donné que $\mathcal{L}_2 = O\left(\ \overline{\rho}\right)$ on en déduit que si ε_0 est suffisamment petit,

$$\theta \quad \left(T^{1,0}_\zeta M\right)\ ,\ \mathcal{L}_\rho.\theta \geqslant \frac{1}{16}\ \theta\ ^2 \tag{47}$$

Compte tenu de (45), (47) montre que $\mathcal{L}_r$ est définie positive sur X. Puisque M est non signée sur $M \setminus R_0$ et en particulier en ζ, il existe $v \quad T^{1,0}_\zeta M$ tel que

$$v\ = 1\ et\ \mathcal{L}_2.v = 2 \sum_{1\leqslant j\leqslant \ell} \rho_j \mathcal{L}_{\rho_j}.v = 0.$$

On note w la projection orthogonale de v sur $Ker\,\partial r$; on a donc

$$w = v - \mu\gamma\ \ où\ \ \mu = \ \ v,\gamma \quad et\ \ \gamma = \frac{\ \ r}{\ \ r}\ .$$

On considère le sous-espace E_z de $Ker\,\partial r$ défini par

$$E_z = X + \mathbb{C}w\ .$$

Pour achever la preuve du lemme, il suffit maintenant d'établir que $dim_{\mathbb{C}}\left(E_z\right) \geqslant \ell$ ainsi que la minoration souhaitée pour $\mathcal{L}_r\ _{E_z}$.

2) $dim_{\mathbb{C}}\left(E_z\right) = \ell$ si ε_0 et a sont assez petits.

Puisque $dim_{\mathbb{C}}\left(X\right) \geqslant \ell - 1$, il s'agit seulement de vérifier que $w\ /\ X$. Supposons $w \quad X$. Comme $X \subset \left(T^{1,0}_\zeta M\right)$, on a alors $0 = \ \ v,w\ \ = \ v\ ^2 - \ \ v,\gamma\ \ ^2$ c'est à dire $\ v,\gamma\ \ = \ v\ \ \gamma\ $. Ceci impose $v \quad \mathbb{R}\gamma$ et donc $\quad r \quad T^{1,0}_\zeta M$. Lorsque $1 \leqslant m \leqslant \ell$, on a $\partial\rho_m = \frac{1}{2i}dz_{k+m} + O\left(\ z\ \right)$ et

(43) entraîne que

$$0 = e^{-A\, z^{\,2}}\partial\rho_m . \quad r = -\frac{i}{2}\ \underset{1\leqslant j\leqslant \ell}{}\ \rho_j\, dz_{k+m} . \quad y_{k+j} + A\,O\,(\ z \quad \overline{\rho}) = \frac{1}{4}\rho_m + A\,O\,(\ z \quad \overline{\rho})$$

et donc que $\rho_m = AO\big(\ z \quad \overline{\rho}\big)$. Il en découle $\ \overline{\rho} = A\,O\big(\ z \quad \overline{\rho}\big)$, c'est à dire $1 = A\,O\,(\ z\ )$ puisque $z\ /\ M$. Ceci est évidemment impossible si $A\,(a+\varepsilon_0)$ est suffisamment petit.

3) $\mathcal{L}_r$ est définie positive sur E_z si a et ε_0 sont assez petits.

Soit $\theta \quad E_z$;

$$\theta = x + \lambda w = y + \lambda v \ \ avec\ \ y = x - \lambda\mu\,\gamma,\ x \quad X\ \ et\ \ \lambda \quad \mathbb{C}\ .$$

Pour évaluer θ en fonction de x et de λ, on évalue tout d'abord w et μ. Puisque $v \quad T^{1,0}_{\zeta}M$, il résulte de (42) et de (44) que

$$\mu = \ v, \gamma\ = \frac{0 + O\,(A\ \ z\ \rho)}{\overline{\rho}\,\big[1 + A\,O\big(\ z \quad \overline{\rho}\big)\big]} = A\,O\,(\ z \quad \overline{\rho})\ .$$

Comme $w^{\ 2} = \ v^{\ 2} - \ \mu^{\ 2}$, on en déduit que

$$w^{\ 2} = 1 + A^2\,O\big(\ z^{\ 2}\rho\big)\ .$$

Par ailleurs, puisque $x \quad X$ et $v \quad T^{1,0}_{\zeta}M$, on a $\ w, x\ = -\mu\ \ \gamma, x\ $ et donc

$$\theta^{\ 2} = \ x^{\ 2} + \ \lambda^{\ 2}\ w^{\ 2} + \ \lambda\ \ x\ \ A\,O\,(\ z \quad \overline{\rho})$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2}\big(\ x^{\ 2} + \ \lambda^{\ 2}\big) \leqslant \ \theta^{\ 2} \leqslant 2\big(\ x^{\ 2} + \ \lambda^{\ 2}\big)\ . \tag{48}$$

du moment que $A\,(a+\varepsilon_0)$ est assez petit. De même,

$$y^{\ 2} = \ x^{\ 2} + \ \lambda\ \ x\ \ AO(\ z \quad \overline{\rho}) + \ \lambda^{\ 2}\ A^2O\big(\ z^{\ 2}\rho\big)$$

entraîne que pour $A\,(a+\varepsilon_0)$ assez petit on a

$$y^{\ 2} \geqslant \frac{1}{2}\ x^{\ 2} - \rho\ \lambda^{\ 2} \tag{49}$$

Puisque $v \quad T^{1,0}_{\zeta}M \subset Ker\ \mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2.v = 0$, (45) donne

$$\begin{aligned} e^{-A\, z^{\,2}}\mathcal{L}_r.\theta &\geq \mathcal{L}_\rho.y + 2Re\,[\lambda\mathcal{L}_2.\,(v,y)] + \frac{1}{2}A\rho\ \ \theta^{\ 2} \\ &\geqslant \mathcal{L}_\rho.y - Cte\ \ \overline{\rho}\ \lambda\ \ \ y\ + \frac{1}{4}A\rho\ \ \lambda^{\ 2} \\ &\geqslant \mathcal{L}_\rho.y - \frac{1}{64}\ x^{\ 2} + \left(\frac{A}{4} - Cte\right)\rho\ \ \lambda^{\ 2}\ . \end{aligned}$$

On choisit maintenant de prendre a priori $A \geqslant 1$ suffisamment grand pour que le terme entre parenthèse de l'inégalité ci-dessus soit supérieur à $A/8$. Comme (47) et (49) donnent

$$\mathcal{L}_\rho.y \geqslant \frac{1}{32}\ x^{\ 2} - \frac{\rho}{16}\ \lambda^{\ 2},$$

il vient alors

$$e^{-A\,z^{\,2}}\mathcal{L}_r.\theta \geqslant \frac{1}{64}\ x^{\,2} + \left(\frac{A}{8} - \frac{1}{16}\right)\rho\ \ \lambda^{\,2} \geqslant \frac{1}{64}\ x^{\,2} + \frac{A\rho}{16}\ \lambda^{\,2}$$

En choisissant $A\,(a + \varepsilon_0)$ suffisamment petit, on obtient $1/64 \geqslant A\rho/16$ et en prenant $A \geqslant 32$, ceci implique

$$e^{-A\,z^{\,2}}\mathcal{L}_r.\theta \geqslant \frac{A\rho}{16}\left(\,x^{\,2} + \ \lambda^{\,2}\right) \geqslant \frac{A\rho}{32}\ \theta^{\,2} \geqslant \rho\ \ \theta^{\,2}\ .$$

Le lemme est prouvé. ∎

3.2 Résolutions du $\overline{\partial}_M$ en bidegré maximal et minimal (th. 1)

Dans cette section, on prouve le th. 1 qui est une résolution de $\overline{\partial}_M$ en bidegré maximal et on en déduit une résolution de $\overline{\partial}_M$ en bidegré $(0,1)$ avec une condition de support compact.

On se place dans la situation du th. 1 et comme dans la section précédente, on se ramène au cas où M est donnée dans R_0 par (7) par une fonction réelle analytique σ. Hormis le th. 2, le principal ingrédient de la preuve du th. 1 est alors la proposition ci-dessous qui montre que toute forme réelle analytique $\overline{\partial}_M$-fermée au voisinage d'un fermé F de M se prolonge en une forme $\overline{\partial}$-fermée au voisinage de F dans $\mathbb{C}^n$. G. Tomassini [66] a traité le cas des fonctions et le cas des formes est connu pour l'essentiel.

Proposition 9 *Soit Γ un domaine de M relativement compact dans R_0 et de diamètre au plus δ_0 où δ_0 est défini dans le th. 2. Soient $L \quad \mathbb{R}_+^*$ et $p, q \quad \mathbb{N}$. Alors, il existe un réel $C > 0$ ne dépendant que M et de Γ, il existe un voisinage ouvert Γ_L de $\overline{\Gamma}$ dans $\mathbb{C}^n$ et il existe un opérateur continu E_L de $C^{\omega,L}_{p,q}\left(\overline{\Gamma}\right)$ dans $C^{\omega,CL}_{p,q}\left(\overline{\Gamma_L}\right)$ tel que pour tout $f \quad C^{\omega,L}_{p,q}\left(\overline{\Gamma}\right)$, $(E_L f)_{\overline{\Gamma}} = f$, $\overline{\partial}E_L f = E_L\overline{\partial}_M f$ et $E_L f$ est holomorphe par rapport à $z\ $. De plus, il y a unicité de l'extension au sens où si U est un voisinage connexe de $\overline{\Gamma}$ dans Γ_L, $(E_L f)_U$ est la seule $(0,q)$-forme $\overline{\partial}$-fermée réelle analytique sur U et holomorphe par rapport à $z\ $ qui prolonge f à U.*

Remarque. Dans cet énoncé $(z_1, ..., z_n)$ n'est pas le système de coordonnées standard de $\mathbb{C}^n$; il a été choisi de manière que $M \setminus R_0$ soit un graphe.

Preuve du théorème 1. On admet pour l'instant la proposition ci-dessus dont on reprend les notations. Puisque k est la dimension CR de M, $\overline{\partial}_M$ est nul sur $C^{\omega,L}_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)$ et E_L opère continûment de $C^{\omega,L}_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)$ dans $C^{\omega,CL}_{n,k}\left(\overline{\Gamma_L}\right) \setminus Ker\,\overline{\partial}$ et donc a fortiori de $C^{\omega,L}_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)$ dans $C^{\omega}_{n,k}\left(\overline{\Gamma_L}\right) \setminus Ker\,\overline{\partial}$.

Compte tenu de l'hypothèse faite sur Γ, Γ_L contient un voisinage ouvert Γ_L de $\overline{\Gamma}$ dans $\mathbb{C}^n$ qui est de classe $C\quad$ et strictement ℓ-convexe. D'après [21], cette convexité permet de résoudre le problème de Neumann pour le complexe

$$L^2_{n,k-1}\left(\Gamma_L\right) \stackrel{\overline{\partial}}{-}\quad L^2_{n,k}\left(\Gamma_L\right) \stackrel{\overline{\partial}}{-}\quad L^2_{n,k+1}\left(\Gamma_L\right)$$

et de trouver un opérateur continu R_L de $L^2_{n,k}(\Gamma_L)\setminus Ker\,\overline{\partial}$ dans $L^2_{n,k-1}(\Gamma_L)$ tel que $\overline{\partial}\circ R_L = Id$ et $\Theta\circ R_L = 0$ où Θ est l'adjoint formel de l'opérateur $\overline{\partial}$. Le système $\left(\overline{\partial}F = G \;\&\; \Theta F = 0\right)$ étant elliptique, R_L induit un opérateur $\mathcal{R}_L$ de $C^{\omega}_{n,k}\left(\overline{\Gamma_L}\right)$ dans $C^{\omega}_{n,k-1}(\Gamma_L)$; en utilisant par exemple le lemme 2.4 de [48], on constate que R_L est continu. Etant donné que les opérateurs de restriction $A : C^{\omega}_{n,k}\left(\overline{\Gamma_L}\right) \quad C^{\omega}_{n,k}(\Gamma_L)$ et $B : C^{\omega}_{n,k-1}(\Gamma_L) \quad C^{\omega}_{n,k-1}\left(\overline{\Gamma}\right)$ sont aussi continus, $T_L = B\circ R_L\circ A\circ E_L$ opère continûment de $C^{\omega,L}_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)$ dans $C^{\omega}_{n,k-1}\left(\overline{\Gamma}\right)$ et par construction $Id = \overline{\partial}_M\circ T_L$. Le th. 1 est donc prouvé. ■

Preuve de la propopsition 9. On raisonne dans R_0 où M est donnée par (7) de sorte qu'une (p,q)-forme admet sur R_0 une écriture unique du type (8) ; pour un compact κ de R_0 on utilise ces représentations pour calculer les normes $\;\cdot\;_{\kappa,L}$ définies par (6) et les espaces $C^{\omega,L}_{p,q}(\kappa)$ associés.

Puisque σ est réelle analytique au voisinage de $\overline{Q_0}$ et il existe $(\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}) \quad \mathbb{C}^{\mathbb{N}^k\times\mathbb{N}^k\times\mathbb{N}^\ell}$ telle que

$$(z\;,x\;)\quad \overline{Q_0}\;;\;\sigma(z\;,x\;) = \sum_{m_1,m_2\quad\mathbb{N}^k,\,m_3\quad\mathbb{N}^\ell} \sigma_{m_1,m_2,m_3}\,z^{\;m_1}\,\overline{z^{\;m_2}}\,x^{\;m_3}\,.$$

La série entière obtenue en substituant z à x converge au voisinage de $\overline{B_{\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^\ell}(0,a_0)}$; on note encore σ la somme de cette série. Etant donné que σ est à valeurs réelles sur Q_0, on peut choisir $c_0>0$ suffisamment petit afin que si $W_0 = B_{\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^\ell}(0,a_0)\setminus \quad w \quad \mathbb{C}^n\;;\;Im\,w \quad < c_0$, l'application

$$\begin{array}{llll} \alpha: & W_0 & & Z=\alpha(W_0) \\ & w & & (w\;,w\;+i\sigma(w\;,w\;)) \end{array}$$

soit un difféomorphisme ; on note β son application réciproque. Remarquons que α réalise aussi un difféomorphisme α_0 de Q_0 sur $M\setminus R_0$ dont l'application réciproque β_0 est la projection de $M\setminus R_0$ sur Q_0, $z \quad (z\;,x\;)$. Dans l'espace $\mathbb{C}^n$ muni des coordonnées complexes $w_1,....,w_n$ et des coordonnées réelles $u=Rew$, $v=Im\,w$, $\beta_0(M\setminus R_0)$ (c'est à dire Q_0) est défini par l'équation $v\; = 0$. Autrement dit, nous avons changé la structure complexe de l'espace $(\mathbb{C}^n,z)$ de telle manière que M devienne un sous-espace affine de la nouvelle structure complexe $(\mathbb{C}^n,w)$.

Introduisons les opérateurs différentiels partiels suivants :

$$\begin{array}{l} \partial_{z'} = \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k} dz_j\,\frac{\partial}{\partial z_j} \;\; et \;\; \partial_{\overline{z}'} = \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k} d\overline{z_j}\,\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} \\ \partial_{z''} = \sum\limits_{k+1\leqslant j\leqslant n} dz_j\,\frac{\partial}{\partial z_j} \;\; et \;\; \partial_{\overline{z}''} = \sum\limits_{k+1\leqslant j\leqslant n} d\overline{z_j}\,\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} \end{array}.$$

Il résulte immédiatement de l'holomorphie de σ par rapport à z et de l'identité $z \;\equiv \beta\;(z) + i\sigma(z\;,\beta\;(z))$, $z \quad Z$, que si $\tau = [Id + i\partial_{z''}\sigma]^{-1}$ on a

$$\begin{array}{l} \partial_{z''}\beta \;= \tau_{\,\beta}\;,\;\; \partial_{\overline{z}''}\beta \;= 0 \\ \partial_{z'}\beta \;= -i\;(\tau\circ\partial_{z'}\sigma)_{\,\beta}\;,\;\; \partial_{\overline{z}'}\beta \;= -i\;(\tau\circ\partial_{z'}\sigma)_{\,\beta} \end{array}. \tag{50}$$

Remarquons en outre l'évidente relation $\beta\;(z)\equiv z\;,\; z \quad Z$.

En complexifiant par rapport à $u \; = Re\,w$ les fonctions réelles analytiques de $M_0 =$

$\beta_0 (M \setminus R_0)$ on obtient le lemme élémentaire suivant :

Lemme 10 *Soient* $L \quad \mathbb{R}_+^*$ *et* $\Gamma_0 = \beta_0(\Gamma)$. *Alors, il existe un voisinage* $\Gamma_0^L = \quad dist\,(.,\Gamma_0) < \varepsilon_L$ *(* $\varepsilon_L > 0$ *) de* $\overline{\Gamma_0}$ *dans* W_0 *et un opérateur continu* $E_0^L : C_L^\omega(\Gamma_0) \qquad C_{2L}^\omega\left(\overline{\Gamma_0^L}\right)$ *tels que pour tout* $g \quad C^\omega\left(\overline{\Gamma_0}\right)$, $G = E_0^L g$ *est un prolongement de* g *holomorphe par rapport à* w *et tel que* $(\partial G_j/\partial w_j)_{\Gamma_0} = \partial g/\partial w_j$ *si* $1 \leqslant j \leqslant k$, $(\partial G/\partial w_j)_{\Gamma_0} = \partial g/\partial u_j$ *(*$u = Re\, w$*) si* $k+1 \leqslant j \leqslant n$.

0) *Preuve de l'unicité dans la prop. 9.*

Supposons que U soit un voisinage connexe de $\overline{\Gamma}$ contenu dans $\Gamma_L = \alpha\left(\Gamma_0^L\right)$. Pour établir l'unicité annoncée il suffit de raisonner sur les coefficients des formes considérées et donc de prouver que si $F \qquad C^\omega(U)$ est holomorphe par rapport à z et vérifie $F_\Gamma = 0$, alors $F = 0$. Dans cette situation, $G = F \circ \alpha$ est holomorphe par rapport à w (puisque $G(w) \equiv F(w\ ,\ w\ + i\sigma(w\ , w\ ))$ et σ est holomorphe par rapport à z), de classe C^ω et s'annule sur Γ_0.

Puisque Γ_0^L est la réunion des boules ouvertes de rayon ε_L centrées en les points de Γ_0, il résulte du principe d'unicité pour les fonctions réelles analytiques que $G = 0$ si $G = 0$ sur ces boules. Mais G étant holomorphe par rapport à w , la nullité de $G_K(w\ ,.)$ pour $w \quad B(w_0,\varepsilon)$ ($w_0 \quad \Gamma_0$ et $B(w_0,\varepsilon) \subset \Gamma_0^L$) résulte de la nullité de $G(w\ ,.)$ au voisinage de u dans $\mathbb{R}^\ell$. En fin de compte, il apparaît que $G = 0$ si $G_{\Gamma_0} = 0$.

1) *Cas des* $(0,q)$*-formes.*

Puisque α est réelle analytique, il existe une constante C_1 (ne dépendant que de L et de la classe d'analyticité $C_{L'}^\omega\left(\overline{\Gamma}\right)$ de α sur $\overline{\Gamma}$) telle que $f \qquad f \circ \alpha_0$ opère continûment de $C_L^\omega\left(\overline{\Gamma}\right)$ dans $C_{C_1 L}^\omega\left(\overline{\Gamma_0}\right)$. Ainsi, $f \qquad \alpha_0^* f$ opère continûment de $C_{0,q}^{\omega,L}\left(\overline{\Gamma}\right)$ dans $C_{0,q}^{\omega,C_1 L}\left(\overline{\Gamma_0}\right)$ et comme $\alpha^* d\overline{z_j} = dw_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$, on a

$$\alpha_0^* f = \sideset{}{'}{}_{J=q} (f_J \circ \alpha_0)\, d\overline{w}^J,\ f = \sideset{}{'}{}_{J=q} f_J\, d\overline{z}^J \quad C_{0,q}^{\omega,L}\left(\overline{\Gamma}\right) .$$

Utilisant l'opérateur d'extension $E_{C_1 L}^0$ du lemme précédent, on pose pour $g = \sideset{}{'}{}_{J=q} g_J\, d\overline{w}^J$ de classe $C_{0,q}^{\omega,C_1 L}$

$$E_{C_1 L}^0\, g = \sideset{}{'}{}_{J=q} \left(E_{C_1 L}^0\, g_J\right)\, d\overline{w}^J .$$

et on considère alors l'opérateur E_L défini par

$$f \quad C_{0,q}^{\omega,L}\left(\overline{\Gamma}\right),\ E_L f = \alpha_*\, E_{C_1 L}^0\, \alpha_0^* f .$$

Etant donné que $E_{C_1 L}^0$ opère continûment de $C_{0,q}^{\omega,C_1 L}\left(\overline{\Gamma_0}\right)$ dans $C_{0,q}^{\omega,2C_1 L}\left(\overline{\Gamma_0^L}\right)$ et qu'il existe une constante $C_2 > 0$ telle que telle que α_* opère continûment de $C_{0,q}^{\omega,2C_1 L}\left(\overline{\Gamma_0^L}\right)$ dans $C_{0,q}^{\omega,2C_2 C_1 L}\left(\overline{\Gamma_L}\right)$, E_L est continu de $C_{0,q}^{\omega,L}\left(\overline{\Gamma}\right)$ dans $C_{0,q}^{\omega,CL}\left(\overline{\Gamma_L}\right)$ où $C = 2C_2 C_1$.

Soit $f \quad C_{0,q}^{\omega,L}\left(\overline{\Gamma}\right)$; $f = \sideset{}{'}{}_{J=q} f_J\, d\overline{z}^J$. Posons $f_0 = \alpha_0^* f$ et $F_0 = E_{C_1 L}^0 f_0 = \sideset{}{'}{}_{J=q} F_0^J\, d\overline{w}^J$ où

$\left(F_0^J\right)_{J=q} = \left(E_{C_1L}\ (f_J \circ \alpha_0)\right)_{J=q}$. Comme $\alpha_* d\overline{w} = \beta^* d\overline{w} = d\overline{z}$, on a

$$F \overset{\text{déf}}{=} E_L f = \sideset{}{'}{\,}_{J=q} F_0^J \circ \beta \; d\overline{z}^J$$

et donc $F_{\overline{\Gamma}} = f$ puisque pour tout multi-indice J de longueur q,

$$F_\Gamma = \left(F_0^J\right)_{\Gamma_0} \circ (\beta_0)_{\Gamma}^{\Gamma_0} = (f_J \circ \alpha_0) \circ \beta_0 = (f_J)_\Gamma \ .$$

L'holomorphie de F_0^J par rapport à w , celle de β par rapport à z et l'identité $\beta\ (z) \equiv z$ donnent que

$$\partial_{\overline{z}''} F_J = \begin{matrix} \left(\partial_{w'} F_0^J\right)_\beta \circ \partial_{\overline{z}''}\beta + \left(\partial_{\overline{w}'} F_0^J\right)_\beta \circ \partial_{\overline{z}''}\overline{\beta} + \\ \left(\partial_{w''} F_0^J\right)_\beta \circ \partial_{\overline{z}''}\beta + \left(\partial_{\overline{w}''} F_0^J\right)_\beta \circ \partial_{\overline{z}''}\overline{\beta} \end{matrix} = 0, \quad J = q,$$

ce qui montre que F est holomorphe par rapport à z . On en déduit aussi que

$$\overline{\partial} F = \sideset{}{'}{\,}_{J=q} \overline{\partial} F_J \quad d\overline{z}^J = \sideset{}{'}{\,}_{J=q} \partial_{\overline{z}'} F_J \quad d\overline{z}^J .$$

Mais par ailleurs, il résulte de (50) que

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{z}'} F_J &= \left(\partial_{w'} F_0^J\right)_\beta \circ \partial_{\overline{z}'}\beta + \left(\partial_{\overline{w}'} F_0^J\right)_\beta \circ \partial_{\overline{z}'}\overline{\beta} + \left(\partial_{w''} F_0^J\right)_\beta \circ \partial_{\overline{z}'}\beta + \left(\partial_{\overline{w}''} F_0^J\right)_\beta \circ \partial_{\overline{z}'}\overline{\beta} \\ &= \left(\partial_{w'} F_0^J\right)_\beta - i \left[\left(\partial_{w''} F_0^J\right) \circ \tau \circ \partial_{\overline{z}'}\sigma\right]_\beta \end{aligned}$$

et si on pose $(\tau_{r,s})_{k+1 \leqslant r,s \leqslant n} = (I + i\partial\sigma_r / \partial z_s)^{-1}_{k+1 \leqslant r,s \leqslant n}$, on obtient que

$$\frac{\partial F_J}{\partial \overline{z}_j} = \left(\frac{\partial F_0^J}{\partial \overline{w}_j} - i \sum_{k+1 \leqslant r,s \leqslant n} \frac{\partial F_0^J}{\partial w_r} \tau_{r,s} \frac{\partial \sigma_s}{\partial \overline{z}_j} \right)_\beta , \quad J = q, \ 1 \leqslant j \leqslant k \ .$$

D'où

$$\overline{\partial} F = \sum_{K \ J'_{q+1}} G_K \circ \beta \, d\overline{z}^K$$

où J_m $(m \quad \mathbb{N})$ désigne l'ensemble des multi-indices strictement croissants de $1, ..., k$ de longueur m et où, ε_{jJ}^K désignant le signe de la permutation $\left(\frac{K}{jJ}\right)$ lorsque $K = \ j \quad J$ et 0 sinon, on a posé

$$G_K = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k, \ J \ \ J'_q} \varepsilon_{jJ}^K X_j F_0^J ,$$

$$X_j = \frac{\partial}{\partial \overline{w}_j} - i \sum_{k+1 \leqslant r,s \leqslant n} \tau_{r,s} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \overline{z}_j} \frac{\partial}{\partial w_s} , \ 1 \leqslant j \leqslant k \ .$$

Fixons un multi-indice J. D'après le lemme 10,

$$\partial_{\overline{w}'} F_0^J = \partial_{\overline{w}'} f_0^J \quad et \quad \partial_{w''} F_0^J = \partial_{u''} f_0^J \quad sur \quad \Gamma_0 \ .$$

Mais $f_0^J = f_J \circ \alpha_0$ et $\alpha_0\,(w\ , u_n) \equiv (w\ , u \ \ + i\sigma\,(w\ , u\ \ ))$. Donc

$$\partial_{\overline{w}'} f_0^J = (\partial_{z'} f_J)_{\alpha_0} \circ \partial_{\overline{w}'} \alpha_0 + (\partial_{\overline{z}'} f_J)_{\alpha_0} \circ \partial_{\overline{w}'} \overline{\alpha_0} + (\partial_{x''} f_J)_{\alpha_0} \circ \partial_{\overline{w}'} Re\, \alpha_0 = (\partial_{\overline{z}'} f_J)_{\alpha_0}$$

et

$$f_0^J = (\partial_{z'} f_J)_{\alpha_0} \circ \partial_{u''}\alpha_0 + (\partial_{\overline{z}'} f_J)_{\alpha_0} \circ \partial_{u''}\overline{\alpha_0} + (\partial_{x''} f_J)_{\alpha_0} \circ \partial_{u''} Re\, \alpha_0 = (\partial_{x''} f_J)_{\alpha_0} \ .$$

Puisque $\alpha_0 \circ \beta_{\Gamma}^{\Gamma_0} = \alpha_0 \circ \beta_0 = Id_\Gamma$, on déduit de ceci que sur Γ

$$\left(X_j F_0^J\right)_\beta = \frac{\partial f_J}{\partial \overline{z_j}} - i \quad \tau_{r,s} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \overline{z_j}} \frac{\partial f_J}{\partial x_s}, \ 1 \leqslant j \leqslant k. \quad {}_{k+1 \leqslant r,s \leqslant n}$$

Etant donné que $2\partial\sigma/\partial z \ = \partial\sigma/\partial x$ (car σ est holomorphe par rapport à z), on reconnaît dans le second membre l'expression de $\overline{L_j} f_J$ où L_j est donné par (9). Comme $\overline{\partial}_M f$ s'exprime sur Γ sous la forme

$$\overline{\partial}_M f = \quad g_K \ d\overline{z}^K \quad {}_{K \ \ J'_{q+1}}$$

avec $g_K = \quad \varepsilon^K_{jJ} \overline{L_j} f_J$ ${}_{1 \leqslant j \leqslant k, \ J \ \ \mathcal{J}'_q}$, on obtient que $G_K \circ \beta = g_K$ sur Γ et donc que $\overline{\partial} F = E_L \overline{\partial}_M f$.

