Problème inverse pour la conductivité en dimension deux

Vincent Michel

Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75252 Paris cedex

17 juin 2016 ; 14 juin 2019

Résumé

Cet article propose un procédé de reconstruction d'une surface de Riemann à bord couplé à un tenseur de conductivité à partir de son bord et de l'opérateur de Dirichlet-Neumann associé à cette conductivité. Lorsque la donnée de départ provient d'une surface riemannienne réelle de dimension deux équipée d'un tenseur de conductivité, ce procédé restitue l'intégralité de la structure de conductivité.

Abstact

In this article, we introduce a process to reconstruct a Riemann surface with boundary equipped with a linked conductivity tensor from its boundary and the Dirichlet-Neumann operator associated to this conductivity. When initial data comes from a two dimensional real Riemannian surface equipped with a conductivity tensor, this process recovers its conductivity structure.

Dédicace

En janvier 2016 décédait mon ami Gennadi Henkin avec qui j'ai travaillé pendant plus de quinze ans. Ce travail qui revient sur un sujet qu'il avait apporté lui est dédié. Par les nombreuses citations d'articles où il figure en tant qu'auteur, le lecteur pourra constater la profondeur de la pensée mathématique de Gennadi.

Mots clés : surface de Riemann, problème de Dirichlet-Neumann, fonction de Green, conductivité, onde de choc, plongement.
Key words : Riemann surface, Dirichlet-to-Neumann problem, Green function, conductivity, shock wave, embedding.
Classification AMS : Primaire, 32c25, 32d15, 32v15, 35r30, 58j32 secondaire 35r30

Table des matières

Cet article est organisé de la manière suivante. La section 1 propose un historique bref et non exhaustif du sujet te la section 2 contient certains de nos principaux résultats. La section 3 a pour but de préciser des définitions et des notations concernant les structures de conductivité mais aussi d'énoncer des résultats qui, bien que pas nouveaux, ne sont pas vraiment explicités dans la littérature. Les surfaces nodales apparaissent naturellement dans ce problème. La section 4.1 énonce ce que nous avons besoin d'en savoir. Les sections 4.2 et 5 sont dévolues à la preuve des théorèmes 5 et 3. La section 6 traite de la reconstruction effective d'une surface de Riemann à bord à partir de son opérateur de Dirichlet-Neumann. Il s'agit d'un cas clé pour le problème inverse de reconstruction d'une conductivité. La méthode proposée est à notre connaissance entièrement nouvelle et repose sur l'analyse a priori de la décomposition d'une fonction holomorphe de deux variables en somme d'onde de chocs, c'est à dire de solutions de l'équation différentielle $\frac{\partial h}{\partial y} = h\frac{\partial h}{\partial x}$.

1 Introduction

Nous définissons une structure de conductivité (de dimension deux) comme un couple (M, σ) où M est une surface réelle à bord$^{(1)}$ connexe orientée munie d'une conductivité σ :

[1] On considère qu'une surface à bord M est un ouvert dense d'une variété réelle orientée à bord de dimension deux $\overline{M}$ dont toutes les composantes connexes sont bordées par des variétés réelles de dimension pure 1 ; ainsi,

$T^*\overline{M} \to T^*\overline{M}$, c'est-à-dire d'un tenseur tel que pour tout $p \in \overline{M}$,

$$\Sigma_p : T_p^*\overline{M} \times T_p^*\overline{M} \ni \sigma_p(a,b) \mapsto \frac{a \wedge \sigma_p(b)}{\mu_p}$$

est une forme bilinéaire définie positive, μ étant une forme volume μ pour $\overline{M}$ fixée une fois pour toute ; pour simplifier les écritures dans la suite, on note $\sigma\omega$ pour $\sigma(\omega) : \overline{M} \ni p \mapsto \sigma_p(M)$. Cette définition, peut être inhabituelle, n'est qu'une reformulation[(2)] intrinsèque de celle donnée par [28] et [33]. Pour toute fonction continue $u : bM \to \mathbb{R}$, on note $E_\sigma u$ l'unique solution du problème de Dirichlet suivant

$$d\sigma dU = 0 \ \& \ U|_{bM} = u. \tag{1}$$

Certains auteurs préfèrent considérer une métrique Riemannienne g sur M et construire l'opérateur de Dirichlet-Neumann à partir de la solution du problème de Dirichlet ($\Delta_g U = 0$ & $U|_{bM} = u$) où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à g. En écrivant les équations $d\sigma dU = 0$ et $\Delta_g U = 0$ en coordonnées, on constante que ces deux formulations ne sont équivalentes que dans le cas particulier où $\det \sigma_p = 1$ pour tout $p \in \overline{M}$.

La fonction positive $s_\sigma = \sqrt{\det \sigma}$ joue un rôle spécial rôle dans notre sujet. Nous l'appelons le coefficient de σ. Dans la section 3, on établit que σ se laisse factoriser de façon unique sous la forme $\sigma = s_\sigma c_\sigma$ où c_σ est une conductivité de coefficient 1 et aussi l'opérateur de conjugaison agissant sur $T^*\overline{M}$ d'une structure complexe $\mathcal{C}_\sigma$ déterminée par σ. Ainsi, la condition que $\det \sigma$ est constant signifie que (M,σ) n'est rien de plus que la surface de Riemann $(M, \mathcal{C}_\sigma)$.

Le problème de conductivité inverse que nous considérons ressort du problème d'Impédance Tomographique Electrique inverse ; dans le langage de la physique U devrait être considéré comme un potentiel électrique, $\sigma(dU)$ comme le courant électrique généré par U et $d\sigma dU = 0$ comme l'équation de divergence de Maxwell quand il n'y a pas de variation temporelle. Le problème ITE est généralement compris comme celui de la reconstruction de (M,σ) à partir de ∂M, le bord bM de M orienté M, $T_{bM}^*\overline{M} = \underset{s\in bM}{\cup} T_s^*\overline{M}$, $\sigma\Big|_{T_{bM}^*\overline{M}}$ et de l'opérateur de Dirichlet-Neumann associé σ. Cette formulation est quelque peu ambiguë car elle ne dit pas si M doit être déterminée comme une variété abstraite, une variété plongée ou encore plus précisément comme une sous-variété d'un espace standard. Le succès de l'entreprise dépend de la position adoptée. Avant d'expliquer ce peut être récupéré et comment, nous devons clarifier ce qu'est un opérateur de Dirichlet-Neumann.

Pour ce faire, on peut utiliser une métrique (voir la section 3) mais nous préférons utiliser l'opérateur de Dirichlet-Neumann «différentiel» N_d^σ dont l'action sur une fonction $u : bM \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière est définie par

$$N_d^\sigma u = [\sigma d(E_\sigma u)]|_{bM} \tag{2}$$

---

le bord bM de M est $\overline{M}\backslash M$; ∂M désigne bM muni de l'orientation naturellement induite par M. Une surface de Riemann à bord est une variété complexe connexe de dimension 1 qui est aussi une surface à bord réelle.

[2] Si on fixe un point p dans $\overline{M}$, des coordonnées (x,y) au voisinage de p et qu'on pose comme dans [28] $(\xi,\eta) = (dy,-dx)$ puis $\sigma(dx) = r\xi + t\eta$ et $\sigma(dy) = u\xi + s\eta$, pour $a = a_x dx + a_y dy$ et $b = b_x dx + b_y dy$ dans $T_p\overline{M}$, $\sigma_p(b) = (b_x r + b_y u)\xi + (b_x t + b_y s)\eta$ et

$$\begin{aligned} a \wedge \sigma_p(b) &= (a_x dx + a_y dy) \wedge [(b_x r + b_y u) dy - (b_x t + b_y s) dx] \\ &= (r a_x b_x + u a_x b_y + t a_y b_x + s b_x b_y) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Ainsi, dans le langage de la physique, $N_d^\sigma u$ est la mesure le long de bM du courant généré par le potentiel électrique $E_\sigma u$.

Lorsque M est un domaine de $\mathbb{R}^2$, la conductivité est souvent assimilée à la matrice $(\sigma_{jk}) = Mat_{(dx_1,dx_2)}^{(dx_2,-dx_1)}(\sigma)$ qui en chaque point p représente l'endomorphisme σ_p de T_p^*M avec (dx_1, dx_2) comme base de départ et $(dx_2, -dx_1)$ comme base d'arrivée, (x_1, x_2) étant le couple des coordonnées standards de $\mathbb{R}^2$; (1) s'écrit alors sous la forme

$$\sum_{j,k=1,2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{jk}\frac{\partial U}{\partial x_k}\right) = 0 \quad \& \quad U|_{bM} = u. \tag{3}$$

et les conditions imposées à σ pour être une conductivité se traduisent par le fait que (σ_{jk}) est symétrique et définie positive.

Si le problème posé est compris comme celui de reconstruire (σ_{jk}) à partir $(\partial M, N_d^\sigma)$, il est sans solution naturelle car d'après une remarque de Tartar citée par [25], lorsque $\varphi \in C^1\left(\overline{M}, \overline{M}\right)$ est un difféomorphisme coïncidant avec l'identité sur bM et Φ est la matrice jacobienne de φ, $\left(\sigma'_{jk}\right) = \frac{1}{\det\Phi}{}^t\Phi\,(\sigma_{jk})\,\Phi$ définit une conductivité σ' telle que $N_d^{\sigma'} = N_d^\sigma$. Cependant, la section précédente indique que φ est alors un biholomorphisme entre les surfaces de Riemann $(M, \mathcal{C}_{\sigma'})$ et $(M, \mathcal{C}_\alpha)$ où $\mathcal{C}_\sigma$ (resp. $\mathcal{C}_{\sigma'}$) est la structure complexe telle que $\sigma = sc$ (resp. $\sigma' = s'c'$) où s (resp. s') est une fonction strictement positive sur $\overline{M}$ et c (resp. c') est l'opérateur de conjugaison sur $T^*\overline{M}$ associé à $\mathcal{C}_\sigma$ (resp. $\mathcal{C}_{\sigma'}$). Bien qu'elles aient le même ensemble sous-jacent, il est plus indiqué de voir $(M, \mathcal{C}_{\sigma'})$ et $(M, \mathcal{C}_\sigma)$ comme deux plongement différents de la même surface de Riemann abstraite.

Cet exemple invite à considérer le problème de conductivité inverse comme étant celui de la reconstruction d'une surface de Riemann à bord abstraite M et d'une fonction $s : \overline{M} \to \mathbb{R}_+^*$ à partir de la donnée de bM, de la restriction de $s.c$ à $T_{bM}\overline{M}$ où c est l'opérateur de conjugaison de $T^*\overline{M}$ et de l'opérateur

$$N^{s,c} : \mathcal{F}(bM) \ni u \mapsto d^c E_{sc} u|_{bM}$$

où $\mathcal{F}(M)$ est n'importe quel espace raisonnable de fonctions comme $C^0(bM)$, $C^\infty(bM)$ ou $H^{1/2}(bM)$, $d^c = i\left(\overline{\partial} - \partial\right)$, $\partial = d - \overline{\partial}$ et $\overline{\partial}$ est l'opérateur de Cauchy-Riemann de M. En particulier, même si les données proviennent d'une variété Riemannienne (M, g) équipée d'un tenseur de conductivité σ, nous considérons que notre problème inverse comme celui de la reconstruction d'une surface de Riemann (M, C_σ) et du coefficient de σ. Cette formulation ne mentionne pas la forme volume auxiliaire μ car comme expliqué dans la section 3, la connaissance de la structure complexe de M le long de bM permet de s'en affranchir.

Lorsque (M, σ) est une structure de conductivité plongée dans un espace affine réel ou complexe, M peut être aussi muni de la structure complexe $\mathcal{C}$ induite par restriction de la métrique de l'espace ambiant. Si c désigne l'opérateur de conjugaison de $\mathcal{C}$ agissant sur $T^*\overline{M}$, σ est dite isotrope (relativement à c ou $\mathcal{C}$) s'il existe une fonction $s : \overline{M} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\sigma = sc$. Autrement dit, dire que σ est isotrope (relativement à la métrique ambiante), c'est dire que la structure complexe $\mathcal{C}_\sigma$ associée à σ est déjà connue. Dans une telle situation, le problème inverse dont nous parlons consiste à récupérer la fonction strictement positive $s_\sigma = \sigma/c = \sqrt{\det\sigma}$.