2) *Cas des* (p,q)*-formes.*

Soient $L > 0$ et $f \quad C^{\omega,L}_{p,q}\left(\overline{\Gamma}\right)$. f s'écrit de façon unique sous la forme

$$f = \quad {}' \left(dz^I\right)_\Gamma \quad f_I \quad {}_{I\ =p}$$

où les f_I sont des $(0,q)$-formes de classe $C^\omega_L\left(\overline{\Gamma}\right)$. Posons

$$E_L f = F = \quad {}' dz^I \quad E_L f_I \ . \quad {}_{I\ =p}$$

F est holomorphe par rapport à z , de classe $C^{\omega,CL}_{p,q}\left(\overline{\Gamma_L}\right)$, $\overline{\partial} F = \quad dz^I \quad \overline{\partial} E_L f_I = E_L \overline{\partial}_M f$ et $F_\Gamma = \quad \left(dz^I\right)_\Gamma \quad f_I = f_{\overline{\Gamma}}$. Naturellement, $E_L : C^{\omega,L}_{p,q}\left(\overline{\Gamma}\right) \quad C^{\omega,CL}_{p,q}$ est continu.

La preuve de la prop. 9 et donc celle du th. 1 est achevée. ■

Nous pouvons maintenant prouver un résultat de résolution de $\overline{\partial}_M$ avec condition de support pour les $(0,1)$-formes ; c'est ce théorème qui permettra de résoudre le problème (4).

Théorème 11 *Soit M une sous-variété CR générique réelle analytique de $\mathbb{C}^n$. On suppose que M est nulle part strictement pseudoconvexe et que $k = \dim_{CR} M \geqslant 2$. Soient $p \quad M$ et Γ un voisinage de p qui est la trace sur M d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ dont la fermeture admet une base de voisinages pseudoconvexes. Dans ces conditions, il existe $\delta_p > 0$ ne dépendant que de p et de M tel que si Γ est de diamètre au plus δ_p, si $\Lambda \quad C^\omega_{n,k-1}\left(\overline{\Gamma}\right)$ est une fonctionnelle $\overline{\partial}_M$-fermée portable par un compact de Γ, il existe une fonctionnelle $\mu \quad C^\omega_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)$ portable par un compact de Γ telle que $\overline{\partial}_M \mu = \Lambda$.*

Preuve. Les théorèmes 1 et 2 s'appliquant, on considère un réel δ_p qui valide leur conclusion. Soit alors Γ comme dans l'énoncé et $\Lambda \quad C^\omega_{n,k-1}\left(\overline{\Gamma}\right)$ une fonctionnelle $\overline{\partial}_M$-fermée. Prouvons tout d'abord que $\ \Lambda, \psi \ = 0$ dès que $\psi \quad C^\omega_{n,k-1}\left(\overline{\Gamma}\right)$ vérifie $\overline{\partial}_M \psi = 0$. Soit donc

$\psi \quad C^{\omega}_{n,k-1}\left(\overline{\Gamma}\right)\setminus Ker\,\overline{\partial}_M$. Grâce à la proposition 9, on sait que ψ se prolonge en une $(n,k-1)$-forme Ψ réelle analytique et $\overline{\partial}$-fermée au voisinage de $\overline{\Gamma}$ dans $\mathbb{C}^n$. Grâce au théorème 2, on obtient un voisinage strictement ℓ-convexe V de $\overline{\Gamma}$ dans $\mathbb{C}^n$ tel que $\Psi \quad C^{\omega}_{n,k-1}\left(\overline{V}\right)\setminus Ker\,\overline{\partial}$ et pour lequel il existe un ouvert strictement pseudoconvexe W de $\mathbb{C}^n$ qui est une extension ℓ-convexe de V. Cette dernière condition permet de constater[4], à l'aide d'une adaptation immédiate de la preuve du th. 8.1 de [31], l'existence d'une suite (Ψ_j) de $C^{\omega}_{n,k-1}(W)\setminus Ker\,\overline{\partial}$ qui converge vers Ψ dans $C^{\omega}_{n,k-1}(V)$. W étant pseudoconvexe et $k-1$ supérieur ou égal à 1, on peut trouver pour tout $j \quad \mathbb{N}$ une forme $U_j \quad C^{\omega}_{n,k-2}(W)$ vérifiant $\overline{\partial}U_j = \Psi_j$; posant alors $u_j = U_j \;\; {}_M$, il vient

$$\Lambda, \Psi_j \;\; = \left\langle \Lambda, \overline{\partial}_M u_j \right\rangle = -\left\langle \overline{\partial}_M \Lambda, u_j \right\rangle = 0$$

En passant à la limite quand $j \qquad$, on obtient $\;\Lambda, \Psi \;\; = 0$.

Pour $\varphi \quad C^{\omega}_{n,k}\left(\overline{\Omega}\right)$ il est donc licite de poser

$$\mu, \varphi \;\; = - \;\; \Lambda, \psi$$

où ψ est n'importe quelle $(n,k-1)$-forme de classe $C^{\omega}\left(\overline{\Gamma}\right)$ vérifiant $\overline{\partial}_M\psi = \varphi$. L'application μ est une fonctionnelle si pour chaque $L>0$ fixé sa restriction μ_L à $C^{\omega,L}_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)$ est une forme linéaire continue. On dispose grâce au th. 1 d'un opérateur continu $T_L : C^{\omega,L}_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right) \qquad C^{\omega}_{n,k-1}\left(\overline{\Gamma}\right)$ tel que $\varphi = \overline{\partial}_M T_L \varphi$ pour tout $\varphi \quad C^{\omega,L}_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)$. Etant donné que la définition même de μ entraîne que pour tout $\varphi \quad C^{\omega,L}_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)$, $\;\mu, \varphi \;\; = - \;\; \Lambda, T_L\varphi\;$, il devient immédiat que $\mu_L \quad C^{\omega,L}_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)$. Il résulte aussi de la définition de μ que si $\psi \quad C^{\omega}_{n,k-1}\left(\overline{\Gamma}\right)$,

$$\left\langle \overline{\partial}_M \mu, \varphi \right\rangle = -\left\langle \mu, \overline{\partial}_M \psi \right\rangle = \;\; \Lambda, \psi$$

et donc $\overline{\partial}_M \mu = \Lambda$.

Supposons maintenant que Λ est portable par un compact de Γ. Puisque Γ est la trace sur M d'un ouvert S de $\mathbb{C}^n$ ayant une base de voisinages strictement pseudoconvexes, il est possible de sélectionner un ouvert strictement pseudoconvexe $S\;$ tel que $\kappa \subset S \;\; \subset\subset S$. La fonctionnelle Λ est alors aussi portable par $\gamma = M \setminus \overline{S}\;$ ce qui signifie que Λ est la restriction à $C^{\omega}_{n,k-1}\left(\overline{\Gamma}\right)$ d'une fonctionnelle $\Lambda \quad C^{\omega}_{n,k-1}(\gamma)$. De la même façon que pour $\overline{\Gamma}$, à γ est associé une fonctionnelle $\mu_\gamma \quad C^{\omega}_{n,k}(\gamma)$ définie pour $\varphi \quad C^{\omega}_{n,k}(\gamma)$ par

$$\mu_\gamma, \varphi \;\; = \;\; \Lambda, \psi$$

où ψ est n'importe quelle $(n,k-1)$-forme de classe $C^{\omega}(\gamma)$ vérifiant $\overline{\partial}_M\psi = \varphi$. Pour chaque $L>0$, on dispose d'un opérateur continu $T_{\gamma,L} : C^{\omega,L}_{n,k}(\gamma) \qquad C^{\omega}_{n,k-1}(\gamma)$ tel que $\overline{\partial}_M \circ T_{\gamma,L} = Id$. Si $\varphi \quad C^{\omega,L}_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)$ et $\psi = T_{\gamma,L}\varphi$, $\psi_{\;\gamma}$ est une $(n,k-1)$-forme de classe $C^{\omega}(\gamma)$ vérifiant $\overline{\partial}_M \psi_{\;\gamma} = \varphi_{\;\gamma}$

[4] Ce fait qui par ailleurs est sans doute bien connu même s'il ne semble pas déjà avoir été formulé explicitement, est crucial pour la validité de ce théorème et en fin de compte pour celle du principe de Hartogs car il permet l'approximation de Ψ par des formes $\overline{\partial}$-exactes.

et donc

$$\mu, \varphi \; = \; \Lambda, \psi \; = \; \Lambda, \psi \; = \; \mu_\gamma, \varphi \; .$$

Ainsi μ est la restriction à $C^\omega_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)$ de μ_γ et le théorème est prouvé. ■

4 Principe de Hartogs

4.1 Principe de Hartogs avec singularité

Rappelons que pour un ouvert Γ relativement compact dans R_0, l'espace $\mathcal{B}_{0,1}(\Gamma)$ défini par (20) s'identifie à l'espace des $(0,1)$-formes dont les coefficients dans l'écriture (8) sont des hyperfonctions à support dans $\overline{\Gamma}$. Le théorème 11 se traduit directement dans le langage des hyperfonctions de la façon suivante :

Proposition 12 *Les hypothèses et les notations sont celles du théorème 11. Si $v \quad \mathcal{B}_{0,1}(\Gamma)$ est $\overline{\partial}_M$-fermée et si v est à support compact dans Γ, alors il existe une hyperfonction u à support compact dans Γ telle que $\overline{\partial}_M u = v$.*

On en déduit un résultat de décomposition en hyperfonctions CR :

Corollaire 13 (Formule de saut) *Les hypothèses et les notations sont celles du théorème 11. On se donne des domaines Ω, Ω_1 et Ω_2 relativement compacts dans Γ tels que $\Omega_1 \subset\subset \Omega \subset\subset \Omega_2$. Alors si f est holomorphe au voisinage de $\overline{\Omega}_2 \;\; \Omega_1$, il existe une hyperfonction F^+ CR au voisinage de $\overline{\Omega_2}$ et une hyperfonction F^- CR au voisinage de $\overline{\Gamma} \;\; \Omega_1$ et à support compact dans Γ telles que $f = F^+ - F^-$ au voisinage de $\overline{\Omega}_2 \;\; \Omega_1$ dans M.*

Preuve. Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\Omega}_2 \;\; \Omega_1$. On se donne dans $\mathbb{C}^n$ des ouverts de G_1 et G_2 vérifiant $G_1 \subset\subset G_2$, $M \setminus G_1 \subset\subset \Omega_1$, $\Omega_2 \subset\subset M \setminus G_2 \subset\subset \Gamma$ et tels que f est encore holomorphe au voisinage de $\overline{G_2} \;\; G_1$. Soit $\chi \quad C \quad (\mathbb{C}^n, [0,1])$ une fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{C}^n \;\; G_2$ et qui est nulle sur $\overline{G_1}$. Posons $g = f\,\overline{\partial}_M\chi$, le produit étant considéré comme nul en dehors de $G_2 \;\; \overline{G_1}$. On dispose alors d'une forme linéaire continue Λ définie sur $C^\omega_{n,k-1}\left(\overline{\Gamma}\right)$ par la formule

$$\Lambda, \psi \; = \; \underset{\Gamma}{} \, g \quad \psi \; , \; \psi \quad C^\omega_{n,k-1}\left(\overline{\Gamma}\right) .$$

L'opérateur $\overline{\partial}_M$ agit sur Λ par le biais de la dualité

$$\left\langle \overline{\partial}_M \Lambda, \Xi \right\rangle = \left\langle \Lambda, \overline{\partial}_M \Xi \right\rangle \; , \; \Xi \quad C^\omega_{n,k-2}\left(\overline{\Gamma}\right) .$$

Mais g étant $\overline{\partial}_M$-fermée, pour toute forme $\Xi \quad C^\omega_{n,k-2}\left(\overline{\Gamma}\right)$ on a

$$\left\langle \overline{\partial}_M \Lambda, \Xi \right\rangle = \underset{\Gamma}{} \, \overline{\partial}_M (g \quad \Xi) = \underset{\Gamma}{} \, d (g \quad \Xi) \; ,$$

ce qui prouve grâce à la formule de Stockes que $\overline{\partial}_M \Lambda = 0$ puisque $Supp\, g \subset\subset \Gamma$. Il est clair par ailleurs que cette même condition de support entraîne que Λ est une fonctionnelle portable par un compact de Γ. Autrement dit, la $(0,1)$-forme $\quad\Lambda\quad$ de $\mathcal{B}_{0,1}(\Gamma)$ que représente Λ est $\overline{\partial}_M$-fermée et de support compact dans Γ. En vertu de la prop. 12, il existe une hyperfonction u à support compact dans Γ telle que $\overline{\partial}_M u = \quad \Lambda\quad$. Puisque $f\chi$ se prolonge continûment à $M \setminus G_1$ par la valeur 0, $F^+ = f\chi - u$ est une hyperfonction bien définie au voisinage de $M \setminus \overline{G_2}$ et par construction, elle est $\overline{\partial}_M$-fermée. De même $F^- = -[(1-\chi)\, f + u]$ est une hyperfonction bien définie et CR sur $\Gamma \;\; \overline{G_1}$. Il est évident que $Supp\, F^- \subset\subset \Gamma$ et que la relation $f = F^+ - F^-$ est vraie au voisinage de $G_2 \;\; \overline{G_1}$. ■

Sans une meilleure estimation du support de F^-, les choses en resteraient là. Pour prouver le th. A, nous verrons que l'information relativement faible fournie pas le lemme ci-dessous est suffisante.

Lemme 14 *On considère dans M un ouvert $\mathcal{V}$ feuilleté par les éléments $\mathcal{H}_t$, $0 < t < 1$, d'une famille C^1 d'hypersurfaces réelles analytiques non-caractéristiques de M. On se donne un domaine D de M relativement compact dans $\mathcal{V}$ et $t_0 \quad]0,1[$ tel que $D \setminus \mathcal{H}_{t_0} = \quad$. Alors une hyperfonction qui est CR au voisinage de $\overline{D}$ et nulle au voisinage $\underset{t_0 \leqslant t < 1}{} b(D \setminus \mathcal{H}_t)$ et de $\underset{0 < t \leqslant t_0}{} \overline{D} \setminus \mathcal{H}_t$ est en fait nulle au voisinage de $\overline{D}$.*

Preuve. Soit u une hyperfonction CR au voisinage de $\overline{D}$, nulle au voisinage de $\mathcal{B} = \underset{t_0 \leqslant t < 1}{} b(D \setminus \mathcal{H}_t)$ et de $D_{t_0} = \underset{0 < t \leqslant t_0}{} \overline{D} \setminus \mathcal{H}_t$. Supposons que pour un réel t de $[0,1[$ u soit nulle sur $D_t = \underset{0 < \theta \leqslant t}{} \overline{D} \setminus \mathcal{H}_t$. Soit alors p l'un des points de $\mathcal{H}_t$. Puisque la famille $(\mathcal{H}_\theta)$ est de classe C^1, l'hypothèse de nullité sur u se traduit par le fait qu'il existe un voisinage U de p dans D_1 tel que u est nulle dans l'une des composantes connexes de $U \;\; \mathcal{H}_t$. Dans un voisinage V de p, il est possible de trouver des coordonnées de $\mathbb{C}^n$ centrées en p telles que M soit représentée par un système de la forme (16). Quitte à diminuer U, on suppose $U \subset V$. Avec les notations de la section 2.1, la situation présente transportée dans une carte adéquate $(V \setminus M, \mathcal{X})$ de M donne une hyperfonction $u_{\mathcal{X}}$ qui annule $P = (P_1, ..., P_k)$ et qui est nulle sur l'une des deux composantes connexes de $\mathcal{X}(U \;\; \mathcal{H}_t)$. Etant donné que $\mathcal{H}_t$ est non-caractéristique, $\mathcal{X}(\mathcal{H}_t)$ est non-caractéristique pour P et donc non-caractéristique pour un opérateur Q qui est combinaison linéaire des P_j, $1 \leqslant j \leqslant k$. Le théorème d'unicité de type Holmgren pour les hyperfonctions de Kashiwara assure alors que u_χ est nulle au voisinage de $\mathcal{X}(p)$ (voir par exemple [34, p. 355] ou [39, p. 190]) et donc que u est nulle au voisinage de p. Puisque u est déjà nulle près de $b\mathcal{H}_t$ dans D_1, on en déduit par compacité que u est nulle dans un voisinage de $\mathcal{H}_t$. Le lemme est prouvé. ■

L'existence pour un domaine donné d'un feuilletage non-caractéristique est en soi un problème mais les possibles obstructions disparaissent dans les situations semi-globales. Considérant que M est représentée par dans R_0 par le graphe (7), on se donne dans $]0, a_0/2[$ un réel a_0

ainsi que la famille des fonctions h_λ définies pour $\lambda \quad]-a_0, a_0[$ au voisinage de $\overline{R_0}$ par

$$h_\lambda (z) = \frac{\operatorname{Re} z^{\ 2}}{(a_0)^2} + \frac{\operatorname{Im} z_k^{\ 2}}{\lambda^2} - 1 \ \ ;$$

l'ensemble $\quad h_\lambda = 0 \quad$ est aussi la réunion des lignes de niveau $\pm\lambda$ de la fonction h définie sur $R_0 = B_{\mathbb{C}^k \times \mathbb{R}^\ell} (0, a_0) \times B_{\mathbb{R}^\ell} (0, b_0)$ par la formule

$$h (z) = \frac{\operatorname{Im} z_k}{\overline{\overline{1 - (a_0)^{-2} \ \operatorname{Re} z^{\ 2}}}}, \ z \quad R_0 \ . \tag{51}$$

On pose

$$\begin{aligned} &\mathcal{U} = M \setminus \left\{ z \quad R_{a_0'} \ ; \ \operatorname{Re} z \ < a_0/2 \right\} \\ &\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{U} \setminus \quad h < \lambda \ \ , \ \mathcal{H}_\lambda = \mathcal{U} \setminus \quad h = \lambda \ \ , \ \ \lambda \ < a_0 \end{aligned} \tag{52}$$

L'intérêt de la famille $(\mathcal{H}_\lambda)$ réside dans le lemme suivant :

Lemme 15 *Si a_0 est suffisamment petit et si $\lambda_0 \quad]0, a_0[$, alors $(\mathcal{H}_\lambda)_{\ \lambda \ < \lambda_0}$ est un feuilletage de $\mathcal{E}_{\lambda_0}$ par des hypersurfaces de M non-caractéristiques.*

Preuve. Compte tenu du lemme 3, il s'agit seulement de déterminer un lieu où $\quad h = \lambda$ est sûrement CR générique dans $\mathbb{C}^n$. Soient donc $\lambda \quad]-a_0, a_0[$ et $z \quad \mathcal{H}_\lambda$. On pose $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $z = (z_2, ..., z_n)$ et $z = (z_2, ..., z_k)$. Alors

$$\partial h_\lambda (z) = \frac{1}{(a_0)^2} \ _{1 \leqslant p \leqslant n} \ x_p dz_p - \frac{i}{\lambda^2} y_k dz_k = \left(\frac{x_k}{(a_0)^2} - i \frac{y_k}{\lambda^2} \right) dz_k + \frac{x}{(a_0)^2} .dz$$

où lorsque $\tau \quad \mathbb{C}^m$ et ω est un m-uple de formes différentielles, $\tau.\omega = \tau_k \omega_k + \cdots + \tau_m \omega_m$. Par ailleurs, lorsque $1 \leqslant q \leqslant \ell$ et ρ_q est définie par (41), on a

$$\partial \rho_q (z) = \frac{-i}{2} dz_q - \frac{\partial \sigma_{k+q}}{\partial z} (z) .dz \ - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{k+q}}{\partial x} (z) \, dz$$

où $(\partial \sigma_{k+q} / \partial z \ ) = (\partial \sigma_{k+q} / \partial z_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$ et $(\partial \sigma_{k+q} / \partial x \ \ ) = (\partial \sigma_{k+q} / \partial x_p)_{k+1 \leqslant p \leqslant n}$. Par conséquent pour $\tau \quad \mathbb{C}^\ell$, on a

$$_{1 \leqslant q \leqslant \ell} \ \tau_q \, \partial \rho_q (z) = - \left[\tau . \frac{\partial \sigma}{\partial z} (z) \right] .dz \ - \frac{i}{2} \ _{1 \leqslant q \leqslant \ell} \left[\tau . \left(I_\ell - i \frac{\partial \sigma}{\partial x} (z) \right) \right] .dz$$

où dans les crochets de cette formule les produits sont des produits matriciels et où I_ℓ est la matrice unité d'ordre ℓ. Une relation de la forme $\partial h_\lambda (z) = \ _{1 \leqslant q \leqslant \ell} \ \tau_q \, \partial \rho_q (z)$ avec $\tau \quad \mathbb{C}^\ell$ se traduit donc par le système

$$\frac{x_k}{a_0^2} - i \frac{y_k}{\lambda^2} = -\tau . \frac{\partial \sigma}{\partial z} (z) \, , \ \frac{x}{a_0^2} = -\tau . \frac{\partial \sigma}{\partial z} (z) \ \ , \ \frac{x}{(a_0)^2} = \frac{1}{2i} \tau . \left(I_\ell - i \frac{\partial \sigma}{\partial x} (z) \right) . \tag{53}$$

Puisque $d\sigma (0) = 0$, on suppose quitte à diminuer a_0 que la matrice $A = I_\ell - i \frac{\partial \sigma}{\partial x''} (z)$ qui intervenait déjà dans (9) est inversible. Le m-uple $\tau = (2i / {a_0}^2) \, x \ \ .A^{-1}$ est alors l'unique solution possible pour (53) et ce m-uple est effectivement solution si et seulement si

$$\frac{x_k}{(a_0)^2} - i\frac{y_k}{\lambda^2} = -\frac{2i}{(a_0)^2} x \ .A^{-1}.\frac{\partial \sigma}{\partial z}(z) \quad et \quad \frac{x}{(a_0)^2} = -\frac{2i}{(a_0)^2} x \ .A^{-1}.\frac{\partial \sigma}{\partial z}(z).$$

Si on pose $R = \mathrm{Re}\left(A^{-1}.\frac{\partial \sigma}{\partial z'}\right)$ et $S = \mathrm{Re}\left(A^{-1}.\frac{\partial \sigma}{\partial z'}\right)$. On déduit que si $\ h = \lambda\ $ est caractéristique en z alors

$$x \ = 2x \ .S \ \ et \ \ y_k = -2\left(\lambda/a_0\right)^2 \ x \ .R.$$

Puisque $h_\lambda(z) = 1$, ceci impose

$$Q(x \ ) \overset{déf}{=} \ x \ \ ^2 + 4x \ \left(S^t S\right){}^t x \ \ + 4\left(\lambda/a_0\right)^2 x \ \left(R^t R\right){}^t x \ \ = (a_0)^2 \ .$$

Mais $\lambda \ < a_0$ et S^tS, de même que R^tR, est une matrice dont les coefficients sont $O\left(\ (x, y \ ) \ ^2\right)$. Par conséquent, si a_0 est suffisamment petit on a $Q(x \ ) \leqslant \frac{3}{2} \ x \ \ ^2$ sur $M \setminus \overline{R_0}$ et la condition précédente ne peut se réaliser que si $\ x \ \ ^2 \geqslant \frac{2}{3} \ a_0 \ ^2$ A contrario, si $z \quad M \setminus \overline{R_0} \setminus \quad h = \lambda \ $ et si $\ \mathrm{Re}\, z \quad \leqslant \frac{1}{2}a_0$, $M \setminus \quad h = \lambda \ $ est non caractéristique en z. Comme $\mathcal{E}_{a_0'} \subset R_0$, le lemme est prouvé. ■

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème de Hartogs très affaibli :

Proposition 16 (Principe de Hartogs avec singularité) *On suppose que a_0 et λ_0 sont suffisamment petits afin que la prop. 12 s'applique à $\Gamma = \mathcal{E}_{\lambda_0}$ et que lemme 15 soit valide. On se donne un domaine Ω relativement compact dans $\mathcal{E}_{\lambda_0}$ tel que $b\Omega$ est connexe et un réel λ_1 dans $]-\lambda_0, \lambda_0[$. Alors si une fonction f est holomorphe au voisinage de $\left[\overline{\Omega} \setminus (\mathcal{E}_{\lambda_0} \ \ \mathcal{E}_{\lambda_1})\right] \quad b\Omega$, il existe une hyperfonction g qui est CR au voisinage de $\overline{\Omega}$ et qui coïncide avec f au voisinage de $\overline{\Omega} \setminus (\mathcal{E}_{\lambda_0} \ \ \mathcal{E}_{\lambda_1})$.*

Preuve. Puisque $\mathcal{E}_{\lambda_0} \ \ b\Omega$ n'a que deux composantes connexes, il est possible de trouver des domaines Ω_2 et Ω_1 ayant les propriétés suivantes : $\Omega_1 \subset\subset \mathcal{E}_{\lambda_1} \setminus \Omega$, $\Omega \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \mathcal{E}_{\lambda_0}$ et f est holomorphe au voisinage de $\overline{\Omega_2} \ \ \Omega_1$. Utilisons alors la décomposition $f = F^+ - F^-$ fournie par la prop. 13. Puisque $\Omega_1 \subset\subset \mathcal{E}_{\lambda_1}$, F^- est CR au voisinage de $\overline{\mathcal{E}_{\lambda_0}} \ \ \mathcal{E}_{\lambda_1}$. Etant à support compact dans $\mathcal{E}_{\lambda_0}$, F^- est nulle près de $b\mathcal{E}_{\lambda_0}$ dans $\overline{\mathcal{E}_{\lambda_0}} \ \ \mathcal{E}_{\lambda_1}$. Grâce au lemme 14, on en déduit que F^- est aussi nulle au voisinage de $\overline{\mathcal{E}_{\lambda_0}} \ \ \mathcal{E}_{\lambda_1}$. On a donc $f = F^+$ au voisinage de $\left(\overline{\Omega_2} \ \ \Omega_1\right) \setminus \left(\overline{\mathcal{E}_{\lambda_0}} \ \ \mathcal{E}_{\lambda_1}\right)$ et donc de $\overline{\Omega} \setminus (\mathcal{E}_{\lambda_0} \ \ \mathcal{E}_{\lambda_1})$. ■

4.2 Propagation du principe du maximum

Comme dans la section 3.1, on se ramène au cas où M est générique et représentée dans R_0 par (7). On utilise les notations introduites dans la section 4.1 ; en particulier la fonction h, l'ouvert $\mathcal{U}$ et les familles $(\mathcal{E}_\lambda) = (\mathcal{U} \setminus \quad h < \lambda \ )$ et $(\mathcal{H}_\lambda) = \overline{\mathcal{U}} \setminus \quad h = \lambda \ $. On choisit $\lambda_0 \quad]0, a_0[$ et a_0 suffisamment petit de telle manière que le lemme 15 s'applique. Dans un voisinage convexe V de $\mathcal{U}$ où la projection orthogonale $\ \ _\rho h$ de $\quad h$ sur $\bigcap_{1 \leqslant j \leqslant \ell} Ker\, d\rho_j$ ne s'annule pas, on définit le champ de vecteurs

$$H = -\frac{1}{\ \ _{\rho}h} \quad _{\rho}h$$

Dans ce qui suit, on note $\ .,.\ _{\mathbb{R}}$ le produit scalaire usuel de l'espace réel $\mathbb{C}^n$ et S sa sphère unité. Si $p \quad \mathcal{U}$, on note Γ_p l'ouvert formé par les éléments $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_\ell)$ de S^ℓ tels que l'espace $Vect_{\mathbb{R}}(\gamma_1, ..., \gamma_\ell)$ est transverse à T_pM. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des triplets (λ, p, γ) tels $\lambda \quad [-\lambda_0, \lambda_0]$, $p \quad \mathcal{H}_\lambda$ et $\gamma \quad \Gamma_p$. La première étape de la preuve du th. A consiste à définir par des équations les wedges géométriques que forment M et les sous-variétés

$$\mathcal{H}_{\lambda,j}^{\gamma} = \mathcal{H}_\lambda + \mathbb{R}\gamma_j, 1 \leqslant j \leqslant \ell$$

lorsque $(\lambda, p, \gamma) \quad \mathcal{P}$.

Lemme 17 (Mise en équation de wedges géométriques) *Soit* $(\lambda, p_0, \gamma) \quad \mathcal{P}$. *Il existe* $r_0 > 0$ *et des fonctions* $g_1, ..., g_\ell$ *réelles analytiques dans* $B_0 = \overline{B_0(p_0, r_0)}$ *ayant les propriétés suivantes :*

1. $\ g_0, H\ _{\mathbb{R}} = -1$ *et pour* $1 \leqslant \mu, \nu \leqslant \ell$, $\ g_\nu, \gamma_\mu\ _{\mathbb{R}} = -\delta_{\mu,\nu}$ *et* $\ g_\nu, H\ _{\mathbb{R}} = \ g_0, \gamma_\nu\ _{\mathbb{R}} = 0$.
2. $B_0 \setminus \mathcal{H}_\lambda = \ g_\nu = 0,\ 0 \leqslant \nu \leqslant \ell\ $, $B_0 \setminus M = \ g_\nu = 0,\ \nu = 0\ $ *et pour* $1 \leqslant j \leqslant \ell$, *on a* $B_0 \setminus \mathcal{H}_{\lambda,j}^{\gamma} = \ g_\nu = 0,\ \nu = j\ $.
3. $B_0 \setminus M \setminus\ h < \lambda\ = \ g_0 < 0$ *et* $g_\nu = 0,\ \nu = 0\ $,
   $B_0 \setminus \mathcal{H}_{\lambda,j}^{\gamma} = \ g_j < 0$ *et* $g_\nu = 0,\ \nu = j\ $, $1 \leqslant j \leqslant \ell$.
4. $\partial g_0 \quad ... \quad \partial g_\ell$ *ne s'annule pas sur* B_0.

De plus, r_0 *et les réels* $\ g_j\ _{C^3(B_0)}$, $0 \leqslant j \leqslant \ell$, *peuvent être choisis de manière qu'ils soient des fonctions continues de* (λ, p_0, γ), (λ, p_0, γ) *variant dans* $\mathcal{P}$.

Preuve. Soient $d = \dim_{\mathbb{R}} M$ et $L_d = H$; si $p \quad R_0$ on pose

$$\mathcal{N}_p = \ h - h(p) = \rho_1 - \rho_1(p) = \cdots = \rho_\ell - \rho_\ell(p) = 0\ .$$

Choisissons $r_0 > 0$ tel qu'au voisinage de $B_0 = \overline{B_0(p_0, r_0)}$ il existe des champs de vecteurs $L_1, ..., L_{d-1}$ qui en tout point p de $B_0 \setminus M$ constituent une base de $T_p\mathcal{N}_p$ et qui avec L_d et $L_{d+1} = \gamma_1, ..., L_{2n} = \gamma_\ell$ forment une base réelle de $\mathbb{C}^n$. On considère alors la base (X_j) de $\mathbb{C}^n$ duale de (L_j) au sens où $\ X_\mu, L_\nu\ _{\mathbb{R}} = \delta_{\mu,\nu}$ pour tout $\mu, \nu \quad 1, ..., 2n\ $. Le système (X_j) étant forcément involutif, le théorème de Frobenius permet d'affirmer l'existence dans B_0 de fonctions réelles analytiques $\varphi_1, ..., \varphi_{2n}$ telles que $(\ \varphi_j) = (X_j)$ et $(\varphi_j(p)) = (0)$. Par construction $(\varphi_1, ..., \varphi_{2n})$ est un système de coordonnées de $\mathbb{C}^n$ dans B_0. Si on pose $\rho_0 = h - \lambda$, $\mathcal{H}_\lambda$ est définie dans les coordonnées usuelles par un système $\rho = (\rho_0, \rho_1, ..., \rho_\ell)$ de fonctions réelles analytiques. Notons ρ la fonction ρ exprimée dans les coordonnées (φ_j). Pour $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \ell$, on a

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial \varphi_{d+\beta}} = D\rho_\alpha. \quad \varphi_{d+\beta} = \ X_{d+\beta}, n_\alpha\ _{\mathbb{R}}.$$

où $n_0 = H$ et $n_\alpha = \quad \rho_\alpha (p)$, $1 \leqslant \alpha \leqslant \ell$.

Soit $p \quad B_0 \setminus M$. Si un élément θ de l'orthogonal réel de $T_p\mathcal{N}_p$ est tel que $\ \theta, X_{d+\beta}(p) \ _{\mathbb{R}} = 0$ pour tout $\beta \quad \ 0, ..., \ell\ $, alors θ est dans l'espace réel engendré par $L_1(p), ..., L_{d-1}(p)$. Comme cet espace est justement $T_p\mathcal{N}_p$, ceci force $\theta = 0$. Par conséquent la matrice $(\partial\rho_\alpha/\partial\varphi_{d+\beta})$ est inversible et $\mathcal{H}_\lambda$ est aussi définie dans B_0 par un système d'équations de la forme

$$g_{j-d} \overset{déf}{=} -\varphi_j + F_j(\varphi_1, .., \varphi_{d-1}) = 0,\ d \leqslant j \leqslant 2n \tag{54}$$

où les fonctions F_j sont réelles analytiques.

Lorsque q est un point de B_0, $j \quad \ 1, ..., \ell\ $, $\nu = j$ et $t \quad \mathbb{R}_+$ est suffisamment petit on a

$$\begin{aligned} (\varphi_\nu (q - t\gamma_j)) &= -D\varphi_\nu (q - t\gamma_j) . \gamma_j = - \ \ X_\nu (q - t\gamma_j), \gamma_j \ = 0 \\ (\varphi_j (q - t\gamma_j)) &= - \ \ X_j (q - t\gamma_j), \gamma_j \ = -1. \end{aligned}$$

D'où $\varphi_\nu(q - t\gamma_j) = \varphi_\nu(q)$ et $\varphi_j(q - t\gamma_j) = -t + \varphi_j(q)$ pour tout réel t tel que $q - t\gamma_j \quad B_0$. Par conséquent, si $x_1, .., x_{2n}$ sont les coordonnées de q dans le système (φ_j), les coordonnées d'un point de la forme $q - t\gamma_j$ sont $x_1, ..., x_{j-1}, -t + x_j, x_{j+1}, ..., x_{2n}$ et un tel point est dans $\mathcal{H}_\lambda$ si et seulement si $t = x_j - F_j(x_1, ..., x_{d-1})$ et $x_\nu = F_\nu(x_1, ..., x_{d-1})$ pour $\nu \quad \ d, ..., \ell \quad \ j\ $. Autrement dit, $B_0 \setminus \mathcal{H}^\gamma_{\lambda,j}$ est bien de la forme annoncée dans l'assertion (2).

Dans le système (φ_j), M est donnée par des équation de la forme $\varphi_j = G_j(\varphi_1, .., \varphi_d)$, $d+1 \leqslant j \leqslant 2n$ où $G_1, ..., G_d$ sont des fonctions réelles analytiques. Si $d+1 \leqslant j \leqslant 2n$, en chaque point q de B_0, $(\partial G_j/\partial\varphi_d)(q)$ est combinaison linéaire des réels $(\partial\rho_\nu/\partial\varphi_d)(q)$, $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$. Etant donné que $\partial\rho_\nu/\partial\varphi_d = \quad \rho_\nu, \quad \varphi_d \ = \quad \rho_\nu, H \ = 0$, on en déduit que les fonctions G_j ne dépendent pas de la variable φ_d. Du coup, pour tout $j \quad \ 1, ..., \ell\ $, G_j et F_j sont égales car elles ont les mêmes dérivées et coïncident en p. Ainsi, $B_0 \setminus M$ est bien le lieu d'annulation commun des fonctions $g_1, ..., g_\ell$.

Pour $x \quad Vect_{\mathbb{R}}(H, \gamma_1, ..., \gamma_\ell)$ et $1 \leqslant j \leqslant d-1$, on a $d\varphi_j.x = \ \ X_j, x \ _{\mathbb{R}} = 0$ de sorte que si on pose $\gamma_0 = H$, on a $\ \ g_\nu, \gamma_\mu \ _{\mathbb{R}} = - \ \ X_{d+\nu}, \gamma_\mu \ _{\mathbb{R}} = -\delta_{\mu,\nu}$ lorsque $0 \leqslant \mu, \nu \leqslant \ell$. Ceci entraîne aussi l'assertion (4). Par ailleurs, les fonctions $g_0, ..., g_\ell$ définissant dans B_0 la sous-variété CR générique $\mathcal{H}_\lambda$, on a $\partial g_0 \quad ... \quad \partial g_{\lambda,\ell} = 0$ sur B_0 quitte à diminuer r. Enfin la précision apportée quand à la continuité par rapport à (λ, p_0, γ) résulte du th. de Frobenius avec paramètre. Le lemme est prouvé. ■

On vérifie qu'il est possible d'effectuer des déformations non-caractéristiques réelles analytiques :

Lemme 18 (Déformation non caractéristique) *Les hypothèses et les notations sont celles du lemme précédent. Il existe alors* $c \quad]0,1[$, $C \quad]1, + \quad [$ *et* $r_1 \quad]0, r_0]$ *tels que pour tout* $(\eta, R) \quad]0,1[\times]0, r_1[$ *on peut trouver une fonction* $g_0 : \mathbb{C}^n - \quad \mathbb{R}$ *réelle analytique ayant les propriété suivantes :*

1. $\partial g_0 \quad \partial g_1 \quad ... \quad \partial g_1 = 0$ *au voisinage de* B_0 *et* $\ g_0 \ _{C^3(B_0)} \leqslant C$.

2. *Les inégalités suivantes sont vraies dans B_0 :*
   $g_0 \leqslant g_0 \leqslant g_0 + CR^3$.
   $g_0 \ \geqslant c, \quad g_0 - \quad g_0 \ \leqslant CR^2$, *et* $\left| \quad g_0, \gamma_j \ _{\mathbb{R}} \right| \leqslant CR^2$ *pour tout* $j \quad 1, ..., \ell$.
3. *L'ensemble* $\ -(1+c)\, R^3 \leqslant g_0 \ \setminus \ B_0 \ \ B(p_0, R)$ *est contenu dans* $\ g_0 > 0$
4. *Les inégalités suivantes sont vraies dans $B(p_0, R^3)$:*
   $g_0 \leqslant g_0 + \eta, \quad g_0 - \quad g_0 \ \leqslant \eta$ *et* $\left| \quad g_0, \gamma_j \ _{\mathbb{R}} \right| \leqslant \eta$ *pour tout* $j \quad 1, ..., \ell$
5. *Il existe un point p_0 de $M \setminus \ g_0 = 0$ dont la distance à p_0 est au plus 4η.*

De plus, les réels c et C peuvent être choisis de manière qu'ils soient des fonctions continues de (λ, p_0, γ), (λ, p_0, γ) variant dans $\mathcal{P}$.

Preuve. Soient $R \quad]0, r_0[$, $r \quad]0, R[$, $C_1 = 1 + \ \ g_0 \ _{C^3(B_0)}$, $c_1 = \frac{1}{2} \quad g_0(p_0)$ et $r_1 = \min(c_1/C_1, 1/C_1)$. Si $\ z - p_0 \ \leqslant r_1$ on a donc $\ g_0(z) \ < 1$. Si $r \leqslant r_1$, $t \quad [0, r]$ et si $z = p_0 - tH_{p_0}$, z est un point de $\overline{B_0(p_0, r)}$ qui vérifie $-3c_1 \ \ z - p_0 \ \leqslant g_0(z) \leqslant -c_1 \ \ z - p_0$. Par conséquent, pour $0 < r \leqslant R \leqslant r_1$, le minimum μ de g_0 sur $\overline{B_0(p_0, r)}$ est dans l'intervalle $[-3rc_1, -rc_1]$.

Sélectionnons dans $C \quad (\mathbb{R})$ une fonction croissante χ telle que $\chi = 0$ sur $]- \quad, 0]$ et $\chi = 1$ sur $[1, + \quad [$ puis considérons la fonction g_0 définie par

$$g_0 = (1 + g_0)\, \chi - 1 \text{ où } \chi : z \quad 1 - (r + \ \mu\ )\, \chi \left(\frac{\ z - p_0 \ ^2 - r^2}{R^2 - r^2} \right. \quad .$$

On a donc $\quad g_0 - \quad g_0 \ \leqslant \ \chi - 1 \quad \ g_0 \ + 2 \quad \chi$. En imposant $0 < r \leqslant R/2$, on obtient

$$\chi \ \leqslant (r + \ \mu\ )\, \frac{R}{R^2 - r^2} \leqslant 16 C_1 R^{-1} r$$

et comme $\ \chi - 1 \ \leqslant 4C_1 r$, il vient alors $\quad g_0 - \quad g_0 \ \leqslant 20 C_1 R^{-1} r$. Il suffit donc d'imposer $r \leqslant c_2 R$ avec $c_2 = c_1/80C_1$ pour obtenir $\quad g_0 \ \geqslant 3c_1/4$. Si $j \quad 1, ..., \ell$, nous savons que $\ \gamma_j, \quad g_0 \ _{\mathbb{R}} = 0$. D'où $\left| \ \gamma_j, \quad g_0 \ _{\mathbb{R}} \right| \leqslant (1 + \ g_0 \ ) \quad \chi \ \leqslant 32 C_1 R^{-1} r$.

La condition $\partial g_0 \quad \partial g_{\lambda,1} \quad ... \quad \partial g_{\lambda,\ell} = 0$ est satisfaite sur B_0 lorsque $\ \partial g_0 \quad \partial g_1 \quad ... \quad \partial g_\ell \ \geqslant 2 \ \ \partial\chi \quad \partial g_1 \ ... \ \partial g_{\lambda,\ell}$ sur B_0. Cette condition est remplie dès que $r \leqslant c_3 R$ où $c_3 = \min(c_2, m/32C_1)$, m étant le minimum de $\frac{1}{\ \partial g_1 \ ... \ \partial g_\ell \ } \ \ \partial g_0 \quad ... \quad \partial g_\ell \$ sur B_0.

Puisque $\ \chi \ _{C^3(\mathbb{C}^n)} \leqslant C_0 (r + \ \mu\ )\, R^{-3}$ où C_0 ne dépend que de n, on a $\ g_0 \ _{C^3(B_0)} \leqslant 1 + C_2 R^{-3} r$ avec par exemple $C_2 = 16 C_0 C_1$. Soit $\delta = \min(\eta_{p_0}/4, c_1 r)$ et $g_0 : \mathbb{C}^n \quad \mathbb{C}$ une fonction réelle analytique telle que

$$\ g_0 - (g_0 - \delta)\ _{C^3(B_0)} \leqslant \delta/2. \tag{55}$$

On a donc $\ g_0 \ _{C^3(B_0)} \leqslant C_3 + C_3 R^{-3} r$ avec une constante C_3 convenable. On choisit désormais de prendre $r = R^3$ de sorte que $\ g_0 \ _{C^3(B_0)} \leqslant 2C_3$. L'inégalité (55) implique aussi $g_0 - 3\delta/2 \leqslant g_0 \leqslant g_0 - \delta/2$. Or sur B_0 on a $g_0 - g_0 = (1 + g_0)(1 - \chi) \leqslant r + \ \mu \ \leqslant 3c_1 r$ et donc $g_0 - 5c_1 r \leqslant g_0 \leqslant g_0$. Le contrôle de g_0 sur $B(p_0, R^3)$ est meilleur car g_0 coïncide avec g_0 sur cette boule ; on a donc les inégalités annoncées dans l'assertion 4. Sur $B_0 \ \ B(p_0, R)$ on a $g_0 = (1 + \mu - r)\, g_0 + \mu - r$.

Donc en un point de $B_0 \;\; B(p_0,R)$ où $g_0 \geqslant \mu - r$ et a fortiori où $g_0 \geqslant -(1+c_1)\,r$, on a $(1+\mu-r)\,g_0 \geqslant \delta/2 > 0$ ce qui force $g_0 > 0$. On a donc obtenu les deux premières assertions du lemme avec des constantes c et C adéquates.

Considérons maintenant une courbe intégrale x du champ H telle que $x(0) = p_0$. Alors $g_0(x(t)) \geqslant g_0(p_0) + t \quad g_0(p_0)\,, H(p_0)\;_{\mathbb{R}} - C\,t^2$ où C est une constante indépendante de (λ, p_0, γ). On en déduit que $g_0(x(t)) \geqslant -\eta + t\,(c_1 - C_2 c R^2) - C\,t^2$. Si R est aussi inférieur à $\quad \overline{c_1/(2Cc_2)}$, cette inégalité assure que $g_0(x(t)) \geqslant 0$ lorsque $t = 2\eta$. Comme $H \;\leqslant 2$, $p_0 - x(t) \;\leqslant 4\eta$ si $0 \leqslant t \leqslant 2\eta$. La continuité évoquée étant évidente, le lemme est prouvé. ■

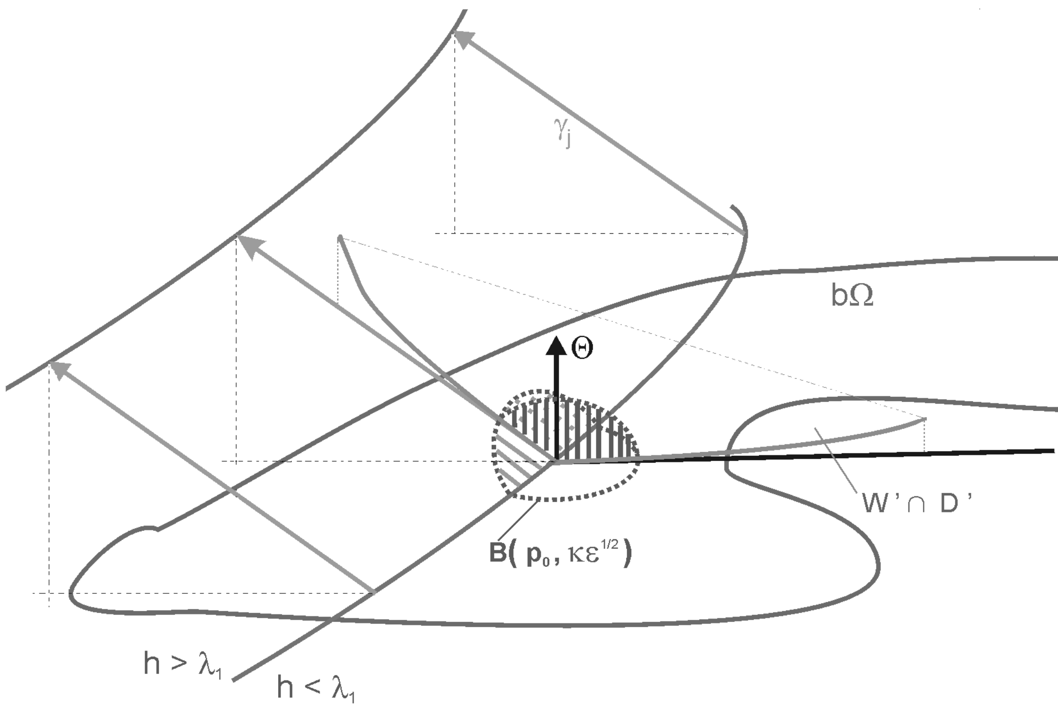
Lemme 19 (Prolongement à un wedge de grande amplitude) *On se donne dans M un Ω domaine de complémentaire connexe et qui est relativement compact dans l'ouvert $\mathcal{E}_{\lambda_0}$ défini par (52), λ_0 et a_0 étant suffisamment petits pour que la proposition 16 s'applique. On se donne aussi une fonction f qui est holomorphe au voisinage de $b\Omega$. On suppose en outre (voir dessin) qu'il existe $(\lambda_1, p_0, \gamma) \quad \mathcal{P}$ et $\delta_0 > 0$ tel que f se prolonge holomorphiquement au voisinage de $\overline{\Omega} \;\; \overline{\mathcal{E}_{\lambda_1}}$ et des sous-variétés*

$$\overline{B(p_0, 2\delta_0)} \setminus M \setminus \quad h > \lambda_1 \quad +]0, 2\delta_0]\,\gamma_j,\;\; 1 \leqslant j \leqslant \ell.$$

Dans ces conditions, il existe des réels strictement positifs r_2 et κ tels que, tout vecteur Θ de la forme $t_0\gamma_0 + \cdots + t_\ell\gamma_\ell + \tau$ où $t_0, ..., t_\ell \quad \mathbb{R}_+^*$ et $\tau \quad T_{p_0}\mathcal{H}_{\lambda_1}$, pour tout $\varepsilon \quad]0, r_2 \min_{0\leqslant j\leqslant \ell} t_j[$, la fonction f se prolonge holomorphiquement au voisinage du compact

$$M \setminus \overline{B(p_0, \kappa \quad \varepsilon)} \setminus \quad h \leqslant \lambda_1 \quad + \varepsilon\Theta.$$

De plus, les réels r_2 et κ peuvent être choisis de manière qu'ils soient des fonctions continues de (λ, p_0, γ), (λ, p_0, γ) variant dans $\mathcal{P}$.



Preuve. Fixons dans $]\lambda_1, \lambda_0[$ un réel λ suffisamment proche de λ_1 afin que $(\lambda, p_0, \gamma) \quad \mathcal{P}$ et que f soit holomorphe au voisinage des sous-variétés

$$\Upsilon_j = \quad \overline{B(p_0, \delta_0)} \setminus M \setminus \quad h \geqslant \lambda \quad + [0, \delta_0]\, \gamma_j,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell.$$

Dans ce qui suit, le vocable constante ne s'applique qu'aux réels ne dépendant que de (λ, p_0, γ) et qui sont continus par rapport à cette variable. Nous convenons aussi qu'une propriété est vraie pour «pour R suffisamment petit» seulement lorsqu'il existe une constante r telle que cette propriété est vraie dès que $0 < R < r$. Enfin la notation $O(Q)$ représente une quantité majorée en module par $C \quad Q$ où C est une constante.

Soient r_1 et C les réels intervenant dans le lemme 18. On suppose quitte à augmenter C que C majore le maximum sur B_0 des modules des dérivées d'ordre au plus trois de toutes les fonctions g_j, $0 \leqslant j \leqslant \ell$. Notons r_2 le plus petit des réels r_1 et $\frac{1}{\kappa_0 C}$ où κ_0 est la constante intervenant dans le th. E. Effectuons alors grâce au lemme 18 une déformation non caractéristique de g_0 à l'aide d'une fonction réelle analytique g_0. Celle-ci dépend de réels strictement positifs η et R dont le choix est encore à faire. Comme première condition, imposons $\eta \leqslant R \leqslant \min(r_1/4, \delta_1)$ où $\delta_1 = \min(\delta_0/2, dist(p_0, b\Omega))$. La cinquième assertion du lemme 18 fournit un point p_0 de $M \setminus \quad g_0 = 0 \quad$ tel que $\quad p_0 - p_0 \quad \leqslant \eta$. Pour $D = B(p_0, 2R)$, on a donc $\overline{D} \subset \Omega$ et $B_0 \quad D \subset B_0 \quad B(p, R)$. La quatrième assertion de ce même lemme indique alors que $M \setminus \quad -(1+c)\, R^3 \leqslant g_0 \quad \setminus (B_0 \quad D)$ est contenu dans $\Omega \quad \mathcal{E}_\lambda$. Il s'avère ainsi que f est holomorphe au voisinage de $M \setminus \quad -(1+c)\, R^3 \leqslant g_0 \quad \setminus bD$. f est par ailleurs holomorphe au voisinage de la fermeture de[5]

$$\mathcal{G} = D \setminus \quad g_\nu = 0,\ 0 \leqslant \nu \leqslant \ell$$

car $\mathcal{G} \subset \Omega \quad \mathcal{E}_\lambda$ d'après la seconde assertion du lemme 18. Si $0 \leqslant j \leqslant \ell$ posons

$$\mathcal{G}_j^- = D \setminus \quad g_j < 0 \; et \; g_\nu = 0 \; si \; \nu = j \quad ,$$

Pour vérifier que f est holomorphe au voisinage de $\overline{\mathcal{G}_j^-}$ $(1 \leqslant j \leqslant \ell)$ remarquons qu'il résulte directement de la construction des fonctions $g_1, ..., g_\ell$ que pour $1 \leqslant j \leqslant \ell$ la sous-variété $\mathcal{G}_j^-$ n'est rien d'autre que $\mathcal{G} + \mathbb{R}_+^* \gamma_j$. En utilisant comme dans la preuve du lemme 18 les courbes intégrales du champ H et la minoration $g_0 \geqslant g_0 - CR^3$, on vérifie que si $q \quad \mathcal{G}_\lambda$ et R est suffisamment petit $\quad g_0 = 0 \quad \setminus M$ possède un point q distant de q d'au plus $C_1 R^3$ où C_1 est une constante. Pour R suffisamment petit, ce point q est en fait sur $\mathcal{H}_\lambda \setminus \overline{\Omega} \setminus B_0$. On a alors $q \quad \Upsilon_j \setminus M$ et par suite $\overline{\mathcal{G}_j^-} \subset \Upsilon_j$ si λ est suffisamment proche de λ_1. Ceci donne l'holomorphie de f au voisinage de $\overline{\mathcal{G}_j^-}$.

Grâce au principe de Hartogs avec singularité (prop. 16), nous savons qu'il existe une hyperfonction f qui coïncide avec f sur $\overline{\Omega} \setminus (\mathcal{E}_{\lambda_0} \quad \mathcal{E}_\lambda)$ et qui est CR au voisinage de $\overline{\Omega}$ et donc en particulier au voisinage de $\overline{\mathcal{G}^-}$. Les conditions d'utilisations du th. E étant satisfaites par f, D,

[5] Si $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$, on écrit g_ν au lieu de g_ν afin d'uniformiser les écritures.

$\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_j^-$, $0 \leqslant j \leqslant \ell$, f nous savons que f se prolonge holomorphiquement au domaine $W \setminus D$ défini par

$$W = \quad g_j \overset{déf}{=} g_j + C_2 \quad \underset{\nu=j}{} (g_\nu)^2 < 0\ ,\ 0 \leqslant j \leqslant \ell$$

$$D \ = D \setminus \left\{ -g_{\ell+1} < \min\left(\frac{1}{C_2}, \frac{C_2}{48} dist\left(., bD\right)^2 \right) \right\}$$

où C_2 est une constante et $g_{\ell+1} = g_0 + ... + g_\ell$. Exhibons un domaine plus simple contenu dans D .