A ce stade, on peut se demander ce qui peut arriver lorsque le point de départ est une surface de Riemann X connue plongée dans $\mathbb{R}^3$ dont la structure complexe $\mathcal{C}$ est induite par la structure euclidienne standard de $\mathbb{R}^3$ et σ est une conductivité arbitraire de X. Si σ est isotrope relativement à $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_\sigma = \mathcal{C}$ et le travail de reconstruction est fait par le théorème 1 de Henkin-Novikov ci-dessous. Pour une conductivité non isotrope, un atlas pour la surface Riemann abstraite $(X, \mathcal{C}_\sigma)$ ayant été récupéré à partir de N_d^σ, tout plongement métrique constructif X'

qui en serait fait dans $\mathbb{R}^3$ pourrait être considéré comme récupéré à partir de N_d^σ. Bien sûr X et X' seraient homéomorphes mais $(X, \mathcal{C})$ et X' seraient des surfaces de Riemann différentes. En outre, dans la pratique, seulement le bord de X pourrait être connu. Il n'est donc pas forcément pertinent de considérer que X est déjà plongée dans un espace standard auquel $\mathcal{C}_\sigma$ ne serait pas relié. Par ailleurs, théorème principal de [23] cité par le théorème 2, (M, σ) est donnée comme plongée dans $\mathbb{R}^3$ mais est considérée pour la preuve comme plongée dans $\mathbb{C}^3$ avec une conductivité anisotrope tandis que dans [21], M est pensée comme plongée dans $\mathbb{CP}_3$.

Pour un domaine borné M muni d'une conductivité isotrope σ, on sait que σ est entièrement déterminée par son opérateur de Dirichlet-Neumann. Cette unicité est établie pour une conductivité réelle analytique par Kohn and Vogelius dan [24]. Pour une conductivité isotrope lisse, un procédé de reconstruction effective a été donné par Novikov dans [30] et pour une conductivité avec une borne inférieure strictement positive et de classe $W^{2,p}$, $p > 1$, par Nachman dans [29]. Une autre preuve de ce résultat a été écrite par Gutarts dans [11] pour une conductivité lisse. Lorsque M est une surface de Riemann connexe dont le genre est connu, Henkin et Novikov généralisent et corrigent dans [21, th. 1.2] les résultats de reconstruction d'une conductivité isotrope de [17]. L'aspect nécessairement technique du principal résultat de [21, th. 1.2] ne nous permet de n'en citer ici qu'un résumé.

Théorème 1 (Henkin-Novikov, 2011) *Soit M une surface de Riemann de genre g muni d'une conductivité isotrope $\sigma = sc$ où $s \in C^3\left(M, \mathbb{R}_+^*\right)$ and c est l'opérateur de conjugaison de M agissant sur les 1-formes. Alors s peut être reconstruite à partir de l'opérateur de Dirichlet-Neumann N_d^σ en résolvant g équations de type Fredholm associées à g données génériques de N_d^σ puis en résolvant g systèmes explicites qui, dans le cas où M est un domaine de $\{z \in \mathbb{C}^2;\ P(z) = 0\}$, $P \in \mathbb{C}_N[X]$, sont des systèmes linéaires de $N(N-1)$ équations à $N(N-1)$ inconnues.*

Lorsque la conductivité n'est pas isotrope, les auteurs se sont concentrés sur l'injectivité à difféomorphisme près de $\sigma \mapsto N_\nu^\sigma$, c'est-à-dire à la réciproque de la remarque de Tartar. Cette injectivité est prouvée par Nachman [29] pour une conductivité de classe C^2 et un domaine de $\mathbb{R}^2$ de classe C^3 après que Sylvester [33] l'ait établi avec des hypothèses supplémentaires. Dans [4], elle est établie pour une conductivité de classe L^∞ mais pour un domaine simplement connexe de $\mathbb{R}^2$.

Dans le cas spécial où le coefficient de conductivité est constant, la question est de savoir si deux structures conformes sur M sont identiques lorsqu'elles partagent le même opérateur de Dirichlet à Neumann. Une réponse positive est affirmée par Lassas et Uhlmann [26] quand M est connexe et Belishev la corrobore dans [5] en montrant que M peut être retrouvée comme le spectre de l'algèbre des restrictions à bM des fonctions holomorphes sur M se prolongeant continûment à $\overline{M}$.

Dans [26] et [5], la connaissance complète de l'opérateur de Dirichlet-Neumann est nécessaire pour obtenir l'unicité de la structure conforme. Dans [16], il est dit que celle-ci est déterminée par l'action de l'opérateur de Dirichlet-Neumann sur trois fonctions génériques mais la preuve donnée de ce résultat n'est correcte qu'en renforçant un peu les conditions génériques imposées à ces trois fonctions, ce qui est fait dans [18]. Cette unicité peut être aussi obtenue en augmentant le nombre de fonctions génériques comme dans [20]. Le théorème 3 de cet article en donne une preuve avec les hypothèses de [16] et à la fin de cette section, on propose une nouvelle reconstruction de la surface de Riemann $(M, \mathcal{C}_\sigma)$.

Dans [22] pour un domaine de $\mathbb{R}^2$, puis dans [23] pour le cas général d'une variété réelle connexe M de dimension 2, Henkin et Santacesaria ont fait une avancée majeure dans la théorie en prouvant que l'opérateur de Dirichlet-Neumann détermine la structure complexe de (M, σ) sous la forme d'une surface de Riemann nodale à bord plongée dans $\mathbb{C}^2$. Les définitions et notations concernant les surfaces nodales sont données dans la section 4.1.

Théorème 2 (Henkin-Santacesaria, 2012) *Soit (M, σ) une structure de conductivité, σ étant de classe C^3. Il existe alors dans $\mathbb{C}^2$ une surface de Riemann nodale à bord $\mathcal{M}$ et une C^3-normalisation $F : \overline{M} \to \overline{\mathcal{M}}$ telle que $F_* \sigma = tc_{\mathcal{M}}$ où $t \in C^3\left(\mathcal{M}, \mathbb{R}_+^*\right)$ et $c_{\mathcal{M}}$ est la structure complexe induite par $\mathbb{C}^2$ sur $\mathcal{M}$. En outre si $F : \overline{M} \to \overline{\mathcal{M}'}$ est une autre C^3-normalisation du même type, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont approximativement isomorphes. Enfin, les valeurs au bord de F et en particulier $b\mathcal{M}$ sont déterminées par bM, $\sigma\,|_{T_{bM}M}$ et l'opérateur de Dirichlet-Neumann N_d^σ de (M, σ).*

Notons que grâce au lemme 8, F est holomorphe au sens où pour toute partie V de M telle que $F(V)$ est une branche de $\mathcal{M}$, F est analytique de $(V, \mathcal{C}_\sigma)$ dans $\mathbb{C}^2$. Par ailleurs, il résulte de la preuve de ce théorème que les singularités de $\mathcal{M}$ sont les points de $F\left(\overline{M}\right)$ ayant plusieurs antécédents par F. Ainsi, lorsque $\mathcal{M}$ n'a pas de singularité, F est un difféomorphisme de $\overline{M}$ sur $\mathcal{M}$ vérifiant les hypothèses du lemme 8, ce qui en fait un isomorphisme de surfaces de Riemann à bord de $(M, \mathcal{C}_\sigma)$ sur $\mathcal{M}$.

Dans [23], il est dit que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont isomorphes mais sans que le sens en soit précisé. Démontrons succinctement qu'il s'agit au moins d'isomorphie approximative au sens de [18] comme défini dans la section 4.1. Supposons que $F : \overline{M} \to \overline{\mathcal{M}}$ et $G : F : \overline{M} \to \overline{\mathcal{M}'}$ sont deux C^3-normalisations du type ci-dessus. Posons $G_{\text{reg}} = G\Big|_{\operatorname{Reg}\mathcal{M}}^{G^{-1}(\operatorname{Reg}\mathcal{M})}$, $F_{\text{reg}} = F\Big|_{\operatorname{Reg}\mathcal{M}'}^{F^{-1}(\operatorname{Reg}\mathcal{M}')}$ et notons H_{reg} l'application de $\operatorname{Reg}\mathcal{M}' \cap G\left(F^{-1}(\operatorname{Reg}\mathcal{M})\right)$ dans $\operatorname{Reg}\mathcal{M} \cap F(\operatorname{Reg}\mathcal{M}')$ définie par $H_{\text{reg}}(z) = F_{\text{reg}}\left(G_{\text{reg}}^{-1}(z)\right)$. Parce que F et G sont des normalisations, H_{reg} se prolonge holomorphiquement le long de toute branche de $\mathcal{M}$ en une application (multivaluée) H de $\mathcal{M}'$ dans $\mathcal{M}$. Par construction, $H(\mathcal{M}')$ et $\mathcal{M}$ sont des courbes complexes qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points. Elles sont donc égales et en particulier, $\operatorname{Sing}\mathcal{M}$ et $\operatorname{Sing}\mathcal{M}'$ ont même cardinal. Il s'ensuit que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont approximativement isomorphes. L'analyse du théorème 2 est continuée dans la section suivante.

2 Principaux résultats

Les surfaces de Riemann nodales $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ impliquées dans le théorème 2 sont en fait isomorphes au sens fort donné dans cet article. En effet, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ induisent par relèvement sur M des structures complexes a priori différentes mais qui coïncident sur bM et partagent le même opérateur de Dirichlet-Neumann. Grâce au théorème 3 ci-dessous, on en déduit que les surfaces de Riemann à bord correspondantes sont isomorphes et que du coup, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ le sont aussi en tant que surfaces de Riemann nodale à bord. La preuve du théorème 3 est donnée dans la section 3. Quand $n = 2$, cela complète la preuve du théorème 1 de [16] dont les arguments devaient être réellement être corrigés. Par ailleurs, comme il est dit plus haut, le théorème 3 prouve aussi l'isomorphie annoncée dans [23, Th. 1.1].

Dans le théorème ci-dessous, on note $[w_0 : \cdots : w_n]$ les coordonnées homogènes standards de $\mathbb{CP}_n$. Si $\omega_0, ..., \omega_n$ sont des $(1,0)$-formes de $\mathbb{CP}_n$ sans zéro commun et deux à deux proportionnelles, on note $[\omega_0 : \cdots : \omega_n]$ ou $[\omega]$ l'application définie sur chaque $\{\omega_j \neq 0\}$ par $[\omega] = \left[\frac{\omega_0}{\omega_j} : \cdots : \frac{\omega_n}{\omega_j}\right]$. Notons que dans l'hypothèse requise sur $(u_0, ..., u_n)$ dans le théorème ci-dessous est génériquement vérifiée parmi les n-uples de fonctions lisses sur le bord (voir [16, 18]).

Théorème 3 (Henkin-Michel, 2007) *Soient M et M', deux surfaces de Riemann à bord lisses bordées par la même courbe réelle γ. On pose $\partial = d - \overline{\partial}$ (resp. $\partial' = d - \overline{\partial'}$), $\overline{\partial}$ (resp. $\overline{\partial'}$) étant l'opérateur de Cauchy-Riemann de M (resp. M'). Si $u \in C^\infty(\gamma)$, on note $\widetilde{u}$ (resp. $\widehat{u}$) le prolongement harmonique de u à M (resp. M') et on pose $\theta u = (\partial \widetilde{u})|_\gamma$ (resp. $\theta' u = (\partial' \widehat{u})|_\gamma$) ; θ (resp. θ') est aussi l'opérateur θ_c^σ défini par (9) lorsque σ est l'opérateur de conjugaison associé de M (resp. M') agissant sur les 1-formes.*

On se donne $u_0, ..., u_n \in C^\infty(\gamma)$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que pour tout $j \in \{0, ..., n\}$, $\theta u_j = \theta' u_j$, l'application $[\theta u] = [\theta u_0 : \cdots : \theta u_n] = [\theta' u]$ est bien définie, réalise un plongement de γ dans $\{[w_0 : \cdots : w_n] \in \mathbb{CP}_n;\ w_0 \neq 0\}$ et on suppose en outre que $[\partial \widetilde{u}]$ (resp. $[\partial' \widehat{u}]$) est bien définie sur M (resp. M') et prolonge méromorphiquement $[\theta u]$ (resp. $[\theta' u]$) à M (resp. M'). Dans ces conditions, il existe un isomorphisme de surfaces de Riemann à bord de $\overline{M}$ sur $\overline{M'}$ dont la restriction à γ est l'identité.