Les fonctions $g_0, ..., g_\ell$ s'annulant en p_0, il existe une constante C_3 telle que $g_0 + ... + g_\ell$ est majorée sur B_0 par $z \quad C_3 \ z - p_0$. La condition $-g_{\ell+1} < 1/C_2$ est donc satisfaite en un point z de D lorsque $z - p_0 \ \leqslant (C_2 C_3)^{-1}$. Si z est aussi dans W les réels $g_j(z)$ sont tous négatifs de sorte que l'inégalité $-g_{\ell+1}(z) < \frac{C_2}{48} dist\left(z, bD\right)^2$ est vraie si $z - p_0 \ < (C_2 C_3)^{-1} (2R - \ z - p_0 \ )^2$. Lorsque $z \quad B(p_0, R)$, ceci est vérifié si $z - p_0 \ \leqslant (C_2 C_3)^{-1} R^2$. Puisque $p_0 - p_0 \ \leqslant \eta$, en imposant a priori $\eta \leqslant cR^3$, on obtient que si R est suffisamment petit

$$W \setminus D \ \supset W \setminus B_{p_0}^2 \tag{56}$$

où $B_{p_0}^2 = \overline{B(p_0, c_1 R^2)}$ et $c_1 \quad]0, 1[$ est une constante.

3) Soit maintenant un vecteur Θ comme dans l'énoncé. Supposons que z soit un point de $\overline{\mathcal{G}_0^-} \setminus B_{p_0}^3$ où $B_{p_0}^3 = \overline{B(p_0, c_1 R^3)}$. Posons $\gamma_0 = H_{p_0}$. Puisque $H - H_{p_0} = O(\ p_0 - q\ ) = O(R^3)$ et $\eta_{p_0} = O(R^3)$, la quasi-dualité entre $(\quad g_\nu)_{0 \leqslant \nu \leqslant n}$ et $(H, \gamma_1, ..., \gamma_\ell)$ qu'expriment les assertions (2) et (1) des lemmes 18 et 17 donnent que si $1 \leqslant \nu, \mu \leqslant \ell$, $\quad g_\nu, \gamma_\mu \ _{\mathbb{R}} = -\delta_{\nu,\mu}$, $\quad g_\nu, \gamma_0 \ _{\mathbb{R}} = \quad g_0, \gamma_\mu \ _{\mathbb{R}} = O(R^3)$ et $\quad g_0, \gamma_0 \ _{\mathbb{R}} = -1 + O(R^3)$. Comme par ailleurs $\quad g_\nu, \tau \ _{\mathbb{R}} = O(\ p_0 - q\ ) = O(R^3)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} & g_\nu, \Theta \ _{\mathbb{R}} = \underset{0 \leqslant \mu \leqslant \ell}{} \quad g_\nu, \gamma_\mu \ _{\mathbb{R}} \leqslant -1 + O(R^3)\ ,\ 1 \leqslant \nu \leqslant \ell, \\ & g_0, \Theta \ _{\mathbb{R}} = -1 + O(R^3) + O(R^3) \end{aligned}$$

et donc que

$$\begin{aligned} & g_\nu(z + \varepsilon\Theta) = -\varepsilon\left[t_\nu + O(R^3)\right] + O(\varepsilon^2)\ ,\ 1 \leqslant \nu \leqslant \ell \\ & g_0(z + \varepsilon\Theta) = g_0(z) - \varepsilon\left[t_0 + O(R^3)\right] + O(\varepsilon^2) \end{aligned} .$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & g_\nu(z + \varepsilon\Theta) = C g_0(z)^2 - \varepsilon\left[t_\nu + O(R^3 + \varepsilon)\right]\ ,\ 1 \leqslant \nu \leqslant \ell \\ & g_0(z + \varepsilon\Theta) = g_0(z) - \varepsilon\left[t_0 + O(R^3 + \varepsilon)\right] \end{aligned}$$

Si $t = \min(t_0, ..., t_\ell)$, ceci prouve l'existence d'une constante r_2 suffisamment petite telle que

$$g_\nu(z + \varepsilon\Theta) \leqslant -\varepsilon t/2,\ 0 \leqslant \nu \leqslant \ell.$$

du moment que $R^3 \leqslant tr_2$, $0 < \varepsilon \leqslant tr_2$ et $-c_3 \quad \overline{\varepsilon} \leqslant g_0(z) \leqslant 0$ où $c_3 = 1/4C$. L'ensemble $\left(\overline{\mathcal{G}_0^-} \setminus \quad -c_3 \quad \overline{\varepsilon} \leqslant g_0 \leqslant 0 \quad\right) + \varepsilon\Theta$ est alors contenu dans W. Avec (56) ceci prouve que quitte à diminuer r_2, le domaine $W \setminus D$ contient $\left(M \setminus B^3_{p_0} \setminus \quad -(c_3/2) \quad \overline{\varepsilon} \leqslant g_0 \leqslant 0 \quad\right) + \varepsilon\Theta$. Puisque η est arbitrairement petit, nous pouvons imposer a priori $\eta \leqslant \varepsilon$ de sorte que $g_0 \geqslant g_0 - \varepsilon$ sur $B^3_{p_0}$. Comme dans B_1 les fonctions g_0 et $h - \lambda$ définissent la même hypersurface, ceci prouve que quitte à diminuer encore r_2, l'ensemble $M \setminus B^3_{p_0} \setminus \quad -(c_3/4) \quad \overline{\varepsilon} \leqslant h - \lambda \leqslant 0 \quad + \varepsilon\Theta$ est contenu dans $W \setminus D$. Le lemme est prouvé. ■

Proposition 20 *On se donne dans M un domaine Ω de complémentaire connexe et qui est relativement compact dans l'ouvert $\mathcal{E}_{\lambda_0}$ défini par (52), λ_0 et a_0 étant suffisamment petits pour que la proposition 16 s'applique. On se donne $\lambda_1 \quad]-\lambda_0, \lambda_0[$ et une fonction f qui est holomorphe au voisinage de $b\Omega$ et de $\overline{\Omega} \quad \overline{\mathcal{E}_{\lambda_1}}$. Alors $\sup_{\overline{\Omega} \quad \overline{\mathcal{E}_{\lambda_1}}} \quad f \quad \leqslant \max_{b\Omega} \quad f$.*

Preuve. Soient λ_0 le plus le plus grand des réels λ tels que $\overline{\Omega} \quad \mathcal{H}_\lambda =$ et I l'ensemble des réels λ de $]\lambda_1, \lambda_0]$ tels que $\sup_{\overline{\Omega} \quad \mathcal{E}_\lambda} \quad f \quad \leqslant C_0 = \max_{b\Omega} \quad f$. Par construction I est un intervalle de $]\lambda_1, \lambda_0]$ qui contient λ_0. Supposons que la borne inférieure de I ne soit pas λ_1. Il existe alors $C > C_0$ tel que la trace $\mathcal{F}$ de $F = \quad f \quad = C$ sur $\overline{\Omega}$ est non vide. Puisque f est réelle analytique non constante, nous savons grâce au lemme de Sard que l'ensemble des réels c tels que $\quad f \quad = C \quad \setminus M$ n'est pas une hypersurface lisse est de mesure nulle. On peut donc supposer que $\mathcal{F}$ est une hypersurface lisse de M. Considérons alors un point p de $\mathcal{F}$ où la fonction $h \quad _{\mathcal{F}}$ réalise son maximum λ. Dans la représentation particulière de M donnée par (7) cet extremum lié se traduit par l'existence d'un réel t tel que

$$f \quad (p) - \sum_{k+1 \leqslant j \leqslant \ell} \frac{\partial \quad f}{\partial y_j}(p) \quad \rho_j(p) = t \quad h(p),$$

ce qui entraîne $\quad _\rho \quad f \quad (p) = t \quad _\rho h(p)$. Puisque F est une hypersurface réelle lisse, il existe $r > 0$ tel que $B(p,r) \quad F$ a deux composantes connexes. Comme $\quad f \quad < C$ sur $\overline{\Omega} \quad \mathcal{E}_\lambda$, on a $\quad f \quad < C$ sur la composante qui contient $M \setminus B(p,r) \setminus \quad h > \lambda$.

Soit $L = \quad f = f(p)$ et $\Theta \quad T_pL$. Supposons que $\Theta \ / \ T_pM$. Alors Θ se projette orthogonalement sur N_pM en un vecteur non nul ν. Puisque $M \setminus B(p,R) \setminus \quad f \quad > C \quad \subset \quad h < \lambda$, le réel t vérifiant $\quad _\rho \quad f \quad = t \quad _\rho h$ est strictement négatif de sorte que $\gamma_0 = -\frac{1}{\quad _\rho h} \quad _\rho h$ est aussi le vecteur $\frac{1}{\quad _\rho \ f} \quad _\rho \quad f$. Complétons ν en une base $(\nu_j)_{1 \leqslant j \leqslant \ell}$ de N_pM telle que $\nu_1 = \nu$ et considérons pour $A > 0$ les vecteurs

$$\gamma_1 = \nu - \sum_{2 \leqslant j \leqslant \ell} \nu_j - A\gamma_0, \ \gamma_j = \nu_j, \ 2 \leqslant j \leqslant \ell.$$

Ecrivons Θ sous la forme $\nu + \tau + t_0\gamma_0$ où $\tau \quad T_p\mathcal{F}$. Alors par construction $\Theta = \theta + \tau$ avec

$$\theta = (t_0 + A)\gamma_0 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant \ell} \gamma_j.$$

Pour $A > 0$ suffisamment grand, on a $\ \gamma_1, \quad h\ _{\mathbb{R}} > 0$ et $\ \gamma_j, \quad f\ \ _{\mathbb{R}} < 0$ au voisinage de p de sorte que les traces sur ce voisinage des sous-variétés $\mathcal{H}_\lambda + \mathbb{R}_+^* \gamma_j$, $1 \leqslant j \leqslant \ell$, sont contenues dans l'ouvert $\ \ f\ < C\ $. Par conséquent il existe $\delta_0 > 0$ tel que la fonction $g = [f - f(p)]^{-1}$ est holomorphe au voisinage des sous-variétés $\overline{B(p_0, 2\delta_0)} \setminus M \setminus \ \ h > \lambda_1 \ \ +]0, 2\delta_0]\, \gamma_j$, $1 \leqslant j \leqslant \ell$. Comme $\ f\ \leqslant C_0 < C = \ f(p)\ $ sur $b\Omega$, nous savons grâce au lemme précédent que ceci entraîne l'existence de $\kappa > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit la fonction g est holomorphe au voisinage de $\overline{B(p_0, \kappa \ \ \varepsilon)} \setminus M \setminus \ \ h \leqslant \lambda \ \ + \varepsilon\Theta$. En particulier, cet ensemble ne peut pas rencontrer $L = \ \ f = f(p)\ $ mais ceci est impossible car $\Theta \quad T_pL$.

Cette contradiction signifie qu'en fait T_pL est entièrement contenu dans T_pM. Comme L est une hypersurface complexe de $\mathbb{C}^n$, cela signifie que $T_pL = T_p^cM$ et que M est une hypersurface réelle de $\mathbb{C}^n$. Mais dans ces conditions, $T_p^cM \subset T_pL \setminus T_pM = T_p\mathcal{H}_\lambda \setminus T_pM$ ce qui nie le caractère générique de $\mathcal{H}_\lambda$. Cette ultime contradiction prouve la proposition. ■

4.3 Principe de Hartogs et élimination de singularité (th. A et D)

C'est dans cette section que le théorème A et son corollaire, le théorème C, sont prouvés. Nous avons rappelé dans l'introduction que si le phénomène de Hartogs se produit, alors $\dim_{\mathbb{R}} M \geqslant 3$ et le principe du maximum pour les fonctions CR est valide et que par conséquent, M est non-signée. Il s'agit de prouver la réciproque. Dans ce qui suit, on se place dans les conditions énoncées au début de la section précédente ; en particulier, on est ramené au cas où M est générique.

Preuve du théorème A en une dimension CR

Comme M est générique, M est dans ce cas de dimension réelle $n+1$ et l'hypothèse que M est non-signée signifie que sa forme de Levi est nulle. D'après [22], ceci entraîne que M est localement feuilletée par des courbes complexes. M étant réelle analytique, ce feuilletage peut être localement trivialisé de sorte qu'on peut supposer que M est de la forme $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n-1}$ (voir [22, cor 5.2]). Le cas de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ a déjà été traité par Brown [15, th. 3.II]. Soit $n \quad \mathbb{N} \quad 0,1$ et considérons dans $M = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n$ un domaine relativement compact Ω dont le complémentaire dans M est connexe ainsi qu'une fonction f holomorphe dans un voisinage ouvert V de $b\Omega$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ dont on note (w, z) les coordonnés naturelles. Puisque V est un voisinage de $b\Omega$, on peut supposer sans nuire à la généralité de la preuve que $b\Omega$ est de classe C^ω et que $b\Omega \quad (w, x) \qquad x$ atteint son maximum en un unique point (w_0, x_0). Soit alors A le compact formé par les éléments a de $\mathbb{R}^n$ tels que l'image $\overline{\Omega}_a$ de $\overline{\Omega}$ par la projection $(w, z) \qquad w$ n'est pas vide ; on pose $\delta = \min\limits_{a \quad A} dist\left(\overline{\Omega}_a, bV\right)$.

Si $a \quad A$, on note $\mathcal{E}_a$ l'ensemble des ouverts Γ de $\mathbb{C}$ de classe C^1 ayant les trois propriétés suivantes : $\overline{\Omega}_a \subset \Gamma$, $dist\left(\overline{\Omega}_a, b\Gamma\right) < \eta$ et $\Gamma \ \ \overline{\Omega}_a$ est un ouvert dont le complémentaire n'a pas de composante connexe autre que celle de $\mathbb{C} \ \ \overline{\Omega}_a$ et la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \ \ \overline{\Gamma}$. Si

$\Gamma \quad \mathcal{E}_a$, on note $f_{a,\Gamma}$ la fonction holomorphe définie sur $\mathbb{C} \quad b\Gamma$ par la formule

$$f_{a,\Gamma} : w_0 \qquad \frac{1}{2i\pi} \quad_{\partial\Gamma} \frac{f(w,a)}{w-w_0} dw$$

et on note $f^+_{a,\Gamma}$ (resp. $f^-_{a,\Gamma}$) la restriction de $f_{a,\Gamma}$ à Γ (resp. à $\mathbb{C} \quad \overline{\Gamma}$). Si $\Gamma, \Gamma \quad \mathcal{E}_a$ et $\Gamma \subset \Gamma$ les fonctions $f^-_{a,\Gamma}$ et $f^-_{a,\Gamma'}$ coïncident sur $\mathbb{C} \quad \overline{\Gamma}$ de sorte qu'on peut définir sur $\mathbb{C} \quad \overline{\Omega}_a$ une fonction holomorphe f^-_a en posant pour tout $w_0 \quad \mathbb{C} \quad \overline{\Omega}_a$, $f^-_a(w_0) = f^-_{a,\Gamma}(w_0)$ où $\Gamma \quad \mathcal{E}_a$ est tel que $w_0 \quad \mathbb{C} \quad \overline{\Gamma}$. De même, on peut définir une fonction f^+_a sur $\Omega_a = \ _{\Gamma \quad \mathcal{E}_a} \Gamma$ en posant pour $w_0 \quad \Omega_a$, $f^+_a(w_0) = f^+_{a,\Gamma}(w_0)$ où $\Gamma \quad \mathcal{E}_a$ est tel que $w_0 \quad \Gamma$. Etant donné que pour b suffisamment voisin de a, $\mathcal{E}_a \setminus \mathcal{E}_b$ contient des ouverts arbitrairement proches de $\overline{\Omega}_a$ et des ouverts arbitrairement proches de $\overline{\Omega}_b$, $f^- : (w_0, a) \qquad f^-_a(w_0)$ est holomorphe au voisinage de $\ _{a \quad A}\left(\mathbb{C} \quad \overline{\Omega}_a\right) \times \quad a$ et donc de $M \quad \overline{\Omega}$. De même, f^+ est holomorphe sur $\Omega = \ _{a \quad A} \Omega_a \times \quad a$.

C'est un fait classique de l'analyse complexe à une variable que $f^+_{a,\Gamma}$ et $f^-_{a,\Gamma}$ sont respectivement prolongeables par continuité à $\overline{\Gamma}$ et $\mathbb{C} \quad \Gamma$, que $f(.,a) = f^+_{a,\Gamma} - f^-_{a,\Gamma}$ sur $b\Gamma$ et que $f^-_{a,\Gamma}$ est nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \quad b\Gamma$ si pour tout $n \quad \mathbb{N}$ le moment

$$I_n(a) = \quad_{\partial\Gamma} f(w,a)\, w^n dw$$

est nul ; remarquons que grâce à l'holomorphie de f, $I_n(a)$ ne dépend pas du représentant Γ choisi dans $\mathcal{E}_a$. Notons P_a la forme de Poincaré ; c'est la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^n \quad a$ par la formule

$$P_a = \frac{1}{c_n} \quad_{1 \leqslant j \leqslant n} (-1)^{j-1} \frac{x_j - a_j}{x-a^{\ n}} dx^j$$

où c_n est le volume de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$;P_a est fermée sur $\mathbb{R}^n \quad a$ et $\ _{x-a=1} P_a(x) = 1$. Pour $\varepsilon \quad \mathbb{R}^*_+$ suffisamment petit, on peut construire dans $M \setminus V$ une hypersurface $\Sigma_\varepsilon(a)$ de classe C^1 par morceaux qui a la même trace sur $\mathbb{C} \times [\mathbb{R}^n \quad B(a, 2\varepsilon)]$ que $b\Omega$ et dont le bord en tant que variété est $\sigma_\varepsilon(a) = b\Gamma \times S_{\mathbb{R}^n}(a,\varepsilon)$. Comme $f\left|_{\Gamma(a)}\right.$ est holomorphe dans V et P fermée, la formule de Stockes livre alors

$$\quad_{(w,x) \quad \Sigma_\varepsilon(a)} w^n df(w,x) \quad dw \quad P_a(x) = \quad_{(w,x) \quad \sigma_\varepsilon(a)} f(w,x) w^n dw \quad P_a(x) . \tag{57}$$

L'intégrale de droite dans (57) est égale à $\ _{(z,t) \quad \sigma_1(a)} f(w, \varepsilon t)\, w^n dw \quad P_a(t)$ et converge donc vers $I_n(a)$ vers lorsque ε tend vers 0. Comme $df \quad P_a$ est intégrable en a (car les fonctions $x \qquad x_j / \ x^{\ n}$ le sont en 0) , le membre de gauche de (57) converge vers l'intégrale de $df(w,x)\ w^n dw \quad P_a(x)$ sur $b\Omega$ lorsque ε tends vers 0. Ainsi,

$$I_n(a) = \quad_{\partial\Omega} w^n df \quad dw \quad P_a = \quad_{(w,x) \quad (0,-a)+\partial\Omega} w^n df(w, x+a) \quad dw \quad P_0(x) \tag{58}$$

Cette identité prouve que $I_n(a)$ se prolonge en fonction analytique sur $\mathbb{R}^n$. En effet la formule ci-dessus a toujours un sens et définit donc bien une fonction sur $\mathbb{R}^n$. Par ailleurs, si a_0 est fixé dans

$\mathbb{R}^n$ et si $a \quad \mathbb{R}^n$ est suffisamment proche de a_0, les hypersurfaces $(0, -a) + b\Omega$ et $(0, -a_0) + b\Omega$ bordent dans M un ouvert T tel que $z \qquad f(w, z + a)$ est holomorphe au voisinage de $\overline{T}$. Etant donné que la dérivée du courant P_0 est $\delta_0 dx_1 \quad ... \quad dx_n$ où δ_0 la mesure de Dirac en 0, la formule de Stokes permet de transformer le membre de droite de (58), c'est dire $I_n(a)$, en

$$\underset{(w,x)\ \ (0,-a_0)+\partial\Omega}{} \quad w^n df(w, x + a) \quad dw \quad P_0(x) + R_n(a) \tag{59}$$

où $R_n(a)$ vaut $\ _{w;\ (w,0)\ \ T}\ w^n df(., a) \quad dw$, c'est à dire 0 car f est holomorphe au voisinage de T. $I_n(a)$ est donc égal à l'intégrale écrite dans (59) et sous cette forme, il est clair que I_n est analytique au voisinage de a_0.

Puisque (w_0, x_0) est l'unique point de $b\Omega$ où $b\Omega \quad (w, x) \qquad x$ atteint son maximum, $\overline{\Omega}_{x_0}$ se réduit à (w_0, x_0) et lorsque a est suffisamment voisin de x_0 dans $\mathbb{R}^n$, f est donc holomorphe au voisinage de $\overline{\Omega}_a$. Ceci signifie que I_n est identiquement nulle au voisinage de x_0. Par suite, I_n est la fonction nulle pour tout $n \quad \mathbb{N}$. Il en résulte que pour tout $a \quad A$ et tout $\Gamma \quad \mathcal{E}_a$, $f^-_{a,\Gamma}$ est nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \ b\Gamma$ et donc que f^- est nulle sur la composante connexe non bornée de $M \ \overline{\Omega}$. Comme $M \ \overline{\Omega}$ est connexe, ceci force $f^- = 0$ et donc $f^-_a = 0$ pour tout $a \quad A$. On en déduit que pour tout $a \quad A$, f^+_a est un prolongement holomorphe f à Ω_a et donc que f^+ est un prolongement holomorphe de f à un voisinage de Ω. Le théorème A est prouvé dans le cas de la dimension CR 1.

Preuve du théorème A en dimension CR au moins deux

On suppose maintenant que M est de dimension CR au moins deux. Soit Ω un domaine de M de complémentaire connexe et $\Omega \subset\subset \mathcal{E}_{\lambda_0}$ où $\mathcal{E}_{\lambda_0}$ est le domaine défini par (52), λ_0 et a_0 étant choisis comme dans le lemme 20. On se donne une fonction f qui est holomorphe au voisinage de $b\Omega$. On note λ_0 (resp. λ_0) le plus petit (resp. le plus grand) des réels λ tels que $\overline{\Omega} \ \mathcal{H}_\lambda =$ et I l'intervalle des réels λ de $[\lambda_0, \lambda_0]$ tel que f se prolonge en une fonction f holomorphe au voisinage de $\overline{\Omega} \ \overline{\mathcal{E}_\lambda}$. I n'est pas vide car f est holomorphe au voisinage de $b\Omega$ et donc de $\overline{\Omega} \ \mathcal{E}_{\lambda_0''}$. Si $\lambda \quad I$ la proposition 20 prouve que pour tout $\alpha \quad \mathbb{N}^n$, $\sup_{\overline{\Omega}\ \overline{\mathcal{E}_\lambda}} \left|\partial^\alpha f/\partial z^\alpha\right| \leqslant \max_{b\Omega} \ \partial^\alpha f/\partial z^\alpha$.
Mais f étant holomorphe au voisinage de $b\Omega$, il existe $A\,, A > 0$ tel que $\partial^\alpha f/\partial z^\alpha \ \leqslant A\, A^{\ \alpha}\, \alpha!$ en tout point d'un voisinage de $b\Omega$. Par conséquent en un point quelconque z_0 de $\overline{\Omega} \ \overline{\mathcal{E}_\lambda}$, le rayon de convergence de la série de Taylor de f en z_0 est au moins $1/A$ et ceci prouve que I contient $[\lambda_0, \lambda_0] \setminus \,]\lambda - A^{-1}, \lambda + A^{-1}[$. En fin de compte $I = [\lambda_0, \lambda_0]$ et le théorème A est prouvé.

Preuve du théorème D. Puisqu'une variété non-signée n'est pas totalement réelle, M est de dimension CR au moins 1. Si M est de dimension réelle 2, la conclusion du th. D résulte de l'ellipticité de l'opérateur $\overline{\partial}$. On suppose désormais que M est de dimension réelle au moins 3. On se donne alors dans M un ouvert convexe U tel que la conclusion du théorème A est vraie pour tout domaine de M relativement compact dans U de complémentaire dans M connexe.

On suppose en outre que U est relativement compact dans le domaine $\mathcal{E}_{\lambda_0}$ du lemme 15. Cette condition, implicitement déjà contenue dans la condition de taille du th. A, permet d'affirmer grâce au lemme 14 que si D est un domaine contenu dans U, une hyperfonction CR qui est nulle au voisinage de bD est nulle sur D.

Considérons maintenant dans M un Ω un ouvert relativement compact dans U et une hyperfonction v qui est CR au voisinage de $\overline{\Omega}$ et réelle analytique au voisinage de $b\Omega$ dans M. Quitte à raisonner sur chaque composante connexe de Ω, on suppose que Ω est un domaine. Notons alors Ω le domaine de $\mathbb{C}^n$ obtenu en rajoutant à Ω les composantes de $M\ \ \Omega$ qui sont bornées. Puisque $b\Omega \subset b\Omega$ et $\Omega \subset U$, le th. A permet de prolonger $v\,|_{b\Omega}$ à Ω en une fonction f qui est CR et réelle analytique au voisinage de Ω. Si C est une composante connexe bornée de $M\ \ \Omega$, C est un compact contenu dans U et $bC \subset b\Omega$. Si $\overset{\circ}{C} =\ \ $, le th. A permet de prolonger $v\ \ _{bC}$ à $\overset{\circ}{C}$ en une fonction v réelle analytique et CR au voisinage de C. Si $\overset{\circ}{C} =\ \ $, $C = bC$ et v a déjà cette propriété par hypothèse. Effectuant cette opération pour chaque composante de $M\ \ \Omega$, on obtient un prolongement v de v à Ω qui est une hyperfonction CR au voisinage de $\overline{\Omega}$ coïncidant avec f au voisinage de $b\Omega$. Par conséquent, $f - v$ est une hyperfonction CR au voisinage de $\overline{\Omega}$ qui est nulle au voisinage de $b\Omega$, ce qui force $f - v$ à être nulle sur Ω. En particulier, v est réelle analytique sur Ω. Le théorème D est prouvé.

5 Principe de Hartogs-Severi-Bochner

5.1 Représentations intégrales des formes CR dans les variétés standard

La preuve du théorème B repose essentiellement, comme celle du th. A, sur une résolution de $\overline{\partial}_M$ avec condition de support (voir le th. 27 plus loin). Dans cette section, on obtient cette résolution par dualité à partir d'une résolution de l'opérateur $\overline{\partial}_M$ agissant sur les formes de bidegré maximal de classe C . Ce dernier résultat est obtenu à l'aide des formules intégrales de [2] ; lorsque ceci est nécessaire nous donnons une justification complète des points litigieux de [2].

Dans cette section et la suivante, on se donne dans $\mathbb{C}^n$ une sous-variété standard M non-signée de la forme (3) ; si $1 \leqslant j \leqslant \ell$, on note ρ_j la fonction $z \qquad \operatorname{Im} z_{k+j} - F_{k+j}(z_1, .., z_k)$ et on pose $\rho = (\rho_1, ..., \rho_\ell)$ ainsi que $F = (F_{k+1}, ..., F_n)$. Un couple générique de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ est noté (ζ, z) et on convient de dire qu'une fonction de m-variables complexes $w = (w_1, ..., w_m)$ est $\mathbb{R}$-polynomiale (resp. $\mathbb{R}$-rationnelle) si elle est une fonction polynomiale (resp. rationnelle) de $\operatorname{Re} w$ et $\operatorname{Im} w$.

Selon [2], si h est une fonction de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$, une barrière régulière pour

h est une fonction $\mathbb{R}$-polynomiale $P : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ pour laquelle il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\forall (\zeta, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C},\ \operatorname{Re}\left[(\zeta - z) . P(\zeta, z)\right] \geqslant \gamma \left[h(z) - h(\zeta)\right] \tag{60}$$

Une barrière régulière pour M est une fonction $Q : (\mathbb{C}^n \setminus M) \times M \to \mathbb{C}^n$ qui est la restriction d'une fonction $\mathbb{R}$-rationnelle par rapport à ζ et $\mathbb{R}$-polynomiale par rapport à z pour laquelle il existe $\gamma > 0$ vérifiant

$$\forall (\zeta, z) \in (\mathbb{C} \setminus M) \times M,\ \operatorname{Re}\left[(\zeta - z) . Q(\zeta, z)\right] \geqslant \gamma\ \rho(\zeta)\ , \tag{61}$$

et telle que pour tous domaines bornés G et Ω de $\mathbb{C}^n$ et M respectivement, tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $g \in \mathcal{L}^1(G \setminus M)$ telle que pour tout $(\zeta, z) \in (G \setminus M) \times \Omega$

$$\left| \left(\left[\overline{\partial}_\zeta D_z^{\alpha,\beta} Q\right] \wedge \overline{d}\,\zeta \right)^p \wedge \left(\overline{d}\,\overline{\zeta} \wedge \overline{d}\,\zeta \right)^{n-p} \right| \leqslant g(\zeta) \tag{62}$$

Dans cette formule, nous avons utilisé les conventions suivantes : lorsque $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est une fonction suffisamment régulière $\overline{\partial}_\zeta$ et $D_z^{\alpha,\beta} = \partial^{\,\alpha\,+\,\beta} / \left(\partial z_1^{\alpha_1} ... \partial z_n^{\alpha_n} \partial \overline{z}_1^{\beta_1} ... \partial \overline{z}_n^{\beta_n}\right)$ agissent sur φ coordonnée par coordonnée ; $\overline{d}\,\zeta = (d\zeta_1, ..., d\zeta_n)$ et $\overline{d}\,\overline{\zeta} = \left(d\overline{\zeta_1}, ..., d\overline{\zeta_n}\right)$ (notation similaire pour $\overline{d}\,z$ et $\overline{d}\,\overline{z}$) ; si Φ et Ψ sont deux n-uples de formes différentielles, $\Phi \wedge \Psi = \Phi_1 \wedge \Psi_1 + \cdots + \Phi_n \wedge \Psi_n$; si φ est une forme différentielle $\varphi^m = \varphi \wedge \cdots \wedge \varphi$ où φ est répétée m fois. Notons que la condition (62) est satisfaite si et seulement si pour tout $j_1, ..., j_p \in \{1, ..., n\}$, il existe $g \in \mathcal{L}^1(G \setminus M)$ telle que $\left|\left(\overline{\partial}_\zeta D_z^{\alpha,\beta} Q_{j_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\overline{\partial}_\zeta D_z^{\alpha,\beta} Q_{j_p}\right)\right| \leqslant g(\zeta)$.

La construction des formules intégrales que nous avons mentionnées plus haut repose essentiellement sur la possibilité de trouver une barrière régulière pour M qui reflète le caractère non-signé de M. Avant de prouver l'existence d'une telle fonction, on s'assure dans la proposition ci-dessous que pour la famille des fonctions

$$\rho_x = x.\rho = x_1 \rho_1 + \cdots + x_\ell \rho_\ell\,,$$

x parcourant la sphère unité S de $\mathbb{R}^\ell$, il existe une famille de barrières régulières ayant de bonnes propriétés. Cette proposition précise l'énoncé et la preuve de la proposition 3.4.1 de [2].

Proposition 21 *Il existe une famille $(P_x)_{x \in S}$ de fonctions de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ ayant les propriétés suivantes*

1. *Pour tout $x \in S$, P_x est une barrière régulière pour ρ_x.*
2. *On a $\left(\overline{\partial}_z P_x \wedge \overline{d}\,z\right)^k = 0$, ou encore, de façon moins condensée, $\overline{\partial}_z P_{x,j_1} \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}_z P_{x,j_k} = 0$ pour tout $J \in \{1, ..., n\}^k$.*
3. *L'application de S dans l'espace $\mathcal{P}$ des fonctions de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ polynomiales de degré au plus deux, $x \mapsto P_x$, est continue.*
4. *Il existe dans S un ensemble analytique H de mesure de Lebesgue nulle tel que sur chaque composante connexe de $S \setminus H$, l'application $x \mapsto P_x$ est réelle analytique et algébrique,*

ce qui signifie que ses coordonnées sont solutions d'une équation polynomiale dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x, x parcourant $S \quad H$.

Preuve. Fixons x dans S et ζ dans $\mathbb{C}^n$. Puisque ρ est un n-uple de formes quadratiques hermitiennes, la formule de Taylor donne que pour tout $z \quad \mathbb{C}^n$ on a

$$\rho_x(z) = \rho_x(\zeta) + \operatorname{Re} W_x(\zeta, z) + \mathcal{L}_{\rho_x}.(z-\zeta)$$

où $W_x(\zeta,z) = 2\partial\rho_x(\zeta).(z-\zeta)$ et où $\mathcal{L}_{\rho_x}$est la forme de Levi de ρ_x ; pour tout $\tau \quad \mathbb{C}^n$ on a donc $\mathcal{L}_{\rho_x}.\tau = \mathcal{L}_x.\tau$ où $\mathcal{L}_x = x.F = x_1F_{k+1} + \cdots + x_nF_n$. Si ζ est le point de M défini par $\zeta = (\zeta \,, \operatorname{Re}\zeta \; + iF(\zeta \,))$, l'espace $T^{1,0}_{\zeta}M$ est constitué des vecteurs $\tau \quad \mathbb{C}^n$ satisfaisant à l'équation $\tau \; = F(\tau \,, \zeta \,)$. Par conséquent la projection π de $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^\ell$ dans $\mathbb{C}^k$, $\tau \qquad \tau$, réalise un isomorphisme $T^{1,0}_{\zeta}M$ de $\mathbb{C}^k$ et l'identité $(\mathcal{L}_{\rho_x})_{\;T^{1,0}_{\zeta}M}.\tau \equiv \mathcal{L}_x.(\pi.\tau)^2$ montre, puisque M est non-signée, que $\mathcal{L}_x$ n'est ni définie positive, ni définie négative.

L'espace $\mathbb{C}^k$ étant muni de sa structure hermitienne usuelle, on note h_x l'endomorphisme hermitien associé à $\mathcal{L}_x$. Les valeurs propres (rangées en ordre croissant) de h_x sont notées $\lambda_1^x, ..., \lambda_k^x$ et leur multiplicité dans le polynôme caractéristique Θ_x de h_x est noté α_x ; s'il existe des entiers j tel que $\lambda_j^x > 0$, on note p_+^x le plus petit d'entre eux ; lorsque de tels entiers font défaut, on pose $p_+^x = k+1$. On désigne par E_j^x le sous-espace propre de h_x associé à λ_j^x $(1 \leqslant j \leqslant j)$; on note E_x la somme des E_j^x lorsque j décrit $\left\{p_+^x, ..., k\right\}$ et F_x l'orthogonal dans $\mathbb{C}^k$ de E_x ; on note π_x la projection orthogonale de $\mathbb{C}^k$ sur E_x. On considère alors les fonctions ψ_x, $P_x(\zeta, .)$ et $K_x(\zeta, .)$ suivantes

$$\begin{aligned}
\psi_x : \mathbb{C}^k \quad \tau &\qquad -\mathcal{L}_x.(\pi_x.\tau \,), \\
H_x(\zeta,.) : z &\qquad W_x(\zeta,z) - \psi_x(\zeta \; - z \,) \\
K_x(\zeta,.) : z &\qquad \mathcal{L}_x.(z \; - \zeta \,) + \psi_x(\zeta \; - z \,)
\end{aligned}$$

Par construction $K \leqslant 0$ et lorsque $z \quad \mathbb{C}^n$, on a $\rho_x(z) = \rho_x(\zeta) + \operatorname{Re} H_x(\zeta,z) + K_x(\zeta,z)$ de sorte que $\operatorname{Re} H_x(\zeta,z) \geqslant \rho_x(z) - \rho_x(\zeta)$. Soit $(e_1^x, ..., e_k^x)$ une base orthonormée de $\mathbb{C}^k$ telle que dans cette base, la matrice de h_x (et donc de $\mathcal{L}_x$) est $diag\,(\lambda_1^x, ..., \lambda_k^x)$. Si $\tau \; = (\tau_1, ..., \tau_k) \quad \mathbb{C}^k$ on a alors

$$\psi_x(\tau \,) = - \qquad \lambda_j^x \left|\left\langle \tau \,, e_j^x \right\rangle\right|^2 = - \qquad \mu^x_{\alpha,\beta}\, \tau_\alpha \overline{\tau_\beta}$$
$$p_+^x \leqslant j \leqslant k \qquad\qquad 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant k$$

où

$$\mu^x_{\alpha,\beta} = \qquad \lambda_j^x \left\langle e_\alpha, e_j^x \right\rangle \overline{\left\langle e_\beta, e_j^x \right\rangle},\; 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant k. \tag{63}$$
$$p_+^x \leqslant j \leqslant k$$

Il suffit donc de poser pour $z \quad \mathbb{C}^n$

$$P_x(\zeta, z) = \Bigg(2\frac{\partial \rho_x}{\partial z_\alpha}(\zeta) - \qquad \mu^x_{\alpha,\beta}\left(\overline{\zeta_\beta} - \overline{z_\beta}\right)$$
$$1 \leqslant \beta \leqslant k \qquad\qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant n$$

pour obtenir une fonction $P_x(\zeta,.)$ qui est une barrière régulière pour ρ_x.

Lorsque $\alpha \quad 1,...,n$, on a

$$\overline{\partial}_z P_{x,\alpha} = \underset{1\leqslant\beta\leqslant k}{\quad} \mu^x_{\alpha,\beta} d\overline{z_\beta} = \underset{p^x_+\leqslant j\leqslant k}{\quad} \lambda^x_j \left\langle e_\alpha, e^x_j \right\rangle \gamma_j$$

où pour $j \quad 1,...,k$ on a posé $\gamma_j = \underset{1\leqslant\beta\leqslant k}{\quad} \overline{\left\langle e_\beta, e^x_j \right\rangle} d\overline{z_\beta}$. Lorsqu'on développe un produit de la forme $\overline{\partial}_z P_{x,\alpha_1} \quad \cdots \quad \overline{\partial}_z P_{x,\alpha_k}$ $(\alpha_1,...,\alpha_k \quad 1,...,n$) on obtient une somme de monômes de la forme $c^x_{j_1...j_k}\gamma_{j_1} \quad \cdots \quad \gamma_{j_k}$ où $j_1,...,j_k \quad \left\{p^x_+,...,k\right\}$. Comme $\mathcal{L}_x$ n'est pas définie positive, $k - p^x_+ < k-1$ et ces monômes contiennent chacun deux facteurs η_j identiques. Ils sont donc nuls et par conséquent $\overline{\partial}_z P_{x,\alpha_1} \quad \cdots \quad \overline{\partial}_z P_{x,\alpha_k} = 0$, ce qui entraîne la deuxième assertion de cette proposition.

Prouvons que $x \quad P_x$ est continue. Fixons a dans S. Puisque les fonctions $x \quad \lambda^x_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ sont continues, il existe un voisinage V de a dans S tel que pour tout $x \quad V$, $p^x_+ \leqslant p^a_+$. Pour $x \quad V$, on a donc

$$\left|\mu^x_{\alpha,\beta} - \mu^a_{\alpha,\beta}\right| \leqslant \underset{p^a_+\leqslant j\leqslant n}{\quad} \left|\lambda^x_j - \lambda^a_j\right| + \underset{p^x_+\leqslant j<p^a_+}{\quad} \lambda^x_j. \tag{64}$$

Comme $p_+ : x \quad p^x_+$ ne prend que des valeurs entières, toute suite de points de S qui converge vers a se scinde en au plus $1+p^a_x$ sous-suites sur lesquelles p_+ est constante à partir d'un certain rang. Supposons que (x_n) est une suite S de limite a telle que $(p^{x_n}_+)$ soit constante de valeur $p \quad \left\{0,...,p^a_+\right\}$. Pour $j \quad \left\{p,...,p^a_+ - 1\right\}$, la suite $\left(\lambda^{x_n}_j\right)$ est une suite de $\mathbb{R}_+$ qui converge vers λ^a_j. Comme $j < p^a_+$, $\lambda^a_j = 0$ et la majoration (64) donne que $\left(\mu^{x_n}_{\alpha,\beta}\right)$ converge vers $\mu^a_{\alpha,\beta}$. On en conclut que $x \quad \mu^x_{\alpha,\beta}$ est continue en $\mu^a_{\alpha,\beta}$.

Lorsque $x \quad S$, Θ_x est de la forme $(-1)^k X^k + a^x_{k-1}X^{k-1} + \cdots + a^x_0$ où chaque fonction $a_j : x \quad a^x_j$ est polynomiale. Si $a_0,...,a_{k-1}$ sont identiquement nulles, il en est de même de F et la proposition est trivialement vraie. Dans le cas contraire, notons p_0 le plus grand des entiers j de $1,...,k-1$ tels que a_j n'est pas la fonction nulle. L'ensemble analytique $Z = \quad a_{p_0} = 0$ est alors de mesure nulle et lorsque $x \quad S = S \ Z$, h_x possède exactement $d = k - p_0$ valeurs propres non-nulles ; ce sont les racines du polynôme $\theta_x = (-1)^k X^d + a^x_{k-1}X^{d-1} + \cdots + a^x_{p_0}$. L'ensemble des couples (x,λ) de $S \ \times \mathbb{C}$ qui vérifient $\theta_x(\lambda) = 0$ a donc une structure de revêtement ramifié au dessus de S . Il existe par conséquent un ensemble analytique Z de mesure de Lebesgue nulle tel que sur $S \ = S \ Z$ les applications algébriques $x \quad \lambda_j(x)$ sont analytiques et tel que les fonctions $x \quad \alpha^x_j$ soient constantes sur chacune des composantes connexes de S . Soient C l'une de ces composantes et α^C_j la valeur que prend $x \quad \alpha^x_j$ sur C. Si $x \quad C$, on note $H^x_j = \left(h^x_{j,u,v}\right)_{1\leqslant u,v\leqslant k}$ la matrice représentant $h_x - \lambda^x_j Id_{\mathbb{C}^k}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^k$ et on fixe des parties U et V de $1,...,k$ telles qu'en au moins un point de C, $H^x_{j,U,V} = \left(h^x_{j,u,v}\right)_{(u,v) \quad U\times V}$ est une matrice inversible d'ordre $k - \alpha^C_j$. L'ensemble analytique $Z_C = \left\{y \quad C \ ; \ \det H^y_{j,U,V} = 0\right\}$ est alors de mesure nulle. Posons $U = \quad 1,...,k \quad U$ et $V = \quad 1,...,k \quad V$. Si $x \quad S$ et $\tau \quad \mathbb{C}^k$,

$\tau \quad E_j^x$ si et seulement si $\left(H_{j,U,V}^x\right)\tau_U = \left(H_{j,U,V'}^x\right)\tau_{U'}$ où $\tau_U = (\tau_j)_{j\ \ U}$ et $\tau_{U'} = (\tau_j)_{j\ \ U'}$; lorsque x est un point de l'ouvert $C\ = C\ \ Z_C$, ce système est équivalent à $\tau_U = \left(H_{j,U,V}^x\right)^{-1}\left(H_{j,U,V'}^x\right)\tau_{U'}$. Dans ce cas, on peut constituer une base $\left(\tau_{j,1}^x, ..., \tau_{j,\alpha_j^C}^x\right)$ de E_j^x en considérant les vecteurs obtenus en choisissant pour $\tau_{U'}$ les vecteurs $(\delta_{u,v})_{v\ \ U'}$, u décrivant U . En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $\left(\tau_{j,1}^x, ..., \tau_{j,\alpha_j^C}^x\right)$, on obtient une base orthonormée $\left(\varepsilon_{j,1}^x, ..., \varepsilon_{j,\alpha_j^C}^x\right)$ de E_j^x. Par construction, cette base est une fonction analytique et algébrique de x lorsque x parcoure C . Les fonctions $C\ : x \quad \mu_{\alpha,\beta}^x$, $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant k$, sont alors analytiques et aussi algébriques puisque c'est le cas des fonctions $x \quad \lambda_j^x$ sur C . Compte tenu de la définition de $x \quad P_x$, ceci prouve la quatrième assertion de cette proposition. ■

Cette famille de barrières régulières permet de construire une barrière régulière pour M.

Proposition 22 *Soit $(P_x)_{x\ \ S}$ la famille construite dans la prop. 21 et χ la fonction de $\mathbb{C}^n\ \ M$ dans S, $\zeta \quad -\frac{1}{\rho(\zeta)}\left(\rho_1(\zeta), ..., \rho_\ell(\zeta)\right)$. Alors la fonction Q de $(\mathbb{C}^n\ \ M) \times \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, (ζ, z) $P_{\chi(\zeta)}(\zeta, z)$, est une barrière régulière pour M telle que*

$$\left(\overline{\partial}_z Q \quad \overline{d}\, z\right)^k = 0 \ \ sur \ \ (\mathbb{C}^n\ \ M) \times \mathbb{C}^n \tag{65}$$

c'est à dire, de façon moins condensée, $\overline{\partial}_z Q_{j_1} \quad \cdots \quad \overline{\partial}_z Q_{j_k} = 0$ pour tout $J \quad\ 1, ..., n\ ^k$.

Preuve. Compte tenu de (60) et de l'identité $\rho_{\chi(\zeta)}(\zeta) \equiv -\rho(\zeta)$, la relation (61) est évidente. Puisque $\overline{\partial}_z Q = \left(\ \overline{\partial}_z P_x\right)_{\ x=\chi}$, (65) résulte directement de la deuxième assertion de la prop. 21. Puisque Q est une fonction affine antiholomorphe par rapport à $\overline{z}$, (62) est vérifiée si cette majoration est satisfaite lorsque $\alpha = \beta = 0$. Posons $U = \chi^{-1}(S\ \ H)$ où H est l'ensemble analytique introduit dans la quatrième assertion de la prop. 21 ; Q est analytique par rapport à ζ sur U et comme les fonctions ρ_j, $1 \leqslant j \leqslant \ell$, sont indépendantes, $(\mathbb{C}^n\ \ M)\ \ U$ est de mesure de Lebesgue nulle. Sur U, le module de la forme $\left(\left[\ \overline{\partial}_\zeta Q\right] \quad \overline{d}\,\zeta\right)^p \quad \left(\overline{d}\ \overline{\zeta} \quad \overline{d}\,\zeta\right)^{n-p}$ $(p \quad \mathbb{N})$ est majorée par la somme des nombres

$$C_n^p C_n^{n-p}\left|\overline{\partial}_\zeta Q_{j_1} \quad \cdots \quad \overline{\partial}_\zeta Q_{j_p} \quad d\overline{\zeta}^J \quad d\zeta\right|$$

où $(j_1, ..., j_p)$ parcoure l'ensemble des p-uples strictement croissants de $\ 1, ..., n\ $, $J = (i_1, ..., i_{n-p})$ est le $(n-p)$-uple strictement croissant tel que $\ i_1, ..., i_{n-p}, j_1, ..., j_p\ = \ 1, ..., n\ $, $d\overline{\zeta}^J = d\overline{\zeta_{i_1}} \quad \cdots \quad d\overline{\zeta_{i_{n-p}}}$ et $d\zeta = d\zeta_1 \quad \cdots \quad d\zeta_n$. Il s'agit donc de vérifier que pour tout domaine borné Ω de M, les fonctions

$$U \setminus (G\ \ M) \quad \zeta \qquad \left|d_\zeta Q_{j_1} \quad \cdots \quad d_\zeta Q_{j_p} \quad d\overline{\zeta}^J \quad d\zeta\right| \tag{66}$$

sont dominées sur $U \setminus (G\ \ M)$ par une fonction intégrable indépendante de z, z parcourant Ω. Comme les fonctions Q_j sont polynomiales par rapport à z, il suffit de prouver que si Q est indépendante de z, la fonction g_J définie par (66) est intégrable sur $G\ \ M$.

Q étant maintenant supposée indépendante de z, posons $(T_1, ..., T_{2n}) = (\operatorname{Re} Q, \operatorname{Im} Q)$ et notons $(t_1, ..., t_{2n})$ les coordonnées réelles naturelles de $\mathbb{C}^n$. Alors $g_J \quad \mathcal{L}^1(G \quad M)$ pour tout p-uple strictement croissant J si

$$I_{\theta,\sigma} = \quad_{t \quad U \setminus (G \quad M)} \left| d_t T_{\theta_1} \quad \cdots \quad d_t T_{\theta_p} \quad dt^\sigma \right| dV(t) < +$$

où $\theta = (\theta_1, ..., \theta_p)$ parcoure l'ensemble des p-uples strictement croissants de $\ 1, ..., 2n\ $ et où $dt^\sigma = dt_{\sigma_1} \quad \cdots \quad dt_{\sigma_{n-p}}$, σ décrivant l'ensemble des $(2n-p)$-uples strictement croissants de $\ 1, ..., 2n\ $. Fixons (θ, σ) et notons F le fermé de U constitué par les points de U qui annulent la forme $d_t T_{\theta_1} \quad \cdots \quad d_t T_{\theta_p} \quad dt^\sigma$. Si $F = U$, $I_{\theta,\sigma} = 0$. Dans le cas contraire, l'application $\Theta : t \quad \left(T_{\theta_1}, ..., T_{\theta_p}, t_{\sigma_1}, ..., t_{\sigma_{2n-p}}\right)$ est un difféomorphisme local de $U \quad F$ sur un ouvert borné W de $\mathbb{C}^n$. Puisque les composantes de T sont des fractions rationnelles en t, il résulte du théorème de Bezout que si m est le maximum des degrés du dénominateur et du numérateur de ces fractions quand elles sont mises sous forme irréductible, un point de W admet au plus m antécédents par Θ. Puisque le volume $\quad_{s \quad W} ds_1 \quad \cdots \quad ds_{2n} \ dV(s)$ de W est fini, on en déduit que $I_{\theta,\sigma} < +\quad$. La preuve de cette proposition est achevée. ■

On se donne une fonction strictement convexe positive $\rho_0 : \mathbb{C}^n - \quad \mathbb{R}_+$ de classe $C\quad$ et $Q_0 = 2\partial\rho_0/\partial z$; Q_0 vérifie donc la propriété (36) où P_0 est remplacée par Q_0. Les notations qui suivent sont nécessaires à la définition des opérateurs intégraux que nous utilisons. Pour $\delta \geqslant 0$ on pose

$$D_\delta = \quad \rho_0 < \delta \quad , \ \Gamma^\delta = \quad \rho_0 < \quad \rho \leqslant \delta \quad , \ \Gamma_0^\delta = \quad \rho \quad < \rho_0 \leqslant \delta$$

$$\eta_*(\zeta, z) \equiv \frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z^{\ 2}}, \ \eta_0(\zeta, z) \equiv \frac{Q_0(\zeta)}{(\zeta - z) . Q_0(\zeta)}, \ \eta(\zeta, z) \equiv \frac{Q(\zeta, z)}{(\zeta - z) . Q(\zeta, z)}.$$

Si α et β sont deux fonctions définies sur un même ensemble, on pose pour $t \quad \mathbb{R}$

$$[\alpha, \beta]_t = t\alpha + (1-t)\beta$$

Nous utilisons un résultat bien connu dont une preuve est contenue dans celle de la proposition 3 de [4].

Lemme 23 *Soient $\mathcal{M}$ une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^n$ de classe $C\quad$ ainsi que D et D des domaines de $\mathbb{C}^n$ vérifiant $D \subset\subset D$, D étant de classe $C\quad$. Alors pour tout $r \quad \mathbb{N}^*$ il existe un opérateur continu E de $C^r_{0,q}\left(\overline{D} \setminus \mathcal{M}\right)$ dans $C^r_{0,q}(D\ )$ ayant les propriétés suivantes pour toute forme $f \quad C^r_{0,q}\left(\overline{D} \setminus \mathcal{M}\right)$:*

1. *f est l'image réciproque de Ef par l'injection canonique de $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{C}^n$.*
2. *Le support de Ef est un compact de $D\ $.*
3. *$\overline{\partial}_M f = 0$ sur $D \setminus \mathcal{M}$ si et seulement si $\overline{\partial} Ef$ s'annule sur $\mathcal{M} \setminus D$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $r-1$.*

Pour $\delta > 0$ fixé, on dispose donc d'un opérateur d'extension E de $C^r_{0,q}\left(M \setminus \overline{D_0}\right)$ dans

$C^r_{0,q}(D_\delta)$. Pour $f\in C_{0,q}\left(M\setminus\overline{D_0}\right)$ et $z\in M\setminus\overline{D_0}$ on pose, lorsque ceci a un sens,

$$\left(R^q f\right)(z)=c_{n,q-1}\int_{(\zeta,t)\in\Gamma^\delta\times[0,1]}\left(\overline{\partial}Ef\right)(\zeta)\wedge\omega_{q-1}\left([\eta_*,\eta]_t\right)_{(\zeta,z)}\wedge\omega(\zeta)$$

$$\left(R^q_0 f\right)(z)=c_{n,q-1}\int_{(\zeta,t)\in\Gamma^\delta_0\times[0,1]}\left(\overline{\partial}Ef\right)(\zeta)\wedge\omega_{q-1}\left([\eta_*,\eta_0]_t\right)_{(\zeta,z)}\wedge\omega(\zeta)$$

$$\left(R^q_1 f\right)(z)=c_{n,q-1}\int_{\zeta\in\Gamma^\delta_0\setminus\Gamma^\delta,\,(s,t)\in[0,1]^2}\left(\overline{\partial}Ef\right)(\zeta)\wedge\omega_{q-1}\left([\eta_*,\eta_t]_s\right)_{(\zeta,z)}\wedge\omega(\zeta)$$

$$\left(R^q_* f\right)(z)=c_{n,q-1}\int_{\zeta\in\Gamma^\delta_0\setminus\Gamma^\delta}\left(\overline{\partial}Ef\right)(\zeta)\wedge\omega_{q-1}\left(\eta_*\right)_{(\zeta,z)}\wedge\omega(\zeta)$$

$$\left(K^q f\right)(z)=c_{n,q}\int_{\zeta\in\Gamma^\delta}\left(\overline{\partial}Ef\right)(\zeta)\wedge\omega_q(\eta)_{(\zeta,z)}\wedge\omega(\zeta)$$

$$\left(K^q_0 f\right)(z)=c_{n,q}\int_{\zeta\in\Gamma^\delta_0}\left(\overline{\partial}Ef\right)(\zeta)\wedge\omega_q(\eta_0)_{(\zeta,z)}\wedge\omega(\zeta)$$

$$\left(K^q_1 f\right)(z)=c_{n,q}\int_{\zeta\in\Gamma^\delta_0\setminus\Gamma^\delta,\,t\in[0,1]}\left(\overline{\partial}Ef\right)(\zeta)\wedge\omega_q\left([\eta_0,\eta]_t\right)_{(\zeta,z)}\wedge\omega(\zeta)$$

où $c_{n,j}=(-1)^j\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}$, $j\in\mathbb{N}$. On pose

$$\begin{aligned}Rf&=R^qf+R^q_1f+R^q_0f+(-1)^q R^q_*f\\ Kf&=K^qf+K^q_1f+K^q_0f\end{aligned}$$

Remarquons que si $q\geqslant 1$, on a $\omega_q(\eta_0)=0$ et donc $K^q_0f=0$. Lorsque $q\geqslant 1$, on utilise aussi une décomposition de K construite à l'aide d'un recouvrement de S par des fermés de S ; plus précisément on choisit une famille $(\Sigma_\nu)_{1\leqslant\nu\leqslant N}$ de domaines deux à deux disjoints de S de sorte que $S=\bigcup_{1\leqslant\nu\leqslant N}\overline{\Sigma_\nu}$ et qu'il existe une famille $(\xi_\nu)_{1\leqslant\nu\leqslant N}$ d'éléments de S telle que $\langle x,\xi_\nu\rangle\geqslant 1/2$ pour tout $x\in\Sigma_\nu$. Pour $z\in M\setminus D$ et pour peu que les intégrales aient un sens, on pose alors

$$K_\nu f=K^q_\nu f+K^q_{1,\nu}f$$

$$\left(K^q_\nu f\right)(z)=c_{n,q}\int_{\zeta\in\Gamma^\delta\setminus\chi^{-1}(\Sigma_\nu)}\left(\overline{\partial}Ef\right)(\zeta)\wedge\omega_{q-1}(\eta)_{(\zeta,z)}\wedge\omega(\zeta)$$

$$\left(K^q_{1,\nu} f\right)(z)=c_{n,q}\int_{\zeta\in\Gamma^\delta_0\setminus\Gamma^\delta\setminus\chi^{-1}(\Sigma_\nu),\,t\in[0,1]}\left(\overline{\partial}Ef\right)(\zeta)\wedge\omega_{q-1}\left([\eta_0,\eta]_t\right)_{(\zeta,z)}\wedge\omega(\zeta)$$

où χ a été définie dans la prop. 22.