Ainsi, $\operatorname{Reg} \mathcal{M}$ est un modèle de la structure complexe de $(M \backslash F^{-1}(\operatorname{Sing} \mathcal{M}), \sigma)$. Ce modèle est calculable au sens effectif du terme. En effet, $\mathcal{M}$ est une courbe complexe de $\mathbb{C}^2 \backslash b\mathcal{M}$ qui au sens des courants de $\mathbb{C}^2$ satisfait $d[\mathcal{M}] = F_*[\partial M]$ où $[\mathcal{M}]$ désigne le courant d'intégration sur $\mathcal{M}$ et $[\partial M]$ celui du bord de M orienté par M. Dans cette situation, on sait, essentiellement depuis les travaux de Harvey et Lawson [13, 12], que $\mathcal{M}$ peut être calculée de façon effective grâce à des formules de type Cauchy (voir par exemple [16, th. 2] ou [23, prop. 1]). Plus précisément, parce que $\mathcal{M}$ est contenue dans $\mathbb{C}^2$, ces formules donnent livrent les fonctions symétriques des fonctions dont les graphes décrivent les intersections de $\mathcal{M}$ avec une famille de droites complexes.

Cependant, comme seulement les valeurs au bord de F sont connues, il y a une ambiguïté sur la façon de dénouer les éventuels nœuds de $\mathcal{M}$. Pour réellement connaître la structure complexe $\mathcal{C}_\sigma$ de M, on doit en connaître un atlas ou un véritable plongement dans un espace classique. Quand le coefficient de σ est constant, c'est la même chose que reconstruire $(M, \mathcal{C}_\sigma)$. Ce cas particulier est étudiée dans [20, Theorem 4] et avec la remarque faite page 327, on obtient littéralement le résultat ci-dessous. On se réfère à [20] pour le sens précis donné à *générique*. Notons aussi que bien que ne concernant formellement les surfaces de Riemann, la seule chose dans le théorème ci-dessous qui n'est pas explicite dans [20] est l'affirmation concernant l'isotropie mais celle-ci est une conséquence immédiate du fait que Θ est un biholomorphisme de $(M, \mathcal{C}_\sigma)$ sur S.

Le théorème ci-dessous introduit des opérateurs qui jouent un rôle crucial dans cet article. Quand (M, σ) est une structure de conductivité, on pose $\partial^\sigma = d - \overline{\partial}^\sigma$ et $d^\sigma = i\left(\overline{\partial}^\sigma - \partial^\sigma\right)$ où $\overline{\partial}^\sigma$ est l'opérateur de Cauchy-Riemann de la surface de Riemann $(M, \mathcal{C}_\sigma)$. L'opérateur θ_c^σ agit sur $u \in C^\infty(bM)$ par $\theta_c^\sigma u = (\partial^\sigma \widetilde{u})|_{bM}$, $\widetilde{u}$ étant le prolongement $\mathcal{C}_\sigma$-harmonique de u à M. Le théorème ne mentionne pas la régularité de σ car ce qui importe est que $(M, \mathcal{C}_\sigma)$ est une variété à bord lisse afin que la formule de Stokes y soit valide.

Théorème 4 (Henkin-Michel, 2015) *Soit (M, σ) une structure de conductivité et θ_c^σ l'opérateur associé à la surface $(M, \mathcal{C}_\sigma)$ et défini par (9). Alors, pour $u = (u_0, ..., u_3)$ générique dans $C^\infty(bM, \mathbb{R})^4$, l'application $[\theta_c^\sigma u] = [\theta_c^\sigma u_0 : \cdots : \theta_c^\sigma u_3]$ est la valeur au bord d'une application Θ qui réalise un plongement de M sur une surface de Riemann surface à bord S de $\mathbb{CP}_3$. De plus, $\Theta = [\partial^\sigma \widetilde{u}]$ où $\widetilde{u}$ est le prolongement $\mathcal{C}_\sigma$-harmonique de u à M et $\Theta_* \sigma$ est une conductivité isotrope relativement à la structure complexe de S.*

Il faut prendre garde au fait que l'opérateur θ_c^σ n'est pas directement disponible à partir de N_d^σ. Même si σ est l'identité sur les fibres de $T^*\overline{M}$ le long de bM, ce qui peut être immédiatement obtenu à partir de N_d^σ sont les valeurs au bord des dérivées des solutions du problème de Dirichlet

$d\sigma dU = 0$ et $U|_{bM} = u$, $u \in C^\infty(bM)$ tandis que ce qui est requis pour pouvoir appliquer le théorème 4 sont les valeurs au bord des dérivées des solutions du problème de Dirichlet $dd^\sigma U = 0$ et $U|_{bM} = u$, $u \in C^\infty(bM)$. A moins que le coefficient de σ ne soit constant, on ne peut pas s'attendre à ce que ces valeurs au bord soient les mêmes. Le nouveau résultat ci-dessous pallie cette difficulté.

Avant de l'énoncer, expliquons des notations, les détails complet et les preuves étant écrits dans la section 4.2. On dit que la structure de conductivité $(\widetilde{M}, \widetilde{\sigma})$ prolonge simplement (M, σ) si $M \subset\subset \widetilde{M}$, $\widetilde{\sigma}$ est de même classe que σ, $\widetilde{\sigma}|_M = \sigma$ et $\widetilde{\sigma}|_p = Id_{T_p^*\widetilde{M}}$ pour tout $p \in b\widetilde{M}$. Soit alors F, $\mathcal{M}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}$ as comme ci-dessous. La fonction de Green nodale g que nous utilisons pour la courbe éventuellement singulière $\mathcal{M} = F(M)$ est définie dans le corollaire 12 de la section 4.2 mais en guise de première approche, le lecteur peut la penser comme un noyau avec les singularités logarithmiques habituelle sur la diagonal mais sans condition d'annulation au bord. Le potentiel de double-couche $D_g u$ de $u \in C^0(b\mathcal{M})$ est alors défini pour tout point régulier q de $\widetilde{\mathcal{M}} \backslash b\mathcal{M}$ par $(D_g u)(q) = \int_{\partial\mathcal{M}} u d^c g_q$ où $g_q = g(q, .)$. Lorsque u est suffisamment lisse, les fonctions $D_g^+ u = (D_g u)|_{\mathcal{M}}$ et $D_g^- u = (D_g u)\Big|_{\widetilde{\mathcal{M}} \backslash \mathcal{M}}$ se prolonge jusqu'au bord en des fonctions (nodales) de classe C^1 dont les restrictions à $b\mathcal{M}$ sont notées $A_g^+ u$ et $A_g^- u$. L'opérateur de Green conditionnel $B_g = Id + N_g^\#$ est défini pour tout $\in C^\infty(b\mathcal{M})$ et $p \in b\mathcal{M}$ par $\left(N_g^\# u\right)(p) = 2VP\left(\int_{\partial\mathcal{M}} u(q) \frac{\partial g}{\partial \nu_p}(p, q)\tau_q^*\right)$ où VP signifie valeur principale et (ν, τ) est un repère pour $T_{b\mathcal{M}}\overline{\mathcal{M}}$, direct et orthonormé pour la métrique hermitienne ambiante de $\mathbb{C}^2$, τ étant tangent à $b\mathcal{M}$.

Théorème 5 *Soit (M, σ) une structure de conductivité de classe C^3. On se donne, ce qui est toujours possible, une structure de conductivité $(\widetilde{M}, \widetilde{\sigma})$ qui prolonge simplement (M, σ). On note alors $F : \widetilde{M} \to \mathbb{C}^2$ la normalisation obtenue en appliquant le théorème 2 à $(\widetilde{M}, \widetilde{\sigma})$.*

Alors, $Id + A_g^-$ est un endomorphisme de $C^\infty(b\mathcal{M}, \mathbb{R})$, son noyau et celui de B_g sont des sous-espaces de dimension finie de $C^\infty(b\mathcal{M})$ et pour tout $u \in C^\infty(bM, \mathbb{R})$ telle que $\int_{\partial\mathcal{M}}(f_* u) w\tau^* = 0$ lorsque $w \in \ker B_g$, l'équation $f_* u = w + A_g^- w$ admet des solutions dans $C^\infty(b\mathcal{M}, \mathbb{R})$ et si w est l'une d'entre elles, $\theta_c^\sigma u = \left(F^* \partial D_g^+ w\right)|_{bM}$.

La principale difficulté dans la preuve du théorème 5 tient à ce qu'un problème de Dirichlet harmonique dans une courbe nodale n'a de solution unique que si des spécifications sont faites pour les nœuds (voir [18, Prop. 2]). Par ailleurs, si $\mathcal{M}$ ne devait pas avoir de singularité, il n'y aurait rien à faire puisque $\mathcal{M}$ serait déjà un plongement de $(M, \mathcal{C}_\sigma)$ dans $\mathbb{C}^2$.

Etant donné que les valeurs au bord de F sont calculables à partir de N_d^σ et que la fonction de Green utilisée l'est aussi à partir de $\mathcal{M}$, elle-même calculable à de N_d^σ, lé théorème 5 fournit in outil pour calculer à partir de N_d^σ autant de $\theta_c^\sigma u$ que nécessaire pour pouvoir appliquer le théorème 4 et obtenir les valeurs au bord d'un plongement Θ de la surface de Riemann $(M, \mathcal{C}_\sigma)$ sur une surface de Riemann S de $\mathbb{CP}_3$ pour laquelle $\Theta_*\sigma$ est isotrope.

Si S elle-même est calculée, le théorème 1 de Henkin-Novikov permet de reconstruire le coefficient de conductivité s de $\Theta_*\sigma$. Finalement, désignant par c l'opérateur de conjugaison de S, (S, sc) est une solution explicite du problème posé si on comprend celui-ci comme la production d'une structure de conductivité explicite, abstraite ou plongée dans un espace standard, dont le bord orienté et l'opérateur de Dirichlet-Neumann sont ceux spécifiés.

Il reste à expliquer comment récupérer la surface de Riemann S ci-dessus, ou, ce qui est la même chose, la structure de conductivité (S, c). Puisque S est une sous-variété de $\mathbb{CP}_3$, le problème n'est plus de récupérer c mais S en tant qu'ensemble. Sans perte de généralité, on suppose que S est un domaine relativement compact d'une surface de Riemann ouverte $\widetilde{S}$ de $\mathbb{CP}_3$. Pour un choix générique du quadruplet (u_0, u_1, u_2, u_3) utilisé dans le théorème 4, on peut supposer que les projections $\pi_3 : (w_0 : w_1 : w_2 : w_3) \mapsto (w_0 : w_1 : w_2)$ et $\pi_2 : (w_0 : w_1 : w_2 : w_3) \mapsto (w_0 : w_1 : w_3)$ immergent $\widetilde{S}$ dans $\mathbb{CP}_2$ sur des courbes nodales $\widetilde{S}_3$ et $\widetilde{S}_2$ telles que $\pi_3^{-1}\left(\operatorname{Sing}\widetilde{S}_3\right) \cap \pi_2^{-1}\left(\operatorname{Sing}\widetilde{S}_2\right) \cap \widetilde{S} = \varnothing$. Dès lors, pour obtenir un atlas de S, il suffit d'en produire pour $\overline{S} \cap \operatorname{Reg}\widetilde{S}_2$ et $\overline{S} \cap \operatorname{Reg}\widetilde{S}_3$, c'est-à-dire pour une surface de Riemann nodale à bord Q plongée dans $\mathbb{CP}_2$ et qui est un domaine relativement compact d'une surface de Riemann nodale ouverte $\widetilde{Q}$ de $\mathbb{CP}_2$ et dont le bord orienté ∂Q est connu. Ce problème de reconstruction est étudié dans [16, Th. 2] mais l'algorithme proposé n'est pas réellement effectif car les polynômes P_m provenant d'une intersection non vide de Q avec $\{w_0 = 0\}$ ne peuvent pas être calculés aussi facilement qu'annoncé.