La proposition ci-dessous précise le lemme 2.2.2 de [2].

Proposition 24 *Soit $r,q\in\mathbb{N}^*$. Si $r\geqslant 2n-1$, R opère continûment de $C^r_{0,q}\left(M\setminus\overline{D_0}\right)$ dans $C^{r-(2n-1)}_{0,q-1}\left(M\setminus\overline{D_0}\right)$ tandis que si $r\geqslant n-1$, K et K_ν $(1\leqslant\nu\leqslant N)$ opèrent continûment de*

$C^r_{0,q}\left(M\setminus\overline{D_0}\right)$ *dans* $C^{r-(n-1)}_{0,q}\left(M\setminus\overline{D_0}\right)$.

Preuve. On traite tout d'abord le cas de R. Soit $f \quad C^r_{0,q}\left(M\setminus\overline{D_0}\right)$ et $f = Ef$. En utilisant (15) on peut de la même manière que dans la preuve du th. 9.1 de [31] constater que $R^q f$ se réécrit sous la forme

$$(R^q f)(z) = \sum_{1\leqslant j\leqslant n-2} c_j \int_{\zeta \quad \Gamma^\delta} \overline{\partial} f(\zeta)\ \frac{\det[\overline{\zeta}-\overline{z}, Q, \overbrace{\overline{d}\ (\overline{\zeta}-\overline{z})}^{j-1}, \overbrace{\overline{\partial}_{\zeta,z} Q}^{n-j-1}]}{\left|\zeta - z\right|^{2j}\left[(\zeta-z).Q(\zeta,z)\right]^{n-j}}\ \omega(\zeta),\ z \quad M\setminus D_0, \quad (67)$$

où les c_j sont des constantes ne dépendant que de (n,q,j). Si $D^{\alpha,\beta}_z$ et $D^{\alpha',\beta'}_z$ sont des dérivations d'ordre ν et ν , $\left|D^{\alpha,\beta}_z \left|\zeta - z\right|^{-2j}\right|$ est majoré par $\left|\zeta - z\right|^{2j+\nu}$ fois une constante qui ne dépend que de ν et n tandis que $\left|D^{\alpha',\beta'}_z\left[(\zeta-z).Q(\zeta,z)\right]^{n-j}\right|$ est majoré par $\left|(\zeta-z).Q(\zeta,z)\right|^{n-j+\nu'}$ fois une constante ne dépendant que de ν , n et du diamètre de D_0. Puisque M est une sous-variété définie par l'équation $\rho = 0$, il existe $\gamma > 0$ telle que $\left|\zeta - z\right| \geqslant dist(\zeta, M) \geqslant \gamma \ \left|\rho(\zeta)\right|$ lorsque $z \quad M$ et $\zeta \quad \mathbb{C}$. Comme par définition, Q vérifie la minoration (61), on en déduit que le produit des modules des dérivées précédentes est majoré par une constante fois $\left|\zeta - z\right| \ \left|\rho(\zeta)\right|^{j+\nu+\nu'+n-1}$. On sait par ailleurs que $\left|\overline{\partial} f(\zeta)\right| = O\left(dist(\zeta,M)^{r-1}\right) = O\left(\left|\rho(\zeta)\right|^{r-1}\right)$. Si $D^{\alpha,\beta}_z$ est une dérivation d'ordre m arbitraire, on en conclut en utilisant la formule de Leibniz que l'intégrande Φ_j de (67) vérifie

$$\left|D^{\alpha,\beta}_z \Phi_j\right| \leqslant \sum_{\substack{\alpha',\beta' \\ \alpha'+\beta'=m'}} \frac{C_{\alpha',\beta'}\ \left|\rho(\zeta)\right|^{r-(j+m'+n)}}{\left|\zeta - z\right|}\left|D^{\alpha-\alpha',\beta-\beta'}\det[\overline{\zeta}-\overline{z}, Q, \overbrace{\overline{d}\ (\overline{\zeta}-\overline{z})}^{j-1}, \overbrace{\overline{\partial}_{\zeta,z} Q}^{n-j-1}]\right|$$

où $C_{\alpha',\beta'}$ est une constante indépendante de (ζ, z) et où $(\alpha \ ,\beta \ )$ parcoure l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^n$ qui sont inférieurs ou égaux, coordonnée par coordonnée, à (α,β). Lorsque $1\leqslant j\leqslant n-q$, on a $r-(j+m+n)\geqslant r-(2n-1)-m$. Si $r\geqslant 2n-1$, cette majoration et (62) prouvent que les fonctions $(\zeta,z) \quad D^{\alpha,\beta}_z\Phi_j$ vérifient sur $(\Gamma^\delta \ M)\times\left(M\setminus\overline{D_0}\right)$ les hypothèses des théorèmes classiques de dépendance d'une intégrale par rapport à un paramètre. On en déduit que chacune des fonctions $z \quad \int_{\zeta \ G \ M}\Phi_j(\zeta,z)$ est de classe $C^m\left(M\setminus\overline{D_0}\right)$ si $0\leqslant m\leqslant r-(2n-1)$. Comme les constantes $C_{\alpha',\beta'}$ sont majorées par $\left\|f\right\|_{C^r(D_\delta)}$ fois une constante indépendante de f, on en conclut que R^q est continu de $C^r_{0,q}\left(M\setminus\overline{D_0}\right)$ dans $C^{r-(2n-1)}_{0,q-1}\left(M\setminus\overline{D_0}\right)$. On prouve de la même façon que R^q_1 opère continûment sur ces même espaces. La continuité de R^q_0 et R^q_* sur les mêmes espaces est élémentaire.

Traitons maintenant le cas de K. A l'aide de (14), la définition de $K^q f$ s'écrit aussi

$$(K^q f)(z) = c_{n,q}\int_{\zeta \quad \Gamma^\delta \ M} \overline{\partial} f(\zeta)\ \frac{\det[Q, \overbrace{\overline{\partial}_z Q}^{q}, \overbrace{\overline{\partial}_\zeta Q}^{n-q-1}\ ]}{\left[(\zeta-z).Q(\zeta,z)\right]^n}\ \omega(\zeta),\ z \quad M\setminus D_0,$$

Si Φ est l'intégrande ci-dessus, en utilisant les mêmes majorations et minorations de $\left|\overline{\partial} f\right|$ et $(\zeta - z).Q(\zeta, z)$ on obtient que pour toute dérivation $D_z^{\alpha,\beta}$ d'ordre m

$$\left|D_z^{\alpha,\beta}\Phi\right| \leqslant \mathop{\qquad}_{\substack{\alpha',\beta' \\ \alpha'+\beta'=m'}} C_{\alpha',\beta'}\ \rho(\zeta)^{\ r+1-(m'+n)} \left| D^{\alpha-\alpha',\beta-\beta'} \det[Q, \overline{\partial}_z Q^{q}, \overline{\partial}_\zeta Q^{n-q-1}] \right|$$

où $C_{\alpha',\beta'}$ est une constante indépendante de (ζ, z) et où $(\alpha\ , \beta\ )$ parcoure l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ qui sont inférieurs ou égaux, coordonnée par coordonnée, à (α, β). Compte tenu de (62) ceci prouve comme précédemment que si $r \geqslant n-1$ et $0 \leqslant m \leqslant r-(n-1)$, $K^q f$ est de classe C^m sur $M \setminus \overline{D_0}$ et que K^q opère continûment de $C_{0,q}^r\left(M \setminus \overline{D_0}\right)$ dans $C_{0,q}^{r-(n-1)}\left(M \setminus \overline{D_0}\right)$. On constate de la même façon que K_1^q, K_ν^q et $K_{1,\nu}^q$ $(1 \leqslant \nu \leqslant N)$ opèrent continûment sur les mêmes espaces. La preuve est donc achevée. ■

Nous pouvons maintenant énoncer les formules de représentation intégrales dont nous avons besoin ; le théorème ci-dessous précise l'énoncé et la preuve du th. 4.3.3 de [2].

Théorème 25 *Soient M une sous-variété CR standard de $\mathbb{C}^n$ nulle part strictement pseudo-convexe, D_0 un domaine convexe borné de classe C et R, K, K_ν $(1 \leqslant \nu \leqslant N)$ les opérateurs définis plus haut. Soit enfin r $\mathbb{N}^*$ tel que $r \geqslant 2n$. Alors pour tout q $\mathbb{N}^*$ et toute forme f $C_{0,q}^r\left(M \setminus \overline{D_0}\right)$, on a sur $M \setminus \overline{D_0}$*

$$f = Kf + \overline{\partial}_M Rf \tag{68}$$

En outre, si k est la dimension CR de M, on a $Kf = 0$ si $q = k$ tandis que si $q = k-1$ et $k \geqslant 2$, $K_\nu f$ $(1 \leqslant \nu \leqslant N)$ est $\overline{\partial}_M$-fermée sur le domaine $D_\nu = \ z \quad D_0\ ;\ \ x \quad \Sigma_\nu,\ x.\rho(z) > 0\ $.

Preuve. Pour constater la relation (68), il suffit de reproduire la preuve de [2, formule 2.2.16] en utilisant la notion de barrière régulière introduite au début de cette section et le lemme 24 plutôt que le lemme 2.2.2 de [2, formule 2.2.16]. Soit maintenant f $C_{0,k}^r\left(M \setminus \overline{D_0}\right)$. Puisque $\omega_k(\eta)$ est la composante de degré k par rapport à $d\overline{z}$ et de degré $n-k-1$ par rapport à $\left(d\overline{\zeta}, dt\right)$ dans la forme $\omega\ (\eta)$ définie par (11), $\omega_k(\eta)$ est une somme de $(n-1)$-formes qui chacune ont en facteur un produit de la forme $\overline{\partial}_z Q_{j_1} \quad \cdots \quad \overline{\partial}_z Q_{j_k}$. Compte tenu de (65), cela signifie que $\omega_k(\eta)$ est nulle sur $\Gamma^\delta \times M$; $K^k f$ est donc nulle sur $M \setminus D_0$. Puisque $\overline{\partial}_z \eta_0 = 0$, on a

$$\overline{\partial}_z [\eta_0, \eta]_t = (1-t)\,\overline{\partial}_z \eta = \frac{1-t}{(\zeta - z).Q}\,\overline{\partial}_z Q$$

et $\omega_k\left([\eta_0, \eta]_t\right)$ est nulle pour les mêmes raisons que $\omega_k(\eta)$; $K_1^k f$ est donc aussi nul. Comme $K_0^k = 0$ puisque $k \geqslant 1$, ceci prouve que $Kf = 0$.

Supposons maintenant f $C_{0,k-1}^r\left(M \setminus \overline{D_0}\right)$. Etant donné que $Q = P_\chi$, nous savons que pour tout (ζ, z) $(\mathbb{C}^n\ M) \times M$

$$\operatorname{Re}\left[(\zeta - z).Q(\zeta, z)\right] \geqslant \rho_{\chi(\zeta)}(z) - \rho_{\chi(\zeta)}(\zeta) = \rho_{\chi(\zeta)}(z) + \ \rho(\zeta)\ .$$

Lorsque $z \quad D_\nu$ $(1 \leqslant \nu \leqslant N)$ on a donc $(\zeta - z).Q(\zeta, z) = 0$ pour tout $\zeta \quad \chi^{-1}(\Sigma_\nu)$ et l'intégrale définissant $(K_\nu f)(z)$ existe pour des raisons triviales ; de plus

$$\frac{1}{c_{n,q}}\left(\overline{\partial}_z K_\nu f\right)(z) = \underset{\zeta \quad \Gamma^\delta \backslash \chi^{-1}(\Sigma_\nu)}{} \left(\overline{\partial} Ef\right)(\zeta) \quad \overline{\partial}_z \omega_{k-1}(\eta)_{(\zeta,z)} \quad \omega(\zeta) + \underset{\zeta \quad \Gamma_0^\delta \backslash \Gamma^\delta \backslash \chi^{-1}(\Sigma_\nu),\, t \quad [0,1]}{+} \left(\overline{\partial} Ef\right)(\zeta) \quad \overline{\partial}_z \omega_{k-1}([\eta_0, \eta]_t)_{(\zeta,z)} \quad \omega(\zeta).$$

Mais d'après (14), $\overline{\partial}_z \omega_{k-1}([\eta_0, \eta]_t) = -\overline{\partial}_\zeta \omega_k([\eta_0, \eta]_t) - d_t \omega_k([\eta_0, \eta]_t)$ et nous avons déjà vu que $\omega_k([\eta_0, \eta]_t) = 0$. Ainsi $\overline{\partial}_z K_\nu f = 0$ et le théorème est prouvé. ■

Nous aurons aussi besoin d'un résultat d'approximation :

Proposition 26 *Les hypothèses étant celles du th. 25 et* $r \quad \mathbb{N}$ *étant supérieur à* $n-1$, *pour toute forme* $\psi \quad C^r_{0,k-1}\left(M \setminus \overline{D_0}\right)$, *il existe une suite de formes* $\overline{\partial}_M$*-exactes de classe* C *qui converge vers* ψ *dans* $C^{r-(n-1)}_{0,k-1}\left(M \setminus \overline{D_0}\right)$.

Preuve. Si $x \quad S$, $\gamma \quad \mathbb{C}^n$ et $\varepsilon > 0$, on a $x.d\rho(z).\gamma = x.\operatorname{Im}\gamma \; + x \; \gamma \; O(\; z\;) \geqslant x.\operatorname{Im}\gamma \; - Cx \; \gamma \; z$ où C ne dépend que de M. Donc si pour $1 \leqslant \nu \leqslant N$, on pose $\gamma_\nu = (0, i\xi_\nu)$, on obtient que les éléments x de Σ_ν vérifient $x.d\rho(z).\gamma_\nu \geqslant 1/2 - C \; z \; \geqslant 1/4$ du moment que $z \quad B = B(0, 1/4C)$. Comme M est invariante par les biholomorphismes de la forme $z \quad \left(\lambda z\,, \; \lambda^{\;2} z\;\right)$, il suffit de prouver la proposition quand $D_0 \subset B$. Dans ce cas, si $z \quad M \setminus D_0$, $x \quad \Sigma_\nu$ et si $\varepsilon > 0$, on a $x.\rho(z + \varepsilon\gamma) \geqslant \varepsilon/4 - C\,\varepsilon^2$ où C ne dépend que de M. On en conclut qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $z \quad M \setminus \overline{D_0}$ et tout $\nu \quad 1, ..., N\;$, $z + \varepsilon\gamma_\nu \quad D^\nu$.

Pour $f \quad C^r_{0,k-1}\left(M \setminus \overline{D_0}\right)$ la décomposition $Kf = K_1 f + \cdots + K_\nu f$ prouvée dans le th. 25 montre alors que pour tout $\varepsilon \quad]0, \varepsilon_0]$, il existe un voisinage V_ε de $M \setminus \overline{D_0}$ dans $\mathbb{C}^n$ où les formes $\psi_{\nu,\varepsilon} = (K_\nu f)(z + \varepsilon\gamma_\nu)$, $1 \leqslant \nu \leqslant N$, sont $\overline{\partial}$-fermées et que de plus, $\psi_\varepsilon = \underset{1 \leqslant \nu \leqslant N}{} \psi_{\nu,\varepsilon}$, qui est aussi $\overline{\partial}$-fermée au voisinage de $M \setminus \overline{D_0}$, tend vers $f - \overline{\partial}_M Rf$ dans $C^{r-(n-1)}_{0,k-1}\left(M \setminus \overline{D_0}\right)$ lorsque ε tend vers 0^+. Quitte à diminuer encore D_0, on sait d'après le théorème 2 que V_ε contient un voisinage ouvert W_ε de $M \setminus \overline{D_0}$ qui admet un ouvert de $\mathbb{C}^n$ strictement pseudoconvexe comme extension ℓ-convexe ; on note G_ε cet ouvert. Il résulte des travaux d'Andreotti et Grauert [5, th. 12, p. 248] qu'il existe une forme $\Psi_\varepsilon \quad C_{0,k-1}(G_\varepsilon) \setminus Ker\,\overline{\partial}$ arbitrairement proche de ψ_ε dans $C^{r-(n-1)}_{0,k-1}(W_\varepsilon)$. Comme G_ε est pseudoconvexe, Ψ_ε est $\overline{\partial}$-exacte et la proposition est établie. ■

5.2 Principe de Hartogs-Severi-Bochner pour les variétés standard (th. B)

Dans le théorème ci-dessous $L^1_{0,1}(M)$ est l'espace des sections de $\Lambda^{0,1}T^*M$ qui sont intégrables sur M. L'action de $\overline{\partial}_M$ sur une forme $g \quad L^1_{0,1}(M)$ est définie par dualité : $\overline{\partial}_M g$ est le courant caractérisé par l'identité $\left\langle \overline{\partial}_M g, \psi \right\rangle = -\left\langle g, \overline{\partial}_M \psi \right\rangle$ pour toute forme $\psi \quad C_{n,k-1}(M)$ à support compact.

Rappelons qu'un domaine Ω de M n'est pas CR-confiné s'il existe dans $\mathbb{C}^n$ un domaine convexe B tel que tout point de p de $b\Omega$ peut être joint à $M \setminus bB$ par un chemin CR tracé dans $p \quad (\overline{M \setminus B \quad \Omega})$; dans une telle situation, nous dirons que le couple $(\Omega, M \setminus B)$ est CR-lié. Remarquons que si $(\Omega, M \setminus B)$ est CR-lié, il en est de même pour tout couple $(\Omega, M \setminus D_0)$ où D_0 est un domaine convexe lisse suffisamment proche de B et contenu dans B.

Théorème 27 *Soit M une sous-variété standard de $\mathbb{C}^n$ nulle part strictement pseudoconvexe dont la dimension CR, k, est au moins 2. On se donne dans M un domaine relativement compact Ω non CR-confiné. Alors si $g \quad L^1_{0,1}(M)$ est une forme $\overline{\partial}_M$-fermée dont le support est contenu dans $\overline{\Omega}$, il existe une distribution f d'ordre $3n-2$ telle que $\overline{\partial}_M f = g$ et Supp $f \subset \overline{\Omega}$.*

Plus précisément, D_0 étant un domaine convexe lisse de $\mathbb{C}^n$ contenant $\overline{\Omega}$ tel que $(\Omega, M \setminus D_0)$ est CR-lié, la fonctionnelle f qui à toute forme $\varphi \quad C_{n,k}(M)$ à support compact associe le nombre $\quad g \quad \psi$ où ψ est n'importe quelle forme de $C^{n-1}_{n,k}\left(M \setminus \overline{D_0}\right)$ vérifiant $\overline{\partial}_M \psi = \varphi\left|_{M \setminus \overline{D_0}}\right.$, est une distribution d'ordre $3n-2$ correctement définie telle que $\overline{\partial}_M f = g$ et Supp $f \subset \overline{\Omega}$.

Preuve. Puisque Ω n'est pas CR-confiné, il existe un domaine convexe lisse D_0 tel que (Ω, D_0) est CR-lié ; on se donne une fonction convexe $\rho_0 : \mathbb{C}^n - \quad \mathbb{R}$ de classe C telle que $D_0 = \quad \rho < 0$. Soit $g \quad L^{1,loc}_{0,1}(M)$ une forme $\overline{\partial}_M$-fermée à support dans $\overline{\Omega}$.

Soit $\varphi \quad C_{n,k}(M)$ une forme à support compact. Si ψ_1 et ψ_2 sont deux $(n-k)$-formes de classe C^{n-1} au voisinage de $M \setminus \overline{D_0}$ qui vérifient $\overline{\partial}_M \psi_1 = \varphi\left|_{M \setminus \overline{D_0}}\right. = \overline{\partial}_M \psi_2$, alors la prop. 26 fournit une suite (χ_ν) de formes de classe C telle que $\left(\overline{\partial}_M \chi_\nu\right)$ converge dans $C^0_{n,k-1}\left(M \setminus \overline{D_0}\right)$ vers $\psi_2 - \psi_1$. Si $\nu \quad \mathbb{N}$, on a donc

$$\ _\Omega g \quad (\psi_2 - \psi_1) = \lim_{\nu - \quad +\nu} \ _\Omega g \quad \overline{\partial}_M \chi_\nu = - \lim_{\nu - \quad +\nu} \ _\Omega \overline{\partial}_M g \quad \chi_\nu = 0.$$

Puisque par ailleurs, on sait grâce au th. 25 qu'il existe au moins une forme ψ dans $C^{n-1}_{n,k}\left(M \setminus \overline{D_0}\right)$ telle que $\overline{\partial}_M \psi = \varphi\left|_{M \setminus \overline{D_0}}\right.$, ceci prouve qu'il est possible de définir une forme linéaire Λ en posant pour toute forme φ de $C_{n,k}(M)$

$$\Lambda(\varphi) = \ _\Omega g \quad \psi$$

où ψ est n'importe quel élément de $C^{n-1}_{n,k}\left(M \setminus \overline{D_0}\right)$ tel que $\overline{\partial}_M \psi = \varphi\left|_{M \setminus \overline{D_0}}\right.$. En particulier,

$$\Lambda(\varphi) = \ _\Omega g \quad R\varphi$$

où $R : C^{3n-2}_{n,k}\left(M \setminus \overline{D_0}\right) - \quad C^{n-1}_{n,k}\left(M \setminus \overline{D_0}\right)$ est l'opérateur dont l'existence est assurée par le th. 25. On en déduit que Λ est une forme linéaire continue sur $C^{3n-2}_{n,k}(M \setminus D_0)$. Autrement dit, Λ est une $(0, k-1)$-forme dont les coefficients sont des distributions d'ordre $3n-2$ à support compact dans $M \setminus D_0$. Par construction on a $\Lambda\left(\overline{\partial}_M \psi\right) = \ _\Omega g \quad \psi$ pour toute forme $\psi \quad C_{n,k}(M \setminus D_0)$. Ceci signifie que $\overline{\partial}_M \Lambda = g$ au sens des distributions. Puisque Supp $g \subset \overline{\Omega}$, Λ est une distribution CR sur $\overline{D_0} \quad \overline{\Omega}$. Mais d'après Trèves [68], le complémentaire du support d'une distribution CR est une réunion d'orbites de champs CR. Puisque (Ω, D_0) est CR-lié, tout point p de $b\Omega$ peut être joint à un point de bD_0 par un chemin CR tracé dans $p \quad \overline{D}_0 \ \overline{\Omega}$, ceci force le support de $\Lambda \ _{\Omega}$ à être contenu dans $\overline{\Omega}$. Le théorème 27 est prouvé. ■

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème B.

Preuve du th. B. Le fait que M doive être non-signée pour que le phénomène considéré ait lieu a déjà été mentionné au cours de l'introduction. L'absence du phénomène de Hartogs-Severi-Bochner en une dimension CR est traitée dans la section 6.3. On suppose désormais que M est non-signée et que $\dim_{CR} M \geqslant 2$.

Soit alors Ω un domaine relativement compact de M non CR-confiné ; comme dans la preuve du th. 27, on se donne un domaine convexe lisse D_0 tel que (Ω, D_0) est CR-lié ainsi qu'une fonction convexe $\rho_0 : \mathbb{C}^n - \quad \mathbb{R}$ de classe $C \quad$ telle que $D_0 = \quad \rho_0 < 0 \quad$. Soit $f \quad C \quad (b\Omega)$ une fonction CR au sens où f est la restriction à $b\Omega$ d'une fonction F de classe $C \quad$ dans un voisinage de $b\Omega$ telle que $\overline{\partial}_M F$ est nulle à l'ordre infini sur $b\Omega$; quitte à multiplier F par une fonction à support compact on se ramène au cas où F est de classe $C \quad$ sur M et à support compact dans D_0. Puisque $\overline{\partial}_M F$ s'annule à l'ordre infini sur $b\Omega$, la $(0,1)$-forme g qui vaut $\overline{\partial}_M F$ sur Ω et 0 sur $M \quad \Omega$ est $\overline{\partial}_M$-fermée et de classe $C \quad$. Grâce au th. 27, on sait qu'il existe une distribution u d'ordre $3n-2$ telle que $\overline{\partial}_M u = g$ et $Supp\, u \subset \overline{\Omega}$; on choisit pour u la solution qui est précisée dans l'énoncé de ce théorème. D'après le lemme 28 ci-dessous, on sait qu'il existe sur $M \setminus D_0$ un opérateur elliptique Δ_M qui commute avec $\overline{\partial}_M$ et dont l'adjoint formel Δ_M^* commute aussi avec $\overline{\partial}_M$. On peut donc appliquer ce qui précède à $\Delta_M F$ et obtenir une distribution v d'ordre $3n-2$ telle que $\overline{\partial}_M v = \mathbf{1}_{\overline{\Omega}} \overline{\partial}_M \Delta_M F$ et $Supp\, v \subset \overline{\Omega}$; bien sûr, on choisit pour v le même type de solution que pour u. Si $\varphi \quad C_{n,k}(M)$ et si $\psi \quad C_{n,k-1}\left(M \setminus \overline{D_0}\right)$ est telle que $\overline{\partial}_M \psi = \varphi \quad {}_{M \setminus D_0}$, on a donc

$$
\begin{aligned}
v, \varphi \quad &= \quad \left(\overline{\partial}_M \Delta_M F\right) \quad \psi = \quad \left(\Delta_M \overline{\partial}_M F\right) \quad \psi \\
&= \quad \left(\overline{\partial}_M F\right) \quad \Delta_M^* \psi = \left\langle u, \overline{\partial}_M \Delta_M^* \psi \right\rangle = \quad u, \Delta_M^* \varphi \quad = \quad \Delta_M u, \varphi \quad .
\end{aligned}
$$

On en déduit que $v = \Delta_M u$ et donc que $\Delta_M u$ est encore une distribution d'ordre $3n-2$. Comme Δ_M est elliptique, ceci entraîne par récurrence que u et toutes ses dérivées sont d'ordre $3n-2$. Ceci force u à être de classe $C \quad$ sur M. Puisque $u = 0$ sur $M \ \overline{\Omega}$, $u = 0$ sur $b\Omega$ et $f = F - u$ est le prolongement cherché pour f. ■

Le lemme ci-dessous est contenu dans [68] ; nous en donnons une preuve abrégée par commodité pour le lecteur.

Lemme 28 *Soient M une sous-variété standard de $\mathbb{C}^n$ et D_0 un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. Alors il existe sur $M \setminus D_0$ un opérateur elliptique Δ_M d'ordre deux qui commute avec $\overline{\partial}_M$ et dont l'adjoint formel commute aussi avec $\overline{\partial}_M$.*

Preuve. Comme dans le début de cette section, on représente M sous la forme (3) sauf que $F = (F_{k+1}, ..., F_n)$ est ici considérée comme une fonction de (x, y) indépendante de x. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$ on note $\mathcal{Z}_j$ la fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\ell$, $(x, y) \quad x + i(0, F(x, y))$. Notons (P_j) l'expression des champs antiholomorphes tangents $\left(\overline{L_j}\right)$ définis par (9) dans les coordonnées (x, y) de M. Puisque M est générique, $(d\mathcal{Z}_1, ..., d\mathcal{Z}_n)$ est $\mathbb{C}$-libre et $(d\mathcal{Z}_1, ..., d\mathcal{Z}_n, dy_1, ..., dy_k)$ est une base de $\mathbb{C}T^*M$. Suivant [68], on peut donc considérer les champs $\Theta_1, ..., \Theta_n$ définis par les relations de dualité

$$\Theta_p \mathcal{Z}_q = \delta_{p,q} \ \ et \ \ \Theta_p y_r = 0, \ 1 \leqslant p, q \leqslant n, \ 1 \leqslant r \leqslant k,$$

et considérer

$$\Delta_M = \Theta_1^2 + \cdots + \Theta_n^2.$$

Puisque F s'annule à l'ordre 2 en 0, $(\partial_x \mathcal{Z}) = (\partial \mathcal{Z}_p / \partial x_q)_{1 \leqslant p,q \leqslant n} = I_n + O(x, y)$ de sorte que si V est un voisinage ouvert suffisamment petit de 0 dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\ell$, la matrice $(\partial_x \mathcal{Z})$ est inversible ; on vérifie aisément que si $(\theta_{p,q}) = (\partial_x \mathcal{Z})^{-1}$, on a

$$\Theta_p = \underset{1 \leqslant q \leqslant n}{\quad} \theta_{q,p} \frac{\partial}{\partial x_q}, \ 1 \leqslant p \leqslant n.$$

Comme $\ \ I - \partial_x \mathcal{Z} \ \ = O(x, y)$, Δ_M est elliptique sur V si V est suffisamment petit.

Puisque les champs P_j, $1 \leqslant j \leqslant k$ et Θ_p, $1 \leqslant p \leqslant n$, prennent des valeurs constantes sur les fonctions $\mathcal{Z}_q$, $1 \leqslant q \leqslant n$ et $y_r = 0$, $1 \leqslant r \leqslant k$, (on a $P_j \mathcal{Z}_q = 0$ et $P_j y_r = 2i\delta_{j,r}$), les crochets$[\Theta_p, P_j]$ sont tous nuls. Ceci entraîne que $\overline{\partial}_M$ et Δ_M commutent, Δ_M agissant sur les formes coefficient par coefficient. L'expression de Θ_p $(1 \leqslant p \leqslant n)$ montre que l'adjoint formel Θ_p^* de Θ_p s'écrit $\Theta_p^* = \Theta_p + \underset{1 \leqslant q \leqslant n}{\quad} (\partial \theta_{q,p} / \partial x_q)$. On en déduit que Θ_p^* commute avec tous les champs P_j et donc que Δ_M^* commute avec $\overline{\partial}_M$. Ceci prouve le lemme quand D_0 est suffisamment petit. Puisque M est une variété standard de la forme (3), M est invariante par les biholomorphismes du type $z \quad \left(\lambda z \ , \ \lambda^{\,2} z \ \right)$ $(\lambda \quad \mathbb{C}^*)$ et cette condition de taille disparaît. ■

5.3 Principe de Hartogs-Severi-Bochner pour les variétés feuilletées (th. C)

Soit M une sous-variété CR lisse de $\mathbb{C}^n$ de dimension CR égale à k et de codimension ℓ. Soit $\nu \quad \mathbb{N}^*$. On dit que M admet un **feuilletage complexe** de rang ν (ou que M est feuilletée par des variétés complexes de dimension ν), s'il existe pour tout point ω_0 de M, il existe un voisinage ouvert V de ω_0 et une application $\pi : M \setminus V \quad \mathbb{R}^{n+k-2\nu}$ de classe $C \quad$ et de rang maximal, tels que pour tout point $p \quad \pi(M)$, la fibre $\pi^{-1}(p)$ est une sous-variété complexe de $\mathbb{C}^n$ de dimension ν. Remarquons qu'une telle variété appartient à la classe des variétés non-signées puisque le bord d'un domaine strictement pseudoconvexe ne contient pas de courbe complexe.

Les variétés CR lisses levi-plates admettent d'après Sommer [63] des feuilletages complexes ; plus généralement, Freeman [22] a montré que si M est définie par un système $(\rho_1, ..., \rho_\ell)$ de fonctions C , M admet localement un feuilletage complexe lorsqu'en tout point z de M, la dimension de $\bigcap_{1 \leqslant j \leqslant \ell} Ker\left(\mathcal{L}_{\rho_j}(z)_{T_z^{1,0}M}\right)$ est constante. Récemment, Tumanov [69] a généralisé ce résultat de la façon suivante. Si z M, on note $\nu_M(z)$ le plus petit des entiers $\dim_{\mathbb{C}} Ker\mathcal{L}_{M,\nu}(z)$ lorsque ν parcoure N_zM ; on note ν_M le plus petit des entiers $\nu_M(z)$ lorsque z décrit M. Alors si z_0 M est tel que $\nu_M(z_0) = \nu_M$, M est au voisinage de z_0 localement feuilletée par des sous-variétés complexes de dimension ν_M. Notons que la dégénérescence de la forme de Levi n'est pas nécessaire à l'existence d'un feuilletage complexe puisque par exemple $\mathcal{N}_0 = \left\{z \quad \mathbb{C}^3 ; \ z_1{}^2 + z_2{}^2 = 1 + z_3{}^2\right\}$ est feuilletée par les droites complexes $(a, b, 0) + \mathbb{C}\left(\bar{b}\tau, -\bar{a}\tau, 1\right)$ où (a, b) décrit la sphère unité de $\mathbb{C}^2$ et τ décrit le cercle unité de $\mathbb{C}$.

Preuve du théorème C.

L'absence de phénomène de Hartogs-Severi-Bochner en une dimension CR est traitée dans la section 6.3. On suppose désormais que M est une sous-variété CR de $\mathbb{C}^n$ est feuilletée par des courbes complexes et que $\dim_{CR} M \geqslant 2$. Le cas échéant, on se ramène aisément au cas où M est générique en considérant M comme le graphe d'une fonction CR au dessus d'une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^{k+\ell}$. On fixe un point ω_0 de M. Par hypothèse, il existe au voisinage de ω_0 dans M une application π à valeurs dans $\mathbb{R}^{d-2}$, lisse, de rang maximal et telle que pour tout point p dans l'image de π, la fibre $\pi^{-1}(p)$ est une courbe complexe de $\mathbb{C}^n$ contenue dans M ; pour fixer les idées, on se ramène au cas où $\omega_0 = 0$ et $\pi(\omega_0) = 0$. Dans une telle situation, on peut trouver parmi les voisinages de 0 dans $\mathbb{C}^n$ un domaine convexe G ayant les deux propriétés suivantes :

i. Pour tout p $\pi(M \setminus G)$ et tout domaine convexe C contenu dans G, $\pi^{-1}(p) \setminus C$ est simplement connexe.
ii. Il existe un C -difféomorphisme $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ de $M \setminus G$ sur un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-2}$ dont l'application réciproque Φ est holomorphe par rapport à sa première variable et vérifie $\pi^{-1}(p) \setminus G = \Phi(U \setminus [\mathbb{C} \times \ p\ ])$ pour tout p $\pi(M \setminus G)$.

Pour une raison technique, on considère dans G un domaine convexe G .

On se donne un domaine Ω de M qui est de classe C^2, qui n'est pas CR-confiné et qui est relativement compact dans $M \setminus G$. Il existe donc dans $\mathbb{C}^n$ un domaine convexe lisse B tel que $(\Omega, M \setminus B)$ est CR-lié au sens de la définition donnée au début de la section 5.2. Puisque $B \setminus G$ est contenu dans le domaine G , tout chemin qui est issu d'un point de $M \setminus B \setminus G$ et dont l'extrémité appartient à $M \setminus bB$, rencontre nécessairement $M \setminus b(B \setminus G)$. En prenant dans le convexe $B \setminus G$ un convexe lisse B suffisamment proche de $B \setminus G$, on obtient donc un domaine $D = M \setminus B$ tel que (Ω, D) est CR-lié. Pour tout p $P = \pi(D)$, on pose $D_p = \pi^{-1}(p) \setminus D$

et $\Delta_p = \Psi_1(D_p)$; Δ_p est simplement connexe car Φ est un isomorphisme analytique de D_p sur Δ_p. On fixe aussi un disque Δ de $\mathbb{C}$ tel que $\Delta_p \subset\subset \Delta$ pour tout $p \quad P$.

On se donne maintenant $m \quad \mathbb{N}^*$ ainsi qu'une fonction f qui est CR de classe C^{m+1} sur $b\Omega$ (par convention $\quad +1 = \quad$). Par définition, on peut donc prolonger f à M en une fonction f de classe C^{m+1} telle que $\overline{\partial}_M f$ s'annule à l'ordre $m+1$; en multipliant f par une fonction plateau adéquate, on se ramène au cas où f est nulle en dehors d'un compact de D contenant $b\Omega$. Rappelons comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction que si Ω est suffisamment lisse, l'existence d'un tel prolongement est automatique au voisinage de tout point de $b\Omega$ où $b\Omega$ est une sous-variété CR-générique de $\mathbb{C}^n$.

Formule de saut dans une fibre régulière

On considère une fibre de π déterminée par un point p de P de tel que D_p coupe transversalement $b\Omega$; puisque $b\Omega$ et π sont de classe au moins C^2, on sait d'après un théorème de Sard que l'ensemble R de ces points a un complémentaire dans P qui est de mesure nulle. On pose $\Phi_p = \Phi(.,p)$, $\Omega_p = \Omega \setminus D_p$ et $\Gamma_p = \Phi_p^{-1}(\Omega_p)$; Γ_p est donc un ouvert lisse de $\mathbb{C}$. On définit sur $\Gamma_p^+ = \Gamma_p$ et $\Gamma_p^- = \mathbb{C} \quad \overline{\Gamma_p}$ des fonction holomorphes f_p^+ et f_p^- de la façon suivante

$$t_0 \quad \Gamma_p^{\pm},\ f_p^{\pm}(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \quad_{\partial\Gamma_p} \frac{f(\Phi_p(t))}{t - t_0} dt \overset{déf}{=} \varphi^{\pm}(t_0, p). \tag{69}$$

La formule de Stokes appliquée à Γ_p^- (resp. Γ_p^+) et $t \quad \frac{1}{t-t_0} f \circ \Phi_p(t)$ ($t_0 \quad \Gamma_p^{\pm}$) donne

$$t_0 \quad \Gamma_p^{\pm},\ f_p^{\pm}(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \quad_{\Gamma_p^{\mp}} \frac{1}{t - t_0} \frac{\partial f \circ \Phi_p}{\partial \bar{t}}(t)\ d\bar{t} \quad dt. \tag{70}$$

Pour $\alpha \quad [0,1[$ fixé et $t_1, t_2 \quad \Gamma_p^{\pm}$, le fait que $\frac{t_2-t_1}{t-t_1 \quad t-t_2}^{1-\alpha}$ est majoré par le maximum de $\frac{2^{1-\alpha}}{t-t_1 \ ^{1+\alpha}}$ et $\frac{2^{1-\alpha}}{t-t_2 \ ^{1+\alpha}}$ entraîne que

$$\left|f_p^{\pm}(t_2) - f_p^{\pm}(t_1)\right| \leqslant C_\alpha \left\|f\right\|_{C^1} \quad t_2 - t_1 \ ^{\alpha} \tag{71}$$

où C_α est le maximum sur Δ de $t_0 \quad \frac{1}{\pi} \ _\Delta \ t - t_0 \ ^{-1-\alpha} \left|d\bar{t} \quad dt\right|$. Ceci prouve que $f_p^{\pm}$ se prolonge à $\overline{\Gamma^{\pm}}$ en une fonction de classe C^α. Il est alors classique que

$$f_p^+ - f_p^- = f \circ \Phi_p \quad sur \quad b\Gamma_p \tag{72}$$

Régularité de $\varphi^{\pm}$

La fonction $\varphi^{\pm} : (t_0, p) \quad f_p^{\pm}(t_0)$ est au moins définie sur $\Gamma^{\pm r} = \ _{p \ R} \Gamma_p^+ \times \ p$. Comme ∂f s'annule à l'ordre $m+1$ sur $b\Omega$, pour $\nu_1 \quad 0, ..., m$ on peut dériver ν_1 fois sous le signe d'intégration dans (70) puis intégrer ν_1 fois par parties et ainsi obtenir

$$(t_0, p) \quad \Gamma^{\pm r},\ \frac{\partial^{\nu_1} \varphi^{\pm}}{\partial t_0^{\nu_1}}(t_0, p) = \frac{1}{2\pi i} \quad_{\Gamma_p^{\mp}} \frac{1}{t - t_0} \frac{\partial^{\nu_1}}{\partial t^{\nu_1}} \frac{\partial f \circ \Phi_p}{\partial \bar{t}}(t)\ d\bar{t} \quad dt. \tag{73}$$

L'holomorphie de Φ_p entraîne que $\frac{\partial f \circ \Phi_p}{\partial \bar{t}} = (\overline{\partial}_M f)_{\Phi_p} . \overline{\Phi_p(t)}$. Puisque la forme F^+ (resp. F^-)

qui vaut $\overline{\partial}_M f$ sur $\overline{\Omega}$ (resp. sur $D \ \Omega$) et 0 sur $M \ \Omega$ (resp. sur Ω) appartient à $C_c^m(D)$, (70) peut se réécrire sous la forme

$$(t_0, p) \quad \Gamma^{\pm r}, \ \frac{\partial^{\nu_1}\varphi^{\pm}}{\partial t_0^{\nu_1}}(t_0, p) = \frac{1}{2\pi i} \ {}_{\mathbb{C}} \frac{1}{t - t_0} \frac{\partial^{\nu_1}}{\partial t^{\nu_1}} \ \left(F^{\pm}\right)_{\ \Phi_p} .\overline{\Phi_p(t)} \quad d\overline{t} \quad dt. \tag{74}$$

Avec cette identité, il apparaît que si $\nu_2 \quad 0, ..., m - \nu_1$, la fonction $\partial^{\nu_1}\varphi^{\pm}/\partial t_0^{\nu_1}$ est ν_2 fois continûment différentiable par rapport à p et que $\varphi^{\pm}_{\nu_1,\nu_2} = D_p^{\nu_2}\frac{\partial^{\nu_1}\varphi^{\pm}}{\partial t_0^{\nu_1}}$ est donnée pour tout $(t_0, p_0) \quad \Gamma^{\pm r}$ par la formule

$$\varphi^{\pm}_{\nu_1,\nu_2}(t_0, p_0) = \frac{1}{2\pi i} \ {}_{\mathbb{C}} \frac{1}{t - t_0} D_p^{\nu_2} \frac{\partial^{\nu_1}}{\partial t^{\nu_1}} \ \left(F^{\pm}\right)_{\ \Phi_p} .\overline{\Phi_p(t)} \ {}_{p=p_0} \ d\overline{t} \quad dt \tag{75}$$

Ainsi, $\varphi^{\pm}$ est de classe C^m sur $\Gamma^{\pm r}$.

Comme dans le paragraphe précédent, il résulte de (75) que pour tout $\alpha \quad [0, 1[$, tout $p_0 \quad R$ et tout $t_1, t_2 \quad \Gamma_p^{\pm}$

$$\left\|\varphi^{\pm}_{\nu_1,\nu_2}(t_2, p_0) - \varphi^{\pm}_{\nu_1,\nu_2}(t_1, p_0)\right\| \leqslant C_{\alpha,m} \left\|f\right\|_{C^{m+1}} \ t_2 - t_1 \ ^{\alpha} \tag{76}$$

où $C_{\alpha,m}$ ne dépend que de (α, m, Φ, D). Notons que la formule (75) prouve aussi que si $p_0, q_0 \quad R$ et $t_0 \quad \Gamma^{\pm}_{p_0} \setminus \Gamma^{\pm}_{q_0}$, alors

$$\left\|\varphi^{\pm}_{\nu_1,\nu_2}(t_0, p_0) - \varphi^{\pm}_{\nu_1,\nu_2}(t_0, q_0)\right\| \leqslant C_0 \ \omega^{\pm}_{F,\nu_1,\nu_2}(p_0, q_0) \tag{77}$$

où $\omega^{\pm}_{F,\nu_1,\nu_2}(p_0, q_0)$ est la borne supérieure sur Δ de $t \quad \left| \ D_p^{\nu_2}\frac{\partial^{\nu_1}}{\partial t^{\nu_1}}\left(\left(F^{\pm}\right)_{\ \Phi_p} .\overline{\Phi_p(t)}\right) \ {}_{p=p_0}^{p=q_0}\right|$.

Formule de saut dans toutes les fibres

Considérons des entiers ν_1 et ν_2 de somme m. Les majorations (76) et (77) prouvent que $\varphi^{\pm}_{\nu_1,\nu_2}$ est uniformément continue sur $\Gamma^{\pm r}$. Comme $P \ R$ est de mesure nulle, cette fonction se prolonge continûment à $\overline{\Gamma^{\pm r}} = \overline{{}_{p \ P}\Gamma_p^{+} \times \ p \ }$, c'est à dire à $\overline{\Phi^{-1}(\Omega)}$ pour $\varphi^{+}_{\nu_1,\nu_2}$ et à $(\mathbb{C} \times P) \ \Phi^{-1}(\Omega)$ pour $\varphi^{-}_{\nu_1,\nu_2}$. Autrement dit, φ^{+} se prolonge en une fonction de classe C^m sur $\overline{\Phi^{-1}(\Omega)}$ et φ^{-} se prolonge en une fonction de classe C^m sur $(\mathbb{C} \times P) \ \Phi^{-1}(\Omega)$. Naturellement, si pour tout point p on pose $f_p^{\pm} = \varphi^{\pm}(., p)$, la formule de saut (72) reste valable.

Condition des moments.

Pour un point p fixé dans R, la formule (69) montre que la nullité de f_p^{-} sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \ \Gamma_p$ se traduit par la condition des moments

$$n \quad \mathbb{N}, \quad {}_{\partial\Gamma_p} f\left(\Phi_p(t)\right) \ t^n \ dt = 0, \tag{78}$$

Φ_p étant un isomorphisme analytique de Δ_p sur D_p, (78) signifie l'annulation pour tout fonction entière h des intégrales ${}_{\partial\Gamma_p} f\left(\Phi_p(t)\right) \ h\left(\Phi_p(t)\right) \ d\Phi_p(t)$. Ainsi, (78) est équivalente à ce que

$$ {}_{\partial\Omega_p} fH = 0 \tag{79}$$

pour toute $(1, 0)$-forme H dont les coefficients sont des fonctions entières. Puisque $f\left|_{b\Omega_p}\right. = f$

et $dH = 0$ sur $G_p = \pi^{-1}(p) \setminus G$ (car G_p est une courbe complexe et $\overline{\partial} H = 0$), la formule de Stokes donne que

$$\underset{\partial\Omega_p}{} fH = \underset{\Omega_p}{} d(fH) = \underset{\Omega_p}{} (\overline{\partial}_M f) \quad H = \underset{G_p}{} F^+ \quad H$$

G_p étant une courbe complexe de $\mathbb{C}$ et M étant générique, le courant d'intégration $[G_p]$ est $\overline{\partial}$-fermé et admet une restriction $[G_p]_M$ à $M \setminus G$ qui est une $(n-1, k-1)$-forme $\overline{\partial}_M$-fermée dont les coefficients sont des distributions sur $M \setminus G$; la $(n, k-1)$-forme $T = H \quad [G_p]_M$ est donc un courant $\overline{\partial}_M$-fermé de $M \setminus G$. On sait d'après un résultat de Trèves [68, th. 4.1 p. 69] que si G est suffisamment petit, $M \setminus G$ contient un voisinage ouvert ω de 0 dans M tel que la restriction à G de tout courant $\overline{\partial}_M$-fermé de $M \setminus D$ est limite au sens des courants sur ω de forme $\overline{\partial}_M$-exactes de classe C . En fait, la preuve de Trèves est aussi valable dans les espaces de formes dont les coefficients sont des distributions d'ordre fixé. En particulier, on peut trouver dans $C_{n,k-2}(M)$ une suite (u_j) telle que $\overline{\partial}_M u_j$ converge vers $T \;_\omega$ au sens des distributions sur ω d'ordre m. Puisque $Supp\ F \subset\subset M \setminus D \subset\subset M \setminus G$, on obtient que si G est choisi a priori dans ω, alors

$$\underset{\partial\Omega_p}{} fH = \quad F^+ \quad T \;_\omega = \lim_{j \quad +} \underset{\omega}{} F \quad \overline{\partial}_M u_j = - \lim_{j \quad +} \underset{\omega}{} \overline{\partial}_M F \quad u_j = 0$$

puisque $\overline{\partial}_M F = 0$. Ceci prouve que si $p \quad R$, $f_p^- = 0$ sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \quad \Gamma_p$, identité qui demeure même si $p \quad P \;\; R$ car φ^- est continue.

Prolongement CR de f à Ω.

Si $p \quad P$, on pose $\Omega_p^+ = \Omega_p = \Omega \setminus D_p$ et $\Omega_p^- = D_p \;\; \overline{\Omega_p}$. On pose aussi $\Omega^\pm = \Phi(\Gamma^\pm)$ de sorte que $\Omega^+ = \Omega$ et $\Omega^- = (M \setminus D) \;\; \overline{\Omega}$. On définit sur $\Omega^\pm$ une fonction $f^\pm$ par la formule

$$f^\pm(z) = f^\pm_{\pi(z)}\left(\Phi^{-1}_{\pi(z)}(z)\right). \tag{80}$$

Ce qui précède montre que $f^\pm$ est de classe C^m sur $\overline{\Omega^\pm}$, que $f = f^+ - f^-$ sur $b\Omega$ et que pour tout $p \quad P$ la restriction de $f^\pm$ à $\Omega_p^\pm$ est holomorphe et f^- est nulle sur la composante connexe $\Omega^-_{p,1}$ de Ω_p^- non relativement compacte dans D_p ; notons que Ω_p^- ne contient effectivement qu'une composante de ce type car D_p est simplement connexe.

Le fait que le bord de Ω puisse être déconnecté dans les fibres nous amène à classer l'ensemble $\mathcal{C}_p^\pm$ des composantes connexes de $\Omega_p^\pm$ par ordre croissant d'éloignement par rapport au bord de $\Omega^-_{p,1}$; plus précisément, on se donne des partitions $\left(\mathcal{C}^+_{p,j}\right)_{J_p^+}$ et $\left(\mathcal{C}^-_{p,j}\right)_{j \;\; J_p^-}$ de $\mathcal{C}_p^+$ et $\mathcal{C}_p^-$ ayant les propriétés suivantes :

1. $J^\pm$ est de de la forme $\mathbb{N} \setminus \left[1, b_p^\pm\right[$ avec $b_p^\pm \quad]1, + \quad]$.
2. $\mathcal{C}^-_{p,1} = \left\{\Omega^-_{p,1}\right\}$ et $\mathcal{C}^+_{p,1}$ ne contient que l'unique composante connexe $\Omega^+_{p,1}$ de Ω_p dont le bord rencontre celui de $b\Omega_1^-$.
3. Si $j \quad J_p^+$ (resp. $j \quad J_p^-$) et $j \geqslant 2$, $\mathcal{C}^+_{p,j}$ (resp. $\mathcal{C}^-_{p,j}$), est l'ensemble des éléments C de $\mathcal{C}_p^+$ (resp. $\mathcal{C}_p^-$) pour lesquels il existe un élément C de $\mathcal{C}^-_{p,j-1}$ (resp. $\mathcal{C}^+_{p,j-1}$) tel que C est

contenu dans le domaine obtenu en rajoutant à C les composantes de D_p C qui sont relativement compactes dans D_p (ce qui revient à demander que bC est relativement compact dans C).

Si j $\mathbb{N}$, pour tout p P on pose alors

$$\Omega^{\pm}_{p,j} = \left| \begin{array}{l} C \quad si \ \ j \quad J_p^{\pm} \\ C \ \ C^{+}_{p,j} \\ \quad si \ j \quad \mathbb{N} \ \ J_p^{\pm} \end{array} \right. , \ M^{+}_{p,j} = b\Omega^{+}_{p,j} \setminus b\Omega^{-}_{p,j} \ , \ M^{-}_{p,j} = b\Omega^{+}_{p,j} \setminus b\Omega^{-}_{p,j+1},$$

où les bords considérés sont bien sûr les bords relatifs à la fibre correspondante. On pose aussi

$$\Omega^{\pm}_{j} = \ _{p \ \ P}\Omega^{\pm}_{p,j} \ , \quad M^{+}_{j} = \ _{p \ \ P}M^{+}_{p,j}, \quad M^{-}_{j} = \ _{p \ \ P}M^{-}_{p,j} \ ;$$

notons que $M^{-}_{j} = M^{+}_{j+1}$. On désigne enfin par $\Omega^{\pm r}_{p,j}$, $\Omega^{\pm r}_{j}$, $M^{\pm r}_{j}$ les ensembles définis par les formules plus haut lorsque P est remplacé par R.

Par construction, f^{+} est de classe C^{m} sur Ω^{+r}_{1} et holomorphe sur chacune des fibres $\Omega^{+r}_{p,1}$ de Ω^{+r}_{1}. Puisque $f^{-} = 0$ sur $\Omega^{-}_{p,1}$ pour tout p P, $f^{+} = f$ sur M^{+r}_{1}. Soit z Ω^{+r}_{1} et $p = \pi(z)$. Etant donné que p R, on peut sélectionner dans $M^{+r}_{p,1}$ un point z_0 au voisinage duquel M^{+r}_{1} est lisse ; $M^{+r}_{p,1}$ est donc au voisinage de z_0 une sous-variété CR générique de $\mathbb{C}^n$. L'ouvert $\Omega^{+}_{p,1}$ étant connexe, on peut sélectionner dans Ω_p un ouvert contractile $V_{z,p}$ tel que $\overline{V_{z,p}} \setminus M$ est lisse. Pour q dans un voisinage A suffisamment petit de p, $V_{z,p}$ se déforme en un ouvert $V_{z,q}$ de Ω_q lui aussi contractile. Si $V_z = \ _{q \ \ A}V_{z,q}$, on peut donc appliquer le lemme 6 de [32] à $\Omega^{+}_{1} \setminus V_z$ et à $M^{+}_{1} \setminus V_z$ et obtenir que f^{+} est CR sur $\Omega^{+}_{1} \setminus V_z$ et donc au voisinage de z. En fin de compte, f^{+} est CR sur Ω^{+r}_{1}. Or f^{+} est de classe au moins C^{1} sur Ω et Ω^{+}_{1} Ω^{+r}_{1} est de mesure nulle, par conséquent f^{+} est CR sur Ω^{+}_{1}. Puisque f^{+} est de classe C^{m} sur $\overline{\Omega^{+}_{1}}$, on en déduit que la restriction de f^{+} à M^{-}_{1} est une fonction CR de classe C^{m}. Il en est donc de même de f^{-} car $f^{-} = f - f^{+}$ sur $b\Omega$ et $b\Omega \supset M^{-}_{1}$.