Dans cet article, on propose une nouvelle approche de ce problème avec une méthode effective de calcul de ces polynômes. Comment ceci peut être accompli est décrit plus loin mais les détails et les notations techniques sont repoussées autant que possible à la section 6. Le théorème 39 qui spécifie un système linéaire à résoudre pour trouver certains polynômes auxiliaires cruciaux et la proposition 41 qui permet d'en extraire des fonctions avec un sens géométrique sont nouveaux et font partie de nos principaux résultats. Ils sont écrit dans les sections 6.4 et 6.5.

Ce dont nous disposons est une courbe réelle orientée ∂Q dont on sait qu'elle est le bord d'une courbe complexe Q de $\mathbb{CP}_2$; sans perdre en généralité, on suppose que $\{w_0 = 0\} \cap \partial Q = \varnothing$. Dans un telle situation, il est classique d'utiliser les indicatrices de Cauchy-Fantapié de Q. Désignant par U l'ouvert de $\mathbb{C}^2$ formé par les points $z = (x, y)$ de $\mathbb{C}^2$ tel que bQ ne rencontre pas $L_z = \{w \in \mathbb{CP}_2;\ xw_0 + yw_1 + w_2 = 0\}$, celles-ci sont les fonctions G_k, $k \in \mathbb{N}$, définies sur U par

$$G_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q} \Omega_z^k,\ \Omega_z^k = \left(\frac{w_1}{w_0}\right)^k \frac{1}{x + y\frac{w_1}{w_0} + \frac{w_2}{w_0}} d\left(x + y\frac{w_1}{w_0} + \frac{w_2}{w_0}\right) \tag{4}$$

Grâce à la proposition 21, qui est un résultat de Dolbeault and Henkin, on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $P_k \in \mathbb{C}(Y)_k[X]$ tel que $G_k - P_k$ est la k-ème fonction symétrique de Newton $N_{h,k}$ des ondes de chocs $h_1, ..., h_p$ localement définies et déterminant l'intersection de Q avec les droites L_z. Les polynômes P_k sont générées par les points de $Q^\infty = Q \cap \{w_0 = 0\}$. Dans le cas favorable mais improbable où $Q^\infty = \varnothing$, les P_k sont nuls, Q est contenu dans l'espace affine $\{w_0 \neq 0\}$ et des techniques bien connues permettent de calculer ces fonctions h_j.

Lorsque le nombre q^∞ de points dans Q^∞ est 1 or 2, Agaltsov et Henkin [1] donnent une procédure explicite pour récupérer Q et ils affirment que celle-ci devrait être efficace pour toute valeur de q^∞. Cependant, ils n'en produisent pas de preuve et il ne nous est pas clair comment traiter les systèmes algébriques induits.

La nouvelle méthode que nous proposons ci-dessous se focalise sur le nombre p d'ondes de chocs impliquées. Puisque le théorème 6 donne un majorant pour p, on peut considérer que cette méthode est effective pour toute valeur q^∞. Lorsque $q^\infty \in \{1, 2\}$, il est difficile de comparer la procédure d'Agaltsov-Henkin à la notre car donner à p ou q^∞ des petites valeurs sont deux choses vraiment différentes ; d'après le corollaire 24, $p = q^\infty + \delta$ où $\delta \in \mathbb{Z}$ est calculé à partir de G_1. Notre procédure de reconstruction se déroule en cinq étapes.

1. Si G_1 est rationnelle en y et affine en x, Q est contenue, d'après le lemme 40, dans une courbe algébrique connexe K telle que $K \cap L_z = Q \cap L_z$ pour $z \in Z$ où comme précisé par la 24, $Z \subset U$ est domaine de la forme $\underset{|y|>\rho}{\cup} D(0, \alpha|y|) \times \{y\}$. Dans cette situation, on choisit d'autres coordonnées pour qu'au moins une des droites L_z, $z \in Z$, rencontre Q et

$K\backslash Q$. Aussi suppose-t-on pour le reste de la procédure que $\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} \neq 0$ sur Z.

2. On suppose que pour $d \in \mathbb{N}^*$, on a trouvé dans $\mathbb{C}[X]^d$ une solution $\mu = (\mu_1, ..., \mu_d)$ au système différentiel linéaire S_d telle que $B_\mu(0, y) \underset{y \to 0^*}{\longrightarrow} 1$ et $\Delta_\mu \neq 0$, ces trois conditions étant détaillées dans le théorème 39. Notons que S_d est en fait un système linéaire portant sur les coefficients de μ. D'après le théorème 39, $G_1 = -s_1 + 1 \otimes \frac{A}{B} + X \otimes \frac{B'}{B}$ avec $A, B \in \mathbb{C}[Y]$, $\deg A < \deg B = r = d - \delta$, $B(0) = 1$ et $s_k = \frac{e^H}{1 \otimes B}\left(\sum_{k \leqslant j \leqslant d} \mathcal{F}^{j-k}(\mu_j \otimes \mathbf{1})\right)$, $1 \leqslant k \leqslant d$, où H est une fonction définie sur $Z^+ = Z \backslash (\mathbb{C} \times \mathbb{R}_-)$ et $\mathcal{F}$ est un, tous deux précisés dans la définition 30 et calculables à partir de G_1.
3. D'après le corollaire 33, en dehors d'un sous-ensemble analytique de Z, les s_k sont les fonctions symétriques d'ondes de chocs $g_1, .., g_d$. Appliquant à cette famille (g_j) la réduction décrite au début de la section 6.5 et utilisant la proposition 41, on en déduit que $d \geqslant p$,où p est le nombre des ondes ,de chocs h_j cherchées, $r = q^\infty$ et que si $(\widetilde{g}_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ est le jeu de fonctions obtenu à partir de (g_j) par réduction, $\{\widetilde{g}_1, ..., \widetilde{g}_p\} = \{h_1, ..., h_p\}$ et $P_1 = 1 \otimes \frac{A}{B} + X \otimes \frac{B'}{B}$. En conséquence, $(P_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est l'extension algébrique de $(G_k - N_{\widetilde{g},k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ où les $N_{\widetilde{g},k}$ sont les fonctions symétriques de Newton des $\widetilde{g}_j$.
4. On sait par la proposition 21 qu'il existe une fonction localement constante π à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour z_* dans Z mais en dehors d'un sous-ensemble analytique de Z, il existe un voisinage U_{z_*} de z_* dans Z et des ondes de chocs $h_1^{z_*}, ..., h_{\pi(z_*)}^{z_*}$ deux à deux distinctes telles que Q contient $Q_{z_*} = \underset{1 \leqslant k \leqslant \pi(z_*)}{\cup} \left\{\left(1 : h_j^{z_*}(z) : -x - y h_j^{z_*}(z)\right) ;\ z \in U_{z_*}\right\}$ et $\left(G_k\left|_{U_{z_*}}\right.\right)_{k \in \mathbb{N}^*} = \left(N_{h^{z_*},k} + P_k\left|_{U_{z_*}}\right.\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Grâce aux formules de Newton (27) et à ce qui précède, on connaît donc calculer les fonction symétriques $S_{h^{z_*},k}$ des $h_j^{z_*}$. En outre, $\pi(z_*) = G_0\left|_{U_{z_*}}\right. - q^\infty$ est connu. On peut donc calculer individuellement les fonctions $h_j^{z_*}$, $1 \leqslant j \leqslant \pi(z_*)$ à partir de $(S_{h^{z_*},k})_{1 \leqslant k \leqslant \pi(z_*)}$.
5. Grâce au lemme 20, $Q \cap \{w_0 \neq 0\}$ et donc Q sont connues.

D'un point de vue pratique, il serait très utile de connaître a priori p car cela permettrait d'écrire directement un système S_d pertinent. L'inégalité (5) du théorème 6 ci-dessous, donne un majorant $p_{\max}$ pour ce nombre p. Comme expliqué dans la preuve écrite à la fin de la section 7, les données nécessaires pour voir (5) comme effective, principalement $\mathcal{M}$, $(D\partial^\sigma \widetilde{u_0})\,|_{bM}$ et $\theta_c^\sigma u_0 = \partial^\sigma \widetilde{u_0}\,|_{bM}$; sont calculables à partir de données de bord disponibles. Il serait utile d'avoir une formula exprimant $\mathcal{X}\left(\overline{\mathcal{M}}\right)$ en termes de données de Dirichlet-Neumann au bord data mais une telle formula n'est pas connue et $\overline{\mathcal{M}}$ doit être calculée pour qu'on puisse en extraie sa caractéristique d'Euler.

Le théorème 39 implique que S_d a une solution non triviale pour un certain d entre 1 and $p_{\max}$. En outre, avec les résultats de la section 6.5, on sait que toute solution non triviale d'un certain S_d, on peut extraire les ondes de chocs cherchées. Ainsi, il y a au plus $p_{\max}$ systèmes linéaires S_d à résoudre à la deuxième étape du procédé ci-dessus et la méthode de reconstruction de Q ci-dessus peut être considérée comme effective pour toute valeur de p ou de q^∞.

Dans le théorème 6 ci-dessous, l'hypothèse générique portant $Q \in \{Q_1, Q_2\}$ est que Q est une surface de Riemann nodale à bord bien définie de $\mathbb{CP}_2$ dont le bord est une courbe réelle lisse telle que $bQ \subset \{w_0 w_1 w_2 \neq 0\}$, $(0:0:1)$ et $(0:1:0)$ ne sont pas dans $Q^\infty = Q \cap \{w_0 = 0\}$ qui est supposée transverse et contenue $\operatorname{Reg} Q$. Le nombre p_j est, selon la proposition 21 avec $Q \in \{Q_1, Q_2\}$, le nombre d'ondes de chocs $h_{j,1}, ..., h_{j,p_j}$ telles que la fonction G_k définie part (4) peut être écrite dans l'ensemble Z défini par (24) sous la forme $\left(h_{j,1}\right)^k + \cdots + \left(h_{j,p_j}\right)^k +$

$P_{j,k}$ où $P_{j,k} \in \mathbb{C}(Y)_k[X]$. L'opérateur différentiel complexe ∂^σ de $(M, \mathcal{C}_\sigma)$ est défini comme précédemment

Théorème 6 *Soit (M,σ) une structure de conductivité. On munit le fibré $\Lambda^{1,0}T^*\overline{M}$ des $(1,0)$-formes de $(M,\mathcal{C}_\sigma)$ d'une métrique hermitienne et d'une connexion de Chern D comme dans le théorème 44. On note $\mathcal{M}$ la courbe complexe nodale fabriquée par le théorème 2 et on note $\chi\left(\overline{\mathcal{M}}\right)$ la caractéristique d'Euler de $\overline{\mathcal{M}}$. On suppose que $u = (u_0, u_1, u_2, u_3) \in C^\infty(bM)^4$ satisfait à l'hypothèse générique suivante : le prolongement $\mathcal{C}_\sigma$-harmonique $\widetilde{u}$ de u est tel que $[\partial\widetilde{u}]$ est un plongement de $\overline{M}$ dans $\mathbb{CP}_3$ et $Q_j = [\partial\widetilde{u_0} : \partial\widetilde{u_1} : \partial\widetilde{u_j}](M)$, $j = 2,3$, vérifie les hypothèses mentionnées plus haut. On pose $p = \max(p_2, p_3)$ et $\delta = \max(\delta_2, \delta_3)$ où $\delta_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_j} \frac{d(w_1/w_0)}{w_1/w_0}$ est le nombre δ défini dans le lemme 23 et p_j est le nombre d'ondes de chocs intervenant dans la proposition 21 quand z_* est dans l'ensemble Z défini (24). Alors*

$$p \leqslant \delta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial M} \frac{D\partial^\sigma \widetilde{u_0}}{\partial^\sigma \widetilde{u_0}} - \chi\left(\overline{\mathcal{M}}\right) \tag{5}$$

3 Structures de conductivité et métriques

Les conditions imposées à σ pour être une conductivité indiquent l'implication d'une métrique naturelle. Il est remarqué dans [16] qu'une forme volume μ pour $\overline{M}$ ayant été, on définit une métrique naturelle $g_{\mu,\sigma}$ sur $\overline{M}$ en posant pour tout $t \in T\overline{M}$

$$g_{\mu,\sigma}(t,t') = \frac{\sigma^{-1}(t \lrcorner \mu) \wedge (t' \lrcorner \mu)}{\mu}.$$

Sa classe conforme $\mathcal{C}_\sigma$ ne dépend pas de μ et σ se factorise (voir [16]) à travers $\mathcal{C}_\sigma$ au sens où il existe une fonction $s_\sigma : \overline{M} \to \mathbb{R}_+^*$ de même régularité que σ, appelée coefficient de conductivité dans cet article, telle que lorsque (x_1, x_2) est un couple de coordonnées isothermiques locales pour $\mathcal{C}_\sigma$,

$$Mat_{dx}^{(dx_2,-dx_1)}(\sigma_p) = s_\sigma(p)\, I_2 \tag{6}$$

pour tout p dans l'ouvert de $\overline{M}$ où (x_1,x_2) est défini, I_2 étant la matrice unité d'ordre 2 et $dx = (dx_1, dx_2)$. Notons $\det\sigma$ l'application qui à tout point p de $\overline{M}$ associe le déterminant de l'application linéaire σ_p. Alors (6) entraîne que $\det\sigma = s_\sigma^2$, c'est-à-dire $s_\sigma = \sqrt{\det\sigma}$. Si on note c_σ la conductivité définie par

$$\sigma = s_\sigma . c_\sigma = \sqrt{\det\sigma}. c_\sigma, \tag{7}$$

$\mathcal{C}_\sigma$ est aussi la classe conforme associée à c_σ et quand (x_1,x_2) est un couple de coordonnées isothermiques locales pour $\mathcal{C}_\sigma$,

$$Mat_{dx}^{dx}(c_\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{d\acute{e}f}{=} J.$$

Autrement dit, c_σ est aussi l'opérateur de conjugaison agissant sur les 1-formes de M. De plus, si $d^\sigma = c_\sigma d$, $\overline{\partial}^\sigma = \frac{1}{2}(d - id^\sigma)$ est l'opérateur de Cauchy-Riemann associé à $\mathcal{C}_\sigma$ et

$$d\sigma dU = ds_\sigma d^\sigma U$$

pour toute fonction $U \in C^2\left(\overline{M}\right)$. Notons que par définition, $\partial^\sigma = \partial^{c_\sigma}$, $\overline{\partial}^\sigma = \overline{\partial}^{c_\sigma}$ et $d^\sigma = d^{c_\sigma}$; ces opérateurs sont associés à la structure complexe $\mathcal{C}_\sigma$.

Supposons que $\mathcal{C}$ soit une structure complexe sur $\overline{M}$, c'est-à-dire la donnée d'un atlas de $\overline{M}$ qui fasse de M une surface de Riemann à bord de bord bM. Si x_1 et x_2 sont les parties réelles et imaginaires d'une même coordonnée holomorphe de M, les matrices jacobiennes relatives à (x_1, x_2) d'applications holomorphes commutent avec J. Cela signifie qu'on peut définir un tenseur $c : T\overline{M} \to T\overline{M}$ par le fait que dans de telles coordonnées, $Mat_{dx}^{dx}(c) = J$. Par construction, c est une conductivité de coefficient constant 1, $c \circ d = i\left(\overline{\partial} - \partial\right) \overset{déf}{=} d^c$ et c est son opérateur de Hodge agissant sur les 1-formes quand M est muni de la métrique duale de celle définie sur chaque $T_p^*\overline{M}$ par $\langle a, b\rangle\, \mu = a \wedge *b = \frac{1}{\sqrt{\det\sigma}} a \wedge \sigma(b)$.

La décomposition (7) fait donc apparaître une structure complexe naturellement associée à σ. Celle-ci est unique au sens où si c' est l'opérateur de conjugaison associé à une structure complexe $\mathcal{C}'$ et si $s' \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{M'}$, l'égalité $\sigma = s'.c'$ impose, parce que $\det c_\sigma = 1 = \det c'$, $s_\sigma = s'$ puis $c_\sigma = c'$.

La formule (6) montre que pour tout $p \in M$, σ_p commute avec les automorphismes orthogonaux de $\left(T_pM, \left(g_{\mu,\sigma}\right)_p\right)$. Lorsque M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, en particulier si M est un domaine de $\mathbb{R}^2$, et lorsque la classe conforme de $g_{\mu,\sigma}$ est induite par la métrique standard de $\mathbb{R}^3$, ceci signifie que σ est isotrope au sens usuel (voir [28] et [33] par exemple). La proposition ci-dessous résume ce qui précède.

Proposition 7 *Soit M une surface à bord orientée de dimension réelle 2. Une structure complexe $\mathcal{C}$ sur $\overline{M}$ définit un tenseur de conductivité de coefficient égal à 1. Inversement, pour toute conductivité σ sur $\overline{M}$, il existe une unique structure complexe $\mathcal{C}_\sigma$ telle que $\sigma = \sqrt{\det\sigma}c_\sigma$ où c_σ est l'opérateur de conjugaison associé à $\mathcal{C}_\sigma$.*

Ainsi, il est naturel de dire qu'une fonction f d'un ouvert U de M à valeurs dans $\mathbb{C}$ est σ-holomorphe si $\overline{\partial}^\sigma f = 0$, ou de façon équivalente, lorsque pour toute carte $z : V \to \mathbb{C}$ de l'atlas holomorphe de $(M, \mathcal{C}_\sigma)$, $f \circ z^{-1}$ est holomorphe sur $z^{-1}(U)$ au sens usuel.

Si (M', σ') est une autre structure de conductivité de dimension 2, une fonction f d'un ouvert U de M à valeurs dans M' est dite (σ, σ')-analytique si pour toute carte holomorphe $z' : V' \to \mathbb{C}$ de $(M', \mathcal{C}_{\sigma'})$, $z' \circ f$ est σ-holomorphe sur $f^{-1}(V') \cap U$, c'est-à-dire si $z' \circ f \circ z^{-1}$ est holomorphe sur $z^{-1}\left(f^{-1}(V') \cap U\right)$ au sens usuel pour toute carte holomorphe $z : V \to \mathbb{C}$ de $(M, \mathcal{C}_\sigma)$. Cette propriété se caractérise aussi par le lemme suivant.

Lemme 8 *Soient (M, σ) et (M', σ') des structures de conductivité de dimension 2, U un ouvert de M et $f : U \to M'$ une application différentiable. Alors f est (σ, σ')-analytique si et seulement si $({}^tDf) \circ c_{\sigma'} = c_\sigma \circ ({}^tDf)$. Lorsque f réalise un difféomorphisme φ de U sur $f(U)$, φ est (σ, σ')-analytique si et seulement si $\varphi_* c_\sigma = c_{\sigma'}$ et en particulier si $\varphi_*\sigma = \sigma'$.*

Preuve. Considérons des cartes holomorphes $z : V \to \mathbb{C}$ de $(M, \mathcal{C}_\sigma)$ et $z' : V' \to \mathbb{C}$ de $(M', \mathcal{C}_{\sigma'})$ et posons $F = Mat_{(dx,dy)}^{(dx',dy')}(Df)$ où $(x, y) = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ et $(x', y') = (\operatorname{Re} z', \operatorname{Im} z')$. Alors

$$Mat_{(dx',dy')}^{(dx,dy)}\left(\left({}^tDf\right) \circ c_{\sigma'}\right) = Mat_{(dx',dy')}^{(dx,dy)}\left({}^tDf\right) Mat_{(dx',dy')}^{(dx',dy')}\left(c_{\sigma'}\right) = {}^tFJ$$
$$Mat_{(dx',dy')}^{(dx,dy)}\left(c_\sigma \circ \left({}^tDf\right)\right) = Mat_{(dx,dy)}^{(dx,dy)}\left(c_\sigma\right) Mat_{(dx',dy')}^{(dx,dy)}\left({}^tDf\right) = J^tF$$

La relation $({}^tDf) \circ c_{\sigma'} = c_\sigma \circ ({}^tDf)$ a donc lieu si et seulement si $JF = FJ$. Traduite sur les entrées de matrice, ceci est équivalent au fait que $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ vérifient le système des équations de Cauchy-Riemann, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

Supposons maintenant que $\varphi = f\Big|_{U}^{f(U)}$ est difféomorphisme. Puisque par définition, $\varphi_* c_\sigma = \left({}^t Df\right)_\psi^{-1} \circ (c_\sigma)_\psi \circ {}^t (D\varphi)_\psi$ où $\varphi = \psi^{-1}$, le point précédent donne que φ est (σ, σ')-analytique si et seulement si $\varphi_* c_\sigma = c_{\sigma'}$. Par ailleurs, $\varphi_* c_\sigma = (\det \sigma)_\psi . \varphi_* c_\sigma = \det (\sigma_\psi) . \varphi_* c_\sigma$. Donc la relation $\varphi_* \sigma = \sigma'$ impose $\det (\sigma_\psi) = \det c_{\sigma'}$ et $\varphi_* c_\sigma = c_{\sigma'}$. ■

Ce lemme permet de justifier notre commentaire à propos à propose de la remarque de Tartar. La conductivité σ' est définie par $Mat_{(dx_1,dx_2)}^{(dx_2,-dx_1)}(\sigma') = \frac{1}{\det \Phi} {}^t\Phi (\sigma_{jk}) \Phi$ où Φ est la matrice jacobienne de φ. Or $Mat_{(dx_1,dx_2)}^{(dx_1,dx_2)}(\sigma) = J Mat_{(dx_1,dx_2)}^{(dx_2,-dx_1)}(\sigma)$ et de même pour σ'. Puisque $\frac{-1}{\det \Phi} J {}^t\Phi J = \Phi^{-1}$ et $J^2 = -I_2$, on obtient $Mat_{(dx_1,dx_2)}^{(dx_1,dx_2)}(\sigma') = \Phi^{-1} Mat_{(dx_1,dx_2)}^{(dx_1,dx_2)}(\sigma) \Phi$ ce qui signifie que$\sigma' = \varphi_* \sigma$. Ainsi, φ est un biholomorphisme entre $(M, \mathcal{C}_\sigma)$ et $(M', \mathcal{C}_{\sigma'})$.

Venons maintenant à l'opérateur de Dirichlet-Neumann. Supposons que M soit muni d'une métrique Riemannienne g arbitraire ; c'est en particulier le cas quand M est une surface réelle de $\mathbb{R}^3$ muni d'une conductivité non isotrope. Désignons par ν et τ les champs de vecteurs définis le long de bM tels que pour tout $p \in bM$, (ν_p, τ_p) est une base g-orthonormée directe de $T_p\overline{M}$. L'opérateur de Dirichlet-Neumann «normal» N_ν^σ est alors défini pour toute fonction suffisamment régulière $u : bM \to \mathbb{R}$ par

$$N_\nu^\sigma u = \left.\frac{\partial E_\sigma u}{\partial \nu}\right|_{bM} \tag{8}$$

où $E_\sigma u$ est l'unique solution de (1). Ainsi, lorsque $u : bM \to \mathbb{R}$ est suffisamment régulière,

$$dE_\sigma u = (E_\sigma u.\nu)\, \nu^* + (E_\sigma u.\tau)\, \tau^* = (N_\nu^\sigma u)\, \nu^* + (du.\tau)\, \tau^*.$$

Cette formule montre que la donnée de N_ν^σ qui dépend du choix d'une métrique peut être remplacée par celle de l'opérateur de Dirichlet-Neumann «différentiel» N_d^σ défini par (2).

Dans le cas particulier où $\det \sigma = 1$, $\sigma = c_\sigma$ et il est noté dans [16] que $\partial^{c_\sigma} E_{c_\sigma} u|_{bM} = (L_\nu^{c_\sigma} u)(\nu^* + i\tau^*)$ où $\partial^{c_\sigma} = d - \overline{\partial}^\sigma$ et $\overline{\partial}^{c_\sigma}$ est l'opérateur de Cauchy-Riemann de $(M, \mathcal{C}_\sigma)$ et où $L_\nu^{c_\sigma} = \frac{1}{2}\left(N_\nu^{c_\sigma} - i\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)$. Ainsi, on peut considérer dans ce cas l'opérateur de Dirichlet-Neumann «complexe» θ_c^σ défini sur toute fonction suffisamment régulière $u : bM \to \mathbb{R}$ par

$$\theta_c^\sigma u = \partial^{c_\sigma} E_{c_\sigma} u|_{bM} = (L_\nu^{c_\sigma} u)(\nu^* + i\tau^*) \tag{9}$$

Pour $\det \sigma$ quelconque, on pose encore $\theta_c^\sigma = \theta_c^{c_\sigma}$. Ceci signifie que pour $u \in C^\infty(bM)$, $\theta_c^\sigma u$ est encore défini par (9) même si σ et c_σ ne sont plus forcément égales. Aussi, θ_c^σ et N_d^σ ne sont pas directement reliés car ils correspondent à des problèmes de Dirichlet associés à des opérateurs différents, à savoir $dc_\sigma d$ pour le premier et $d\sigma d$ pour le second.

Pour finir cette section, nous expliquons comment s'affranchir de la forme volume auxiliaire μ. Puisque dans le problème inverse envisagé ici, l'opérateur de Dirichlet-Neumann N_d^σ et $\sigma|_{bM}$ sont considérés comme connus, l'opérateur $*_\sigma$ de conjugaison associé à la structure complexe $\mathcal{C}_\sigma$ de (M, σ) est connu quand il agit sur le fibré $T_{bM}^*\overline{M} = \underset{s \in bM}{\cup} T_s\overline{M}$. Ayant fixé une section lisse et génératrice τ^* de T^*bM, on pose $\nu_s^* = -(*_\sigma)_s \tau_s^*$ pour tout $s \in bM$. Par définition d'une conductivité, $bM \ni s \mapsto \tau_s^* \wedge \nu_s^*$ est alors une section lisse du fibré des formes volumes de $\overline{M}$ et peut être prolongée en une forme volume lisse pour $\overline{M}$. Bien que ce prolongement ne soit pas unique, tout tenseur qui serait une conductivité pour l'un de ces prolongements le serait pour tous.

4 Récupération de l'opérateur de Dirichlet-Neumann complexe

Les sont abordées dans[18] et le lecteur peut s'y référer. Cependant, pour des raisons de simplicité, [18] n'envisage pas le cas où des nœuds sont permis dans le bord. Etant donné que les surfaces de Riemann nodales que nous devons traitées sont produites comme la solution d'un problème de bord pour une courbe réelle lisse et qu'il est remarqué dans [12, section 3.2] que de telles courbes complexes peuvent présenter ce type de singularité, on donne quelques bases dans la section 4.1. On prouve ensuite pour de telles surfaces l'existence de fonctions Green nodales. La preuve du théorème 5 qui permet de récupérer l'opérateur θ_c^σ est écrite à la fin de cette section. Ce résultat est nouveau que des nœuds dans le bord soient présents ou non. Par ailleurs l'existence de tels nœuds devrait être considérée comme exceptionnelle.

4.1 Surfaces de Riemann nodale et distributions harmoniques

Dans cet article, une surface de Riemann nodale à bord Q est un ensemble de la forme $\left(\overline{S}/\mathcal{R}\right)\backslash\pi\left(bS\right)$ où S est une surface de Riemann à bord, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence identifiant un nombre fini de points de $\overline{S}$ mais telle que deux points distincts de bS sont dans deux classes différentes et π est la projection naturelle de $\overline{S}$ sur $\overline{S}/\mathcal{R}$. En particulier, $\pi_{bS}=\pi\left|_{bS}^{bS}\right.$ est une bijection.

On munit $\overline{S}/\mathcal{R}$ de la topologie quotient de sorte que Q est un ouvert, $\overline{Q}=\overline{S}/\mathcal{R}$ et $bQ=\pi\left(bS\right)$. On désigne par $\operatorname{Reg}Q$ l'ensemble des points de Q qui n'ont par π qu'un antécédent et on pose $\operatorname{Sing}Q=Q\backslash\operatorname{Reg}Q$; on définit de façon analogue $\operatorname{Reg}\overline{Q}$ et $\operatorname{Sing}\overline{Q}$.

Si $q\in\overline{Q}$ (resp. $q\in bQ$), une branche intérieure de (resp. frontière) de $\overline{Q}$ en q est tout sous-ensemble B de Q (resp. $\overline{Q}$) pour lequel il existe un ouvert connexe V de S (resp. $\overline{S}$) et $s\in V\cap\pi^{-1}\left(q\right)$ tel que $\overline{V}\backslash\left\{s\right\}\subset\pi^{-1}\left(\operatorname{Reg}\overline{Q}\right)$, π réalise une bijection de V sur B et, si $q\in bQ$, $V\cap bS$ est un voisinage de s dans bS. Un jeu de branches intérieures en q de $\overline{Q}$ est dit complet si leur union avec l'éventuelle branche frontière de $\overline{Q}$ en q est un voisinage de q dans $\overline{Q}$.

Q porte une structure complexe (nodale) naturelle qui est caractérisée par le fait que pour toute branche intérieure B de $\overline{Q}$, il existe un ouvert connexe V de S tel que π est un biholomorphisme de V sur B. De même, on donne un sens naturel aux notions de conductivité nodale (à laquelle s'appliquent les considérations de la section précédente), de fonctions ou d'applications nodales entre surfaces de Riemann nodale, holomorphes ou de classe C^k, $0\leqslant k\leqslant\infty$. Avec de telles définitions, $\pi:\overline{S}\rightarrow\overline{Q}$ devient une normalisation de $\overline{Q}$.

Comme il est remarqué dans [18, prop. 2], la notion d'isomorphisme nodal est un plus délicate car les nœuds peuvent être mélangés. Considérons une autre surface de Riemann nodale à bord Q' qui est le quotient d'une surface de Riemann à bord S' et notons π' la projection naturelle de $\overline{S'}$ sur $\overline{Q'}$. On se donne une application nodale $\varphi:\overline{Q}\longrightarrow\overline{Q'}$; φ est donc univaluée sur $\operatorname{Reg}\overline{Q}$ et multivaluée sur $\operatorname{Sing}\overline{Q}$. On dit que φ est un isomorphisme approximatif de surfaces de Riemann nodale à bord si les deux conditions suivantes sont réalisées :

i) φ est un homéomorphisme de $\varphi^{-1}\left(\operatorname{Reg}\overline{Q'}\right)\cap\operatorname{Reg}\overline{Q}$ sur $\varphi\left(\operatorname{Reg}\overline{Q}\right)\cap\operatorname{Reg}\overline{Q'}$..

ii) Pour toute branche B' intérieure (resp. frontière) de $\overline{Q'}$, il existe une branche intérieure (resp. frontière) B de $\overline{Q}$ telle que $\varphi\left(B\cap\operatorname{Reg}\overline{Q}\right)=B'\cap\operatorname{Reg}\overline{Q'}$ et le prolongement continu $\varphi\left|_{B}^{B'}\right.$ de l'application $B\cap\operatorname{Reg}\overline{Q}\rightarrow B'$, $q\mapsto\varphi\left(B\right)$, est un isomorphisme de surfaces de Riemann (resp. à bord).

iii) Pour chaque $q\in\overline{Q}$, les branches de $\overline{Q'}$ en $\varphi\left(q\right)$ sont les images par φ des branches de $\overline{Q}$ en q.

Si φ satisfait seulement (i) et (ii), on dit comme dans [18, prop. 2] que φest un isomorphisme approximatif.

Les distributions et les courants dans les surface de Riemann nodales sont définies comme d'habitude par dualité et bien sûr, les distributions harmoniques sont celles dans le noyau de dd^c. D'après [18, prop. 2] dont la preuve s'applique sans changement au cas $\left(\mathrm{Sing}\,\overline{Q}\right) \cap bQ \neq \varnothing$, une distribution u sur un ouvert W de $\overline{Q}$ est harmonique si et seulement si elle est harmonique au sens usuel sur $W \cap \mathrm{Reg}\,Q$, continue sur $W \cap \mathrm{Reg}\,\overline{Q}$ ainsi que sur les branches de $\overline{Q}$ et si pour tout point singulier q de $\overline{Q}$ les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) pour toute branche intérieure B de $\overline{Q}$ en q suffisamment petite pour qu'on puisse s'en donner une une coordonnée holomorphe z centrée en q, il existe $c_B \in \mathbb{C}$ tel que $u\left|_{Q_{q,j}\backslash\{q\}}\right. - 2c_B \ln|z|$ se prolonge à B en fonction harmonique usuelle.

2) $\sum\limits_{B\in\mathcal{B}} c_B = 0$ où $\mathcal{B}$ est un jeu complet de branches intérieures de $\overline{Q}$ en q.

Ceci implique qu'une même fonction u continue sur bQ admet plusieurs prolongements en tant que distribution harmonique ; le problème de Dirichlet pour u n'est bien posé que si pour le prolongement U, on spécifie pour tout $q \in \mathrm{Sing}\,\overline{Q}$ et toute branche intérieure $\mathcal{B}$ de $\overline{Q}$ en q, le résidu c_B de $\partial U\,|_{\mathcal{B}}$ en q. En particulier, $\widehat{u}$ désignant le prolongement harmonique de $u \circ \pi_{bS}^{-1}$ à S, $\pi_*\widehat{u}$ est la seule distribution harmonique qui est continue le long de toute branche de $\overline{Q}\backslash\{q\}$ et coïncide avec u sur bQ ; on l'appelle le prolongement harmonique simple de u.

Pour une surface de Riemann nodale, on définit l'opérateur de Dirichlet-Neumann complexe comme étant l'opérateur $\theta_c^\sigma = \theta_c^{c_Q}$ où c_Q est l'opérateur de conjugaison associé à la structure complexe de Q et où dans (9) on utilise les extensions harmoniques simples.

4.2 Récupération de θ_c^σ, preuve du théorème 5

4.2.1 Fonctions de Green dans le cas lisse

Cette section rappelle des résultats classiques à propos des fonctions de Green pour une surface de Riemann ouverte à bord S et qui dans la section 4.2.2 sont généralisés au cas nodal.

Une fonction de Green pour S est une fonction g définie sur $\overline{S} \times \overline{S}$ privée de sa diagonale $\Delta_{\overline{S}}$ telle que pour tout $q \in S$, $g_q = g(q,.)$ est harmonique sur $S\backslash\{q\}$, continue sur $\overline{S}\backslash\{q\}$ et présente une singularité logarithmique isolée en q, ce qui signifie qu'ayant choisi au voisinage de q dans S une coordonnée holomorphe z centrée en q, $g_q - \frac{1}{2\pi}\ln|z|$ se prolonge harmoniquement au voisinage de q. g est dite principale si elle est symétrique, réelle et ses fonctions partielles g_q s'annule sur bS. La méthode de Perron montre qu'un telle fonction existe et le principe du maximum implique qu'elle est unique.

Le problème que nous voulons étudier est le calcul à partir de g de l'opérateur θ_c^S qui à $u \in C^\infty(bS)$ associe $(\partial\widetilde{u})\,|_{bS}$ où $\widetilde{u}$ est le prolongement harmonique de u à S.

Sans perdre en généralité, on suppose que S est un domaine relativement compact dans une surface de Riemann ouverte $\widetilde{S}$ pour laquelle g est une fonction de Green. On suppose aussi que g est symétrique et à valeurs réelles.

Tout d'abord, on fabrique l'opérateur T_g qui à $u \in C^\infty(bS)$ associe la fonction $T_g u$ définie sur $\widetilde{S}\backslash bS$ par

$$T_g u : \widetilde{S}\backslash bS \ni q \mapsto \frac{2}{i}\int_{\partial S} u\partial g_q \tag{10}$$

et qui se divise en $T_g^{\pm}u = (T_g u)\,|_{S^\pm}$ où $S^+ = S$ et $S^- = \widetilde{S}\backslash\overline{S}$. On choisit une métrique hermitienne pour $\widetilde{S}$ et pour $T\widetilde{S}$ près de bS, un repère orthonormé direct (ν,τ) tel que $\tau\,|_{bS} \in$

$T_{bS}S$. Quand f est une fonction différentiable près de bS, on peut alors écrire

$$\partial f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - i\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)(\nu^* + i\tau^*)\,. \tag{11}$$

Puisque l'image inverse de ν^* par l'injection naturelle bS sur $\widetilde{S}$ est 0, on obtient que pour tout $u \in C^1(bS)$ and $q \in \widetilde{S}\backslash bS$,

$$(T_g u)(q) = \int_{\partial S} u \frac{\partial g_q}{\partial \nu}\tau^* + i\int_{\partial S} u' g_q \tau^* \overset{def}{=} D_g u + iS_g u' \tag{12}$$

où $u' = \frac{\partial u}{\partial \tau}$ et où $D_g u$ et $S_g u'$ sont les classiques potentiels double-couche et simple-couche de u et u'. Comme $d^c = i\left(\overline{\partial} - \partial\right)$, on obtient aussi (11) que pour tout $u \in C^0(bS)$ et $q \in \widetilde{S}\backslash bS$,

$$D_g u = \int_{\partial S} u d^c g_q \tag{13}$$

Comme T_g, D_g et S_g se divisent en des opérateurs $D_g^{\pm}$ et $S_g^{\pm}$. Il est alors bien connu que pour tout $u \in C^2(bS)$, $D_g^{\pm}u = (D_g u)|_{S^{\pm}}$ et $S_g^{\pm}u = (S_g u)|_{S^{\pm}}$ se prolongent à $\overline{S^{\pm}}$ en fonctions C^1, que S_g est continu sur $\widetilde{S}$ et que si $u \in C^2(bS)$, les valeurs au bords $A_g^{\pm}u = \left(D_g^{\pm}u\right)|_{bS}$ satisfont

$$A_g^+ u - A_g^- u = u \ \ \& \ \ A_g^+ u + A_g^- u = N_g u \tag{14}$$

où $N_g u$ est défini sur bS par

$$(N_g u)(p) = 2PV\left(\int_{\partial S} u d^c g_q\right),$$

PV signifiant valeur principale. Selon (12), lorsque $u \in C^2(bS)$, $T_g^{\pm}u$ se prolonge aussi à $\overline{S^{\pm}}$ en as fonctions C^1 qui vérifient

$$A_{g,c}^+ u - A_{g,c}^- u = u \ \ \& \ \ A_{g,c}^+ u + A_{g,c}^- u = N_{g,c} u$$

où $A_{g,c}^{\pm}u = \left(T_g^{\pm}u\right)|_{bS} = A_g^{\pm}u - iS_g u'$ et où $N_{g,c}u$ est défini sur bS par

$$(N_{g,c}u)(p) = 2PV\left(\frac{2}{i}\int_{\partial S} u\partial g_q\right)$$

Ceci remonte aux travaux de Sohotksy en 1873 ou, plus tard, de Plemelj et figure dans de nombreux livres. Le lecteur peut par exemple se référer à [34, chp. 7, §§11] où ces opérateurs et formules sont prouvés avoir du sens quand u est dans les espaces de Sobolev. Une preuve directe pour $T_{g,c}$ et les fonctions C^2 se trouve comme cas particulier dans [27] qui étudie des problèmes similaires dans les variétés de Stein.

On utilise aussi l'opérateur $N_g^{\#}$ défini sur tout espace de Sobolev $H^s(bS)$ par densité de $C^\infty(bS)$ et par, quand $u \in C^\infty(bS)$,

$$\forall p \in bS,\ \left(N_g^{\#}u\right)(p) = 2PV\left(\int_{\partial S} u(q)\frac{\partial g}{\partial \nu_p}(p,q)\,\tau_q^*\right)$$

D'après [34, Prop. 11.3], on sait qu'au sens des distributions,

$$\forall p \in bS,\ \left(N_g^{\#} u\right)(p) = u(p) + 2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\partial S^- u}{\partial \nu}(p - \varepsilon \nu_p) \tag{15}$$

Supposons que pour une certaine fonction $u \in C^\infty(bS)$, on ait trouvé une solution $w \in C^\infty(bS)$ à l'équation

$$u = w + A_g^- w. \tag{16}$$

Alors $\widetilde{u} = D_g^+ w$ est une fonction lisse sur $\overline{S}$ telle que $\left(D_g^+ w\right)|_{bS} = A_g^+ w = w + A_g^- w = u$, ce qui implique que $D_g^+ w$ est le prolongement harmonique $\widetilde{u}$ de u à S et que $\theta_c^S u = \left(\partial D_g^+ w\right)|_{bS}$ est calculable, ce qui est notre but. Ainsi, la question qui se pose maintenant est celle de la caractérisation de l'image de $Id + A_G^-$.

Etant donné que g est symétrique et réelle, on sait (voir par exemple [34, chp. 7, §§11]) que pour tout réel s, $Id + A_g^-$ est un opérateur de Fredholm de $H^s(bS)$ sur lui-même et a un index nul. Ceci implique que l'obstruction à résoudre (16) dans $H^s(bS)$ pour une donnée dans $H^s(bS)$ est seulement de dimension finie et que $Id + A_g^-$ est un isomorphisme s'il est injectif ou surjectif. Considérons l'identification standard $H^{-s}(bS)$ du dual de $H^s(bS)$ via la dualité $\langle .,. \rangle$ définie par densité de $C^\infty(bS)^2$ dans $H^s(bS) \times H^{-s}(bS)$ et par

$$\langle u, w \rangle = \int_{\partial S} u w \tau^*$$

quand $u, w \in C^\infty(bS)$. On peut alors considérer l'adjoint L^*de tout opérateur L de $H^s(bS)$ et obtenir l'identité $\overline{\operatorname{Im} L} = (\ker L^*)^\perp$. Etant donné que $Id + A_g^-$ est d'image fermée en tant qu'opérateur de Fredholm, on obtient $\operatorname{Im}\left(Id + A_g^-\right) = \left(\ker\left(Id + A_g^-\right)^*\right)^\perp$. D'après (14), il vient $Id + A_g^- = \frac{1}{2}(Id + N_g)$ et $N_g = I + 2A_g^-$. Pour $w \in C^\infty(bS)$, on obtient que pour tout $p \in bS$,

$$(N_g w)(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} 2 \left(D_g^- w\right)(p - \varepsilon \nu_p) + w(p)$$

au sens des distributions. Avec (15), on en déduit que pour $u, w \in C^\infty(bS)$

$$\begin{aligned}
\langle u, N_g w \rangle &= \langle u, w \rangle + 2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\partial S} u(p) \left(D_g^- w\right)(p - \varepsilon \nu_p) \tau_p^* \\
&= \langle u, w \rangle + 2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\partial S} u(p) \left(\int_{\partial S} w(q) \frac{\partial g}{\partial \nu_q}(p - \varepsilon \nu_p, q) \tau_p^* \right) \tau_q^* \\
&= \langle u, w \rangle + 2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\partial S} w(q) \left(\int_{\partial S} u(p) \frac{\partial g}{\partial \nu_q}(p - \varepsilon \nu_p, q) \tau_q^* \right) \tau_p^* = \left\langle w, N_g^{\#} u \right\rangle.
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $(N_g)^* = N_g^{\#}$, ce qui implique $\ker\left(Id + A_g^-\right)^* = \ker\left(Id + N_g^{\#}\right)$. On résume cette discussion dans le lemme ci-dessous.

Lemme 9 *(1) On pose $B_g = Id + N_g^{\#}$. Alors $\ker B_g \subset C^\infty(bS)$ et une fonction $u \in H^s(bS)$ est dans l'image $Id + A_g^-$ si et seulement si $\langle u, w \rangle = 0$ pour tout $w \in \ker B_g$.*

(2) Soit $u \in C^\infty(bS, \mathbb{R})$ orthogonale à $\ker B_g$ et $w \in H^s(bS)$ telle que $u = w + A_g^- w$. Alors $w \in C^\infty(bS, \mathbb{R})$ et $\theta_c^S u = \left(\partial D_g^+ w\right)|_{bS}$.

(3) Quand g est la fonction de Green principale de S, $T_G^+ = D_G^+$ et $Id + A_g^-$ est un automorphisme de $H^s(bS)$.

Preuve. (1) et (2) ont déjà été prouvées sauf le fait que $w \in C^\infty(bS)$ et que $\ker B_g \subset$

$C^\infty(bS)$. Les deux sont des conséquences de ce que $N_g^\#$ et A_g^- sont des opérateurs pseudo-differentiels d'ordre -1 (voir [34,]). Pour $u \in C^\infty(bS, \mathbb{R})$ et son prolongement harmonique $\widetilde{u}$ à S, la formule de Stokes appliquée à S privé d'un disque conforme arbitrairement petit Δ_ε autour de $q \in S$ donne

$$\begin{aligned}
\left(T_G^+ u\right)(q) &= \frac{2}{i}\int_{\partial S}\left(\widetilde{u}\partial G_q + G_q \overline{\partial}\widetilde{u}\right) \\
&= \frac{2}{i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon}\left(\widetilde{u}\partial G_q + G_q \overline{\partial}\widetilde{u}\right) + \frac{2}{i}\int_{S\backslash\Delta_\varepsilon}\left(\overline{\partial}\widetilde{u}\wedge\partial G_q + \partial G_q\wedge\overline{\partial}\widetilde{u}\right) \\
&= \frac{2}{i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon}\widetilde{u}\partial G_q + O(\varepsilon\ln\varepsilon) + 0 \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \widetilde{u}(q)
\end{aligned}$$

Comme G et u sont à valeurs réelles,

$$\overline{T_G^+ u} = -\frac{2}{i}\int_{\partial S}\left(\widetilde{u}\overline{\partial}G_q + G_q\partial\widetilde{u}\right) = -\frac{2}{i}\int_{\partial S}\left[d\left(\widetilde{u}G_q\right) - \widetilde{u}\partial G_q\right] = T_G^+ u$$

Ceci livre $D_G^+ u = T_G^+ u = \widetilde{u}$. Ainsi, $A_G^+ = Id + A_G^-$ est surjectif et, parce que son index est 0, un isomorphisme de $H^s(bS)$ comme annoncé dans (3). ■

Remarque. Il est connu que $Id + A_G^-$ est un isomorphisme de $H^s(bS)$ quand $S \subset \mathbb{C}$ est borné et de complémentaire borné (voir [34] par exemple). Dans le cas général, il n'est pas difficile de prouver que $\ker\left(Id + A_g^-\right)$ est formé par des valeurs au bord de fonctions holomorphes sur $\widetilde{S}\backslash\overline{S}$ lisses jusqu'au bord et que l'opérateur de Dirichlet-Neumann $C^\infty(bS) \ni u \mapsto \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\nu}|_{bS}$ réalise un isomorphisme de $\ker B_g$ sur $\ker\left(Id + A_g^-\right)$.

Ainsi, disposer de la fonction de Green principale de S permet d'éviter la résolution de (16). Hélas, la méthode standard introduite par Fredholm in 1900 pour construire de façon effective une telle fonction de Green G consiste justement à trouver pour chaque $q \in S$ une fonction w_q telle que $g_q = w_q + A_g^- w_q$ puis de poser $G_q = g_q - D_g^+ w_q$. Heureusement, il n'est pas nécessairement pertinent dans notre problème de calculer G car nous avons besoin de calculer seulement un nombre suffisamment grand mais fini de $\theta_c^S u$.

Comme mentionné dans la section suivante, toutes ces considérations s'appliquent directement au cas nodal.

4.2.2 Fonctions de Green dans le cas nodal

Définition 10 *Soit $\mathcal{Z}$ une courbe complexe ouverte, éventuellement singulière, d'un ouvert de $\mathbb{C}^2$. Une fonction de Green pour $\mathcal{Z}$ est une fonction $g : (\mathrm{Reg}\,\mathcal{Z}\times\mathrm{Reg}\,\mathcal{Z})\backslash\Delta_{\mathrm{Reg}\,\mathcal{Z}} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $q_* \in \mathrm{Reg}\,\overline{\mathcal{Z}}$, $g_{q_*} = g(q_*, .)$ se prolonge à $\overline{\mathcal{Z}}$ comme courant et $i\partial\overline{\partial}g_{q_*}$ est le courant de Dirac δ_{q_*} porté par $\{q_*\}$ - ceci implique en particulier que ∂g_{q_*} est une $(1,0)$-forme faiblement holomorphe sur $\mathcal{Z}\backslash\{q_*\}$ au sens de [31].*

Lorsque $\mathcal{Z}$ est une surface de Riemann nodale ouverte, quotient de Σ, surface de Riemann à bord, par une relation d'équivalence et lorsque π est la projection canonique de Σ sur $\mathcal{Z}$, une fonction de Green simple pour $\mathcal{Z}$ est une fonction symétrique g définie sur $(\mathrm{Reg}\,\mathcal{Z}\times\mathrm{Reg}\,\mathcal{Z})\backslash\Delta_{\mathrm{Reg}\,\mathcal{Z}}$ pour laquelle il existe une fonction de Green $\widetilde{g}$ pour S à valeurs réelles et telle que $g_{q_*} = \pi_*\widetilde{g}_{s_*}$ au sens suivant : pour toute branche $\mathcal{B}$ de $\mathcal{Z}$ en q_*, image par π d'un ouvert V de Σ tel que $V\backslash\{s_*\} \subset \pi^{-1}(\mathrm{Reg}\,\mathcal{Z})$ où $s_* \in \pi^{-1}(q_*)$, $g_q|_{\mathcal{B}} = \pi_*\left(\widetilde{g}_{s_*}|_V\right)$ dans un voisinage de q_* dans $\mathcal{B}$.

Une fonction de Green principale pour une surface de Riemann nodale à bord $\mathcal{Z}$ est une fonction de Green simple g pour $\mathcal{Z}$ telle que si $\mathcal{B}$ est une branche de bord de $\mathcal{Z}$, $g|_{\mathcal{B}}$ se prolonge *continûment à $\overline{\mathcal{B}}$ par la valeur* 0 *sur* $\overline{\mathcal{B}} \cap b\mathcal{Z}$.

Détaillons maintenant la formule explicite de la proposition 17 de [19] établissant l'existence de fonctions Green pour une famille à 1 paramètre de courbes complexes dont les singularités éventuelles sont quelconques. On se donne une courbe complexe $\mathcal{Y}$ d'un ouvert de $\mathbb{C}^2$, Ω un voisinage de Stein de $\mathcal{Y}$ dans $\mathbb{C}^2$, Φ une fonction holomorphe sur Ω telle que $\mathcal{Y} = \{\Phi = 0\}$ et $d\Phi\,|_{\mathcal{Y}} \neq 0$ puis un domaine strictement pseudoconvexe Ω_0 de $\mathbb{C}^2$ vérifiant

$$\mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y} \cap \Omega_0 \subset \Omega,$$

et enfin une fonction symétrique $\Psi \in \mathcal{O}\left(\Omega \times \Omega, \mathbb{C}^2\right)$ telle que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\Phi\left(z'\right) - \Phi\left(z\right) = \left\langle \Psi\left(z', z\right), z' - z \right\rangle$$

où $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2$ lorsque $v, w \in \mathbb{C}^2$. On définit sur $\operatorname{Reg} \mathcal{Y}$ une $(1,0)$-forme ω en posant

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{-dz_1}{\partial\Phi/\partial z_2} \text{ sur } \mathcal{Y}^1 = \mathcal{Y} \cap \{\partial\Phi/\partial z_2 \neq 0\} \\ \omega &= \frac{+dz_2}{\partial\Phi/\partial z_1} \text{ sur } \mathcal{Y}^2 = \mathcal{Y} \cap \{\partial\Phi/\partial z_1 \neq 0\} \end{aligned}$$

et on considère

$$k\left(z', z\right) = \det\left[\frac{\overline{z'} - \overline{z}}{\left|z' - z\right|^2}, \Psi\left(z', z\right)\right].$$

Lorsque $q_* \in \operatorname{Reg} \mathcal{Y}_0$, [19, prop. 17] établit que la formule

$$g_c\left(q_*, q\right) = g_{c,q_*}\left(q\right) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{q' \in \mathcal{Y}_0} \overline{k\left(q', q\right)} k\left(q_*, q'\right) \; i\omega\left(q'\right) \wedge \overline{\omega}\left(q'\right). \tag{17}$$

définit pour $\mathcal{Y}_0$ une fonction de Green au sens ci-dessus. En outre, la preuve de [19, prop. 17] apporte que si $q_* \in \operatorname{Reg} \mathcal{Y}_0$

$$\partial g_{c,q_*} = \widetilde{k}_{q_*} \omega$$

où $\widetilde{k}_{q_*} = \frac{1}{2\pi} k\left(., q_*\right)$. La proposition ci-dessous donne un complément utile.

Proposition 11 *On suppose $\mathcal{Y}$ n'a que des singularités nodales. Dans ce cas, la fonction*

$$g\left(q_*, q\right) = \operatorname{Re} g_c\left(q_*, q\right) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{q' \in \mathcal{Y}_0} \frac{1}{2} \left(\overline{k\left(q', q\right)} k\left(q_*, q'\right) + k\left(q', q\right) \overline{k\left(q_*, q'\right)}\right) \; i\omega\left(q'\right) \wedge \overline{\omega}\left(q'\right) \tag{18}$$

est une fonction de Green simple de $\mathcal{Y}_0$.

Preuve. Commençons par prouver que q_* étant fixé dans $\operatorname{Reg} \mathcal{Y}_0$, g_{c,q_*} se prolonge en fonction harmonique usuelle le long des branches de $\mathcal{Y}_0 \backslash \{q_*\}$. Puisque g_{c,q_*} est une distribution harmonique sur $\mathcal{Y}_0 \backslash \{q_*\}$, on sait déjà que $g_{c,q_*} \left|_{(\operatorname{Reg} \mathcal{Y}_0) \backslash \{q_*\}}\right.$ est une fonction harmonique usuelle et grâce à [18, prop. 2], que pour toute branche $\mathcal{B}$ de $\mathcal{Y}_0$ en q, $g_{c,q_*}\,|_{\mathcal{B}}$ a au plus une singularité logarithmique isolée en q et donc que $\partial g_{c,q_*}$ au plus un pôle simple en q. Fixons q dans $\operatorname{Sing} \mathcal{Y}_0$ et $\mathcal{B}$ une branche de $\mathcal{Y}_0$ en q. En diminuant $\mathcal{B}$ et en changeant éventuellement de coordonnées, on se ramène au cas où $q = 0$ et où Φ est au voisinage de 0 de la forme

$$\Phi\left(z\right) = \left(z_2 - \varphi\left(z_1\right)\right) \Theta\left(z\right) \tag{19}$$

avec φ holomorphe dans un disque $V = D(0,r)$ assez petit et $\Theta|_{\mathcal{B}}$ ne s'annulant qu'en 0. En particulier, il existe une fonction θ holomorphe sur V telle que $\theta(0) \neq 0$ et $\Theta(z_1, \varphi(z_1)) = z_1^{\nu-1}\theta(z_1)$ lorsque $z_1 \in V$, ν désignant le nombre de branches de $\mathcal{Y}_0$ en q. Sur $\mathcal{B}\backslash\{q\}$, on a donc $\omega = \frac{dz_1}{\theta(z_1)z_1^{\nu-1}}$. Considérons alors χ une $(0,1)$-forme à support compact dans $\mathcal{B}$; χ s'écrit donc $\xi d\overline{z_1}$ avec $\xi \in \mathcal{D}(V)$. D'où, par définition,

$$\langle \partial g_{q_*}, \chi \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0^+} \int_{z_1 \in V \backslash D(0,\varepsilon)} \frac{\widehat{k}_{q_*}(z_1)\,\xi(z_1)}{\theta(z_1)\,z_1^{\nu-1}} i dz_1 \wedge d\overline{z_1}$$

où $\widehat{k}_{q_*}(z_1) = \widetilde{k}_{q_*}(z_1, \varphi(z_1))$. Ecrivons

$$\frac{\widehat{k}_{q_*}(z_1)\,\xi(z_1)}{\theta(z_1)} = \sum_{\alpha+\beta<\nu-1} c_{\alpha,\beta} z_1^{\alpha} \overline{z_1}^{\beta} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{\nu-2}}{(\nu-2)!}\, D^{\nu-1}\left(\widehat{k}_{q_*}\xi/\theta\right)\Big|_{tz_1} .z_1^{\nu-2} dt\ i dz_1 \wedge d\overline{z_1}$$

où l'expression $D^p f|_w .z^p$ se lit comme étant la valeur prise par la différentielle totale d'ordre p de f en w sur le vecteur $(z, ..., z)$. Puisque $\int_0^{2\pi} e^{i\theta(\alpha-\beta-\nu+1)} d\theta = 0$ lorsque $\alpha+\beta < \nu-1$, on obtient

$$\langle \partial g_{q_*}, \chi \rangle = \int_{z_1 \in V} \int_0^1 \frac{(1-t)^{\nu-2}}{(\nu-2)!}\, D^{\nu-1}\left(\widehat{k}_{q_*}\xi/\theta\right)\Big|_{tz_1} .1^{\nu-1} dt\ i dz_1 \wedge d\overline{z_1} \tag{20}$$

Par ailleurs, il existe $c \in \mathbb{C}$ et $h \in \mathcal{O}(V)$ telle que l'expression de $\partial g_{q_*}|_{\mathcal{B}}$ dans la coordonnée z_1 soit $\frac{c}{z_1} dz_1 + h dz_1$. D'où

$$\langle \partial g_{q_*}, \chi \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0^+} \int_{z_1 \in V \backslash D(0,\varepsilon)} \left(\frac{c}{z_1} + h(z_1)\right) \xi(z_1)\, i dz_1 \wedge d\overline{z_1}$$

Ecrivons $\xi(z_1) = \xi(0) + \xi_{1,0} z_1 + \xi_{0,1}\overline{z_1} + \int_0^1 (1-t)\, D^2\xi|_{tz_1} .z_1^2 dt$. Il vient alors

$$\langle \partial g_{q_*}, \chi \rangle = \pi r^2 \xi_{1,0} c + \int_{z_1 \in V} h(z_1)\,\xi(z_1)\, i dz_1 \wedge d\overline{z_1} \tag{21}$$

Comme (20) ne comporte pas de dérivation de la mesure de Dirac en 0, la comparaison avec (21) impose $c = 0$. Ainsi, $g_{c,q_*}|_{\mathcal{B}}$ et $g_{q_*}|_{\mathcal{B}}$ sont des fonctions harmoniques usuelles.

Vérifions maintenant que $i\partial\overline{\partial} g_{c,q_*}$ est le courant de Dirac en q_*. Puisque g_{c,q_*} n'a pas de singularité dans les branches de $\mathcal{Y}_0\backslash\{q_0\}$, on obtient grâce à la version nodale de la formule de Stokes que pour toute fonction test χ sur $\mathcal{Y}_0$, $\left\langle i\partial\overline{\partial} g_{c,q_*}, \chi \right\rangle = \left\langle i\partial g_{c,q_*}, \overline{\partial} f \right\rangle$ est la limite lorsque $\varepsilon \to 0^+$ de $\frac{1}{i}\int_{\partial\Delta_\varepsilon} \chi \partial g_{c,q_*}$ où Δ_ε est un disque conforme de rayon ε centré en q_*. Utilisant les même notations que ci-dessus avec $\nu = 1$ et q remplacé par q_* que nous pouvons considéré être 0, on trouve que

$$\left\langle i\partial\overline{\partial} g_{c,q_*}, \chi \right\rangle = \frac{\Psi_2(0,0) - \varphi'(0)\,\Psi_1(0,0)}{\theta(0)\left(1 + |\varphi'(0)|^2\right)} \chi(q_*)$$

Avec (19) on obtient par différentiation que $\Psi_2(0,0) = \theta(0)$ et $\Psi_1(0,0) = -\overline{\varphi'(0)}$. Par conséquent, $\left\langle i\partial\overline{\partial} g_{c,q_*}, \chi \right\rangle = \chi(q_*)$ ce qui signifie $i\partial\overline{\partial} g_{c,q_*} = \delta_{q_*}$. puisque δ_{q_*} est à valeurs réelles sur les fonctions tests à valeurs réelles, ceci implique $i\partial\overline{\partial} g_{q_*} = \delta_{q_*}$.

Fixons maintenant q_s dans $\mathrm{Sing}\,\mathcal{Y}_0$. Considérons une branche $\mathcal{B}$ de $\mathcal{Y}_0$ en