Le raisonnement fait pour f^{+} et M^{+}_{1} pouvant être recommencé pour f^{-} et M^{-}_{1}, on obtient que f^{-} est CR sur Ω^{-}_{1}. A l'aide d'une récurrence, on prouve ainsi que f^{+} est CR sur Ω tandis que f^{-} est CR sur D $\overline{\Omega}$. Etant donné que (Ω, D) est CR-lié et que d'après [68] le support d'une distribution CR est une réunion d'orbites de champs CR, la nullité de f^{-} sur $_{p \ \ P}\Omega^{-}_{p,1}$ et donc au voisinage de bD, force la nullité de f^{-} sur M $\overline{\Omega}$. Ainsi, $f^{-} = 0$ et $f^{+} = f$ sur $b\Omega$; f^{+} devient un prolongement CR de f à Ω. Le théorème C est donc prouvé.

6 Exemples, contre-exemples et questions

6.1 Sur la condition de taille

Cette condition est intervenue trois fois au cours de la preuve du th. A et donc de celle du th. D. Elle est tout d'abord utilisée par le biais du th. 2 pour obtenir une résolution de $\overline{\partial}_M$ en bidegré maximal (th. 1) puis elle sert de nouveau (th. 11 et prop. 12) pour l'approximation des

$(n, k-1)$-formes $\overline{\partial}_M$-fermées par des formes $\overline{\partial}_M$-exactes, ce qui avec le th. 2 donne la nullité de

$$H^{\mathcal{B},c}_{0,1}\left(\overline{\Gamma}\right) \overset{déf}{=} C^{\omega}_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right) \;/\; \overline{\partial}_M \;\; C^{\omega}_{n,k-1}\left(\overline{\Gamma}\right) \qquad \mathcal{B}_{0,1}\left(\overline{\Gamma}\right) / \overline{\partial}\mathcal{B}\left(\overline{\Gamma}\right),$$

et donc une résolution du problème (4) au sens des hyperfonctions. Enfin, le lemme 15 qui permet d'obtenir un contrôle sur le support des hyperfonctions CR ainsi qu'un principe de Hartogs affaibli (th. 16) et en fin de compte d'appliquer le théorème E qui est la clé de la fin de preuve du théorème A, est lui aussi tributaire d'une condition de taille.

L'exemple de la variété $\mathcal{N}_0 = \left\{z \quad \mathbb{C}^3 \;;\; z_1{}^2 + z_2{}^2 = 1 + z_3{}^2\right\}$ que nous avons citée dans l'introduction montre que même pour une variété 1-concave, une condition de taille est en général nécessaire à la validité du principe de Hartogs mais cette condition est-elle nécessaire à chacune des trois étapes mentionnées plus haut ?

Celle-ci est très probablement nécessaire dès la première étape (th. 1) mais nous n'avons pas trouvé de référence le confirmant. Notons que si M est 1-concave et n'a pas de composante connexe compacte, Laurent-Thiébaut et Leiterer [42] ont établi que toute forme sur M de degré maximal de classe C est en fait $\overline{\partial}_M$-exacte. Ceci plaide en faveur de l'inutilité de la condition de taille dans le th. 1 pour les variétés 1-concaves.

Si le point précédent devait être avéré, cela ne ferait que mettre en évidence l'importance de la condition de taille dans la seconde étape, c'est à dire dans le th. 11 et la prop. 12. Dans le cas de $\mathcal{N}_0$, il apparaîtrait que la seule obstruction au phénomène de Hartogs pour un domaine Γ de $\mathcal{N}_0$ est l'impossibilité d'approcher les $(n, k-1)$-formes $\overline{\partial}_{\mathcal{N}_0}$-fermées par des $(n, k-2)$-formes $\overline{\partial}_{\mathcal{N}_0}$-exactes, impossibilité qui serait alors équivalente à la non nullité de $H^{\mathcal{B},c}_{0,1}\left(\overline{\Gamma}\right)$.

Notons que pour $\Gamma = \quad z \quad \mathcal{N}_0 \;;\; z_3 \; < 1$, l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de $b\Gamma$ et non prolongeables en fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\Gamma}$ ainsi que l'espace $H^{\mathcal{B},c}_{0,1}\left(\overline{\Gamma}\right)$ ne sont pas seulement non triviaux, il sont de dimension infinie ! Pour le voir il suffit de sélectionner une fonction $\chi \quad C_c \;\; (\mathbb{C}^n)$ valant 1 au voisinage de $b\Gamma$ et 0 au voisinage de $\;z_3 = 0 \;\; \setminus \mathcal{N}_0$ et de considérer pour $m \quad \mathbb{N}^*$ les formes définies sur $\overline{\Gamma}$ par $g_m(z) = z_3^{-m}\left(\overline{\partial}_{\mathcal{N}_0}\chi\right)_{\;z}$; elles constituent une famille de libre de $C^{\omega}_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)$. Si pour $m \quad \mathbb{N}^*$, il existait une hyperfonction u à support compact telle que $\overline{\partial}_{\mathcal{N}_0} u = g_m$, $v = u - g_m$ serait une hyperfonction CR prolongeant $z_3 \qquad z_3^{-m}$ à Γ ; $\mathcal{N}_0$ étant 1-concave, v serait en fait réelle analytique et identiquement égale à $z \qquad z_3^{-m}$ sur $\overline{\Gamma} \quad z_3 = 0$, ce qui est incompatible avec le principe du maximum.

La troisième étape ou le théorème D, ce qui revient au même, ne nécessite aucune condition de taille si M est 1-concave car dans ce cas, une hyperfonction CR est réelle analytique. Lorsque M est une hypersurface, ceci est une conséquence du phénomène de Kneser-Lewy et d'un résultat de Polking et Wells [53] qui montre qu'une hyperfonction CR est localement le saut entre deux fonctions holomorphes. En codimension arbitraire, ceci est une conséquence de [57] d'après [65, prop. 2.1.7]. Dans le cas général, une condition de taille dans le th. D semble nécessaire car comme le laisse fortement penser [67], les ensembles analytiques le long des quels la régularité d'une hyperfonction CR se propage, peuvent, dans une situation globale, former des parties relativement compactes. Il serait intéressant d'avoir un exemple explicite de ce phénomène.

6.2 Un exemple de confinement CR

Considérons dans $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^\ell = \mathbb{C}^n$ $(k \geqslant 2,\ \ell \geqslant 1)$ muni des coordonnées (z, w) la sous-variété $M = \quad \operatorname{Im} w = 0 \quad$ et le domaine

$$\Omega = M \setminus [B_{\mathbb{C}^n}(0,3) \quad B_{\mathbb{C}^n}(0,2)] \setminus \quad \operatorname{Re} w_1 > 0 \quad ;$$

ce domaine n'est même pas C^1 mais il n'y a aucune difficulté à l'adapter pour obtenir un exemple avec un bord réel analytique. Les fonctions CR sur M sont les fonctions holomorphes par rapport à z et quelconques par rapport à w. Considérons $T = M \setminus \overline{B_{\mathbb{C}^n}(0,2)} \setminus \quad \operatorname{Re} w_1 > 0 \quad ,$ $E = M \quad (\Omega \quad T)$ et $\chi \qquad C \quad (\mathbb{R})$ telle que $\chi = 0$ sur $\mathbb{R}_-$ et $\chi > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Notons f la fonction définie sur E par $f(z, w) = 0$ et sur T par $f(z, w) = \chi(\operatorname{Re} w_1)$. Puisque f est de classe C sur $M \quad \overline{\Omega}$ et que toutes les dérivées de f se prolongent continûment à $b\Omega$, f admet un prolongement C à M grâce à un théorème de Whitney. Comme f est CR sur $M \quad \overline{\Omega}$, ce prolongement F annule l'opérateur $\overline{\partial}_M$ à un ordre infini sur $b\Omega$ de sorte $f \quad _{b\Omega}$ est CR de classe C . Pourtant, f n'admet pas de prolongement CR à $\overline{\Omega}$ car si un tel prolongement f existait, pour $a = (1, 0, ...0)$ la fonction $f(., a)$ serait holomorphe sur $B_{\mathbb{C}^\ell}\left(0, 2 \quad \overline{2}\right)$, nulle sur $bB_{\mathbb{C}^\ell}\left(0, 2 \quad \overline{2}\right)$ et donc identiquement nulle alors que $f(., a) = 0$ sur $bB_{\mathbb{C}^\ell}\left(0, \quad \overline{3}\right)$.

Dans cet exemple, $f_{M \quad \overline{\Omega}}$ présente la pathologie d'être une fonction CR dont le support dans $M \quad \overline{\Omega}$ est une partie relativement compacte de $M \quad \Omega$; on remarque aussi qu'aucun point de T ne peut être relié dans $M \quad \overline{\Omega}$ à un point de $\overset{\circ}{E}$ par un chemin CR, c'est à dire par un chemin dérivable $\gamma : [0, 1] \qquad M \quad \Omega$ tel que $\overset{\bullet}{\gamma} \qquad T^c_\gamma M$. En fait, ces deux pathologies sont liées puisque d'après Trèves [68], le complémentaire du support d'une distribution CR est une réunion d'orbites de champs CR. C'est cette remarque qui a motivé la notion de CR-confinement. Notre conjecture affirme que le non confinement CR est une condition suffisante pour que le phénomène de Hartogs-Severi-Bochner se produise.

Notons que d'après le théorème A, cette notion n'est pas pertinente pour le principe de Hartogs. Cet exemple illustre bien ce fait car dans cette situation, on peut appliquer le théorème de Hartogs dans les tranches $\operatorname{Re} w = Cte$ aux domaines $M \setminus B_{\mathbb{C}^n}(0,3) \setminus \quad \operatorname{Re} w = Cte$ et constater, compte tenu du principe de l'unicité du prolongement analytique et de la connexité de $b\Omega$, que le phénomène de Hartogs se produit pour Ω.

6.3 Absence de phénomène de Hartogs-Severi-Bochner en une dimension CR

A la différence du théorème A, la dimension CR de M doit être au moins deux pour que le phénomène de Hartogs-Severi-Bochner se produise. Ceci résulte essentiellement du fait que si $\dim_{CR} M = 1$ le bord d'un domaine Ω de M est génériquement totalement réel et que la condition d'être CR sur $b\Omega$ devient génériquement vide.

Nous nous bornerons à donner un exemple pour $M = \mathbb{C}\times\mathbb{R}$ et $\Omega = \{z \quad M\ ;\ \ z_1{}^2 + x_2^2 < 4\}$. Soit $\varphi \quad C \quad (\mathbb{C})$ une fonction holomorphe sur $D(0,1)$ et considérons les fonctions $F : z \quad \varphi(z_1)$ et $f = F \ {}_{b\Omega}$. Si z est un point de $b\Omega$ tel que $z_1 = 0$, $b\Omega$ est une sous variété totalement réelle de $\mathbb{C}^2$; f étant de classe C , elle est au voisinage de z la restriction à $b\Omega$ d'une fonction f de classe C telle que $\overline{\partial} f = 0$ à l'ordre infini sur $b\Omega$ (voir [35] ou [4] par exemple). Si $z \quad b\Omega$ et $z_1 = 0$, alors f est au voisinage de z la restriction à $b\Omega$ d'une fonction holomorphe. Ainsi f est une fonction CR de classe C sur $b\Omega$. Pourtant, f n'admet pas nécessairement de prolongement à Ω en fonction CR de classe C car sinon $\varphi\big|_{D(0,1)}$ aurait un prolongement holomorphe à $D(0,2)$ ce qui bien sûr n'est pas vrai en général.

6.4 Caractérisation des variétés nulle part strictement pseudoconvexes

Soit M une sous-variété réelle analytique de $\mathbb{C}^n$. Nous savons d'après [62] que si M est non-signée, une fonction f de classe C^3 et CR respecte le principe du maximum, c'est à dire vérifie $\max\limits_K\ f \ \leqslant\ \max\limits_{bK}\ f$ pour tout compact K de M. Puisque d'après [9] une fonction CR continue peut être localement approchée de façon arbitraire par des polynômes holomorphes, le principe du maximum pour les fonctions CR de classe C^3 est vérifié lorsqu'il l'est par les fonctions CR d'une classe C^m donnée, $m \quad \mathbb{N} \qquad ,\omega$. Inversement, si M est strictement pseudoconvexe au voisinage d'un point (i.e. contenue localement dans le bord d'un domaine strictement pseudoconvexe), le résultat de Rossi [55] sur l'existence de fonctions pics montre que le principe du maximum n'est pas vérifié. Ainsi, pour tout $m \quad \mathbb{N} \qquad ,\omega$, les propriétés suivantes sont équivalentes

1. M est nulle part strictement pseudoconvexe.
2. Les fonctions CR de classe C^m vérifient le principe du maximum.

Dans le cas de $\mathbb{C}^n$, le principe du maximum est parfois présenté comme étant le fait qu'une fonction holomorphe ayant un maximum local au voisinage d'un point donnée est constante au voisinage de ce point. Ceci peut devenir faux même dans une variété levi-plate très simple (voir [11]). Cependant (2), et donc (1), est équivalente à l'assertion suivante (voir [62] et [10]) :

3. Une fonction CR continue qui admet un maximum local strict en un point donné est constante au voisinage de ce point.

Un cas particulier d'un résultat de Cordaro et Trépreau [16, th. 2.7] montre que si le principe du maximum n'est pas vrai pour les fonctions CR d'un ouvert relativement compact Γ de M, alors l'opérateur $\overline{\partial}_M : \mathcal{B}_{n,k-1}(\Gamma) \quad \mathcal{B}_{n,k}(\Gamma)$ n'est pas surjectif. Nous pensons que la réciproque, cas particulier dans le cadre CR d'une question posée par Cordaro et Trépreau [16, p. 54], est vraie ; (1) serait alors équivalente à l'assertion suivante :

4. Pour tout domaine Γ relativement compact dans M, l'opérateur $\overline{\partial}_M : \mathcal{B}_{n,k-1}(\Gamma)$ $\mathcal{B}_{n,k}(\Gamma)$ est surjectif.

Notons que si (1) est vérifiée, la conclusion du théorème 1 est que l'assertion

5. Pour tout domaine Γ de M qui est la trace sur d'un ouvert suffisamment petit G de $\mathbb{C}^n$ tel que $\overline{G}$ a une base de voisinages pseudoconvexes, l'opérateur $\overline{\partial}_M : C^{\omega}_{n,k-1}\left(\overline{\Gamma}\right)$ $C^{\omega}_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)$ est surjectif.

est vraie. La réciproque (5) = (1) est vraie. Dans le cas d'une hypersurface cela résulte du fait que l'argument de [7] qui est donné dans un cadre C est valable pour le cas réel analytique et dans le cas général, une adaptation de [3, th. I] permet de déduire le cas général du celui des hypersurfaces. Ceci étant, il est très naturel de se demander si l'assertion

6. Pour tout domaine Γ de M qui est la trace sur d'un ouvert suffisamment petit G de $\mathbb{C}^n$ tel que $\overline{G}$ a une base de voisinages pseudoconvexes, l'opérateur $\overline{\partial}_M : C_{n,k-1}\left(\overline{\Gamma}\right)$ $C_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)$ est surjectif.

est aussi une conséquence de (1).

La preuve du th. 3 de [4] montre que (6) entraîne (1). L'équivalence éventuelle entre (6) et (1) est en fait un problème difficile posé par Trépreau et qui, même pour une hypersurface, est ouvert. Une réponse positive à ce problème permettrait d'aborder le phénomène de Hartogs-Severi-Bochner dans une variété lisse. Plus précisément, il suffirait que la résolution de ce problème prouve, lorsque M est non-signée, l'existence de d $\mathbb{N}^*$ et d'un opérateur continu $R : C^{d}_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)$ $C^{1}_{n,k-1}\left(\overline{\Gamma}\right)$ tel que $\overline{\partial}_M \circ R = Id$ et $R\left(C^{d+m}_{n,k}\left(\overline{\Gamma}\right)\right) \subset C^{m+1}_{n,k-1}\left(\overline{\Gamma}\right)$ pour tout m $\mathbb{N}$, pour obtenir un principe de Hartogs-Severi-Bochner pour les domaines Γ suffisamment petits et non CR-confinés.

Le tableau ci-dessous résume la discussion de cette section :

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad (5)$$
$$(4) = \quad (1)$$
$$(6) = \quad (1)$$

Références

[1] R.A. Airapetyan et G.M. Henkin, *Analytic continuation of CR-functions across the "edge of the wedge"*, Soviet Math. Dokl. **24** (1981), no. 1, 128–132.

[2] ———, *Integral representations of differential forms on Cauchy-Riemann manifolds and the theory of CR-functions*, Uspekhi Mat. Nauk **39** (1984), no. 3, 39–106.

[3] ———, *Integral representations of differential forms on Cauchy-Riemann manifolds and the theory of CR-functions. II.*, Math. USSR Sbornik **55** (1986), no. 1, 91–110.

[4] A. Andreotti, G. Fredricks, et M. Nacinovich, *On the absence of Poincaré lemma in tangential Cauchy-Riemann complexes.*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (S. IV) **8** (1980), no. 3, 365–404.

[5] A. Andreotti et H. Grauert, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 193–259.

[6] A. Andreotti et C.D. Hill, *Complex characteristic coordinates and tangential Cauchy-Riemann equations.*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **3** (1972), 299–324.

[7] ———, *E. E. Levi convexity and the Hans Lewy problem. part I and II*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa **26 et 28** (1972), no. 2 et 4, 325–363 et 747–806.

[8] A. Andreotti et Nacinovich M., *Analytic convexity*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **7** (1980), no. 4, 233–372.

[9] M. S. Baouendi et Trèves F., *A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields*, Ann. of Math. **113** (1981), no. 2, 387–421.

[10] S. Berhanu, *Liouville's theorem and the maximum modulus principle for a system of complex vector fields*, Comm. Partial Differential Equations **19** (1994), no. 11-12, 1805–1827.

[11] ———, *On extreme points and the strong maximum principle for CR functions*, Multidimensional complex analysis and partial differential equations (São Carlos, 1995) (Providence, RI) (Cordaro P.D et Jacobwitz H., eds.), Contemp. Math., no. 205, Amer. Math. Soc., 1997, pp. 1–13.

[12] S. Bernstein, *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné*, Acad. Royale de Belgique, classe des sciences, Mémoires Collection **4** (1912), 1–103.

[13] S. Bochner, *Analytic and meromorphic continuation by means of Greens formula*, Ann. of Math **44** (1943), no. 2, 652–673.

[14] ———, *Partial differential equations and analytic continuations*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **38** (1952), 227–230.

[15] A. B. Brown, *On certain analytic continuations and analytic homeomorphisms*, Duke Math. J (1936), no. 2, 20–28.

[16] P.D. Cordaro et J.-M. Trépreau, *On the solvability of linear partial differential equations in spaces of hyperfunctions*, Ark. Mat. **36** (1998), no. 1, 41–71.

[17] P.D. Cordaro et F. Trèves, *Hyperfunctions on hypo-analytic manifolds*, Annals of Mathematics Studies, no. 136, Princeton Univ. Press., Princeton, NJ, 1994.

[18] L. Ehrenpreis, *A new proof and an extension of Hartogs theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 507–509.

[19] G. Fichera, *Caratterizzazione della traccia, sulla frontiera di un campo, di una funzione analitica di piu variabili complesse*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **VIII ser. 22** (1957), 706–715.

[20] ———, *The Severi and Severi-Kneser theorems for analytic functions of several complex variables and their further developments*, Conf. Semin. Mat. Univ. Bari **237-244** (1991), 13–25.

[21] G. B. Folland et J. J. Kohn, *The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex*, Princetown University Press, 1972.

[22] M. Freeman, *Local complex foliation of real submanifolds*, Math. Ann. **209** (1974), 1–30.

[23] R Fueter, *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen* $\Delta u = 0$ *und* $\Delta\Delta u = 0$ *mit vier reellen Variablen*, Comment. Math. Helv. **7** (1935), 307–330.

[24] R. Fueter, *über einen hartogsschen Satz*, Comment. Math. Helv. **12** (1939), 75–80.

[25] ———, *über einen Hartogsschen Satz in der Theorie der analytischen Funktionen von n komplexen Variablen*, Comment. Math. Helv. **14** (1942), 394–400.

[26] F. Hartogs, *Einige Folgerungen aus der Cauchy schen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen*, Sitz. Ber. Math.-Phys. Kl. KÔnigl. Bayer. Akad. Wiss **36** (1906), 223–292.

[27] ———, *über die Bedingungen unter welchen eine analaytishe Funkyion mehrerer Veränderlichen sich wie eine rationale verhält*, Math. Ann. **70** (1911), 207–22.

[28] F. R. Harvey et H. B. Lawson, *Boundaries of complex analytic varieties*, Ann. of Math. **102** (1975), 233–290.

[29] G.M. Henkin, *Analytic representation for CR-functions on submanifolds of codimension* 2 *in* c^n, Lecture Notes in Math., 798, vol. 798, pp. 169–191, Springer, Berlin, 1980.

[30] ———, *The Hartogs-Bochner effect on CR-manifolds*, Soviet Math. Dokl. **29** (1984), no. 1, 78–82.

[31] G.M Henkin et J. Leiterer, *Andreotti and Grauert theory by integral formulas*, Monographs in Math., Birkhäuser Verlag, 1990.

[32] G.M Henkin et A.E. Tumanov, *Local characterization of holomorphie automorphisms of siegel domains*, Funct. Anal. Appl. **17** (1983), 285–294.

[33] C.D. Hill et M. Nacinovich, *Pseudoconcave CR manifolds*, Complex Analysis and Geometry (Trento, 1993), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 173, Dekker, New York, 1996, pp. 275–297.

[34] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential equation, I*, Grundlehren der mathesmaticshen Wissenschaften, vol. 275, Spinger-Verlag, 1985.

[35] L. Hörmander et J. Wermer, *Uniform approximation on compact sets in* $\mathbb{C}^n$*.*, Math. Scand. **23** (1969), 5–21.

[36] C. Houzel, *D'une variable à plusieurs variables complexes : les fonctions abéliennes*, Géométrie complexe (Paris, 1992) (Paris), Hermann, 1996, pp. 271–281.

[37] A. Hurwitz, *Über die Entwickelung der allgemeinen theorie der analytishen Funktionnen in neuerer Zeit*, Proc. 1st International Congress of Mathematicians (Zurich, 1897) (Leipzig), 1898, pp. 91–112.

[38] J. Kajiwara et Sakai E., *Generalization of Levi-Oka's theorem concerning meromorphic functions*, Nagoya Math. J. **29** (1967), 75–84.

[39] A. Kaneko, *Introduction to hyperfunctions*, Mathematics and its application, Kluwer Academic Publisher, 1988.

[40] H. Kneser, *Die Randwerte einer analytischen Funktion zweier Veränderlicher*, Monats. f. Math. u. Phys **43** (1936), 364–380.

[41] C. Laurent-Thiébaut, *Resolution du* $\overline{\partial}$ *à support compact et phénomène de Hartogs-Bochner dans les varietes CR*, Proc. Symp. Pure Math. **52** (1991), no. 3, 239–249.

[42] C. Laurent-Thiébaut et J. Leiterer, *Malgrange's vanishing theorem in 1-concave CR manifolds*, Nagoya Math. J. **157** (2000), 59–72.

[43] E.E. Levi, *Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due 0 piu variabli complesse*, Annali di Math **17** (1910), no. 3, 61–87.

[44] H. Lewy, *On the relations governing the boundary values of analytic functions of two complex variables*, Commun. Pure Appl. Math. **9** (1956), 295–297.

[45] A.M. Lyapounoff, *Sur quelques questions attachées au problème de Dirichlet*, J. Math. Pure Appl. **ser. 5** (1898), no. 4, 241–311.

[46] E. Martinelli, *Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di piu variabili complesse*, Mem. della R. Accad. Italia **9** (1938), 269–283.

[47] ______, *Sopra una dimonstrazione di R. Fueter per un teorema di Hartogs*, Comment. Math. Helv. **15** (1943), 340–349.

[48] V. Michel, *Résolution locale du $\overline{\partial}$ avec régularité gevrey au bord d'un domaine r-convexe*, Math. Z. **218** (1995), 305–317.

[49] Gr.C. Moisil, *Sur les quaternions monogènes*, Bull. Sci. Math., II. Ser. **55** (1931), 168–174.

[50] I. Naruki, *Localization principle for differential complexes and its applications*, Publ. Res. Inst. Math. Sc. Kyoto Univ **8** (1972), 43–110.

[51] W. F. Osgood, *Lehrbuch der funktionentheorie*, vol. Band II, Teubner, Leipzig, 1929.

[52] H. Poincaré, *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme*, Rend. Circ. Mat. Palermo **23** (1907), 158–220.

[53] J.C. Polking et R.O.Jr. Wells, *Hyperfunction boundary values and a generalized Bochner-Hartogs theorem*, Several complex variables (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXX, Part 1, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1975) (Providence, R. I.), Amer. Math. Soc., 1977, pp. 187–193.

[54] R.M. Range, *Extension phenomena in multidimensional complexe analysis : correction of the historical record*, Math. Intell. **24** (2002), no. 2, 4–12.

[55] H. Rossi, *Holomorphically convex sets in several complex variables*, Ann. of Math **2** (1961), 470–493.

[56] ______, *Differentiable manifolds in complex euclidean space*, Proc. Internat. Congr. Math. (Moscow, 1966) (Moscou), Izdat. "Mir", 1968, pp. 512–516.

[57] M. Sato, T. Kawai, et M. Kashiwara, *Microfunctions and pseudo-differential equations*, Hyperfunctions and pseudo-differential equations (Proc. Conf., Katata, 1971 ; dedicated to the memory of André Martineau) (Berlin), vol. 287, Lecture Notes in Math., no. 287, Springer, 1973, pp. 256–529.

[58] J.-P. Serre, *Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de stein*, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, tenu à Bruxelles (Liège) (Masson et Cie, ed.), Georges Thone, 1953, pp. 57–68.

[59] F. Severi, *Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche*, Atti Accad. Naz. Lincei, VI. Ser. 8 **13** (1931), 795–804.

[60] ______, *Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse*, Rend. Semin. Mat. Roma **II. Ser. 7** (1932), 1–58.

[61] ______, *Una proprieta fondamentale dei campi di olomorfismo di una funzione analitica di una variabile reale e di una variabile complessa*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. **VI** (1932), no. 15, 487–490.

[62] N. Sibony, *Principe du maximum sur une variete CR et equations de Monge-Ampère complexes*, Seininaire P. Lelong (Analyse) **16ème année** (1975/76), 14–27.

[63] F. Sommer, *Komplex-analytische Bläterung reeler Hyperflächen im c^n*, Math. Ann. **137** (1959), 392–411.

[64] D. Struppa, *The first eighty years of Hartogs' theorem*, Geometry Seminars, 1987-1988 (Bologna), Univ. Stud. Bologna, 1988, pp. 127–209.

[65] S. Tajima, *Analyse microlocale sur les variétés de cauchy-riemann et problème du prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **18** (1982), 911–945.

[66] G. Tomassini, *Tracce delle funzioni olomorfe sulle sottovarita analitiche reali d'una varieta complessa*, Ann. Sculoa Norm. Sup. Pisa **20** (1966), 31–43.

[67] J.-M. Trépreau, *On the extension of holomorphic functions across a real hypersurface*, Math. Z. **211** (1992), no. 1, 93–103.

[68] F. Trèves, *Approximation and representation of functions and distributions annihilated by a system of complex vector fields*, 1981.

[69] A. Tumanov, *Foliations by complexe curves and the geometry of real surfaces of finite type*, Math. Z. **240** (2002), 385–388.

[70] Wirtinger W., *Zur formalen Theorie der Funktionen von mehreren komplexen Veranderlicher*, Math. Ann. **97** (1926), 357–375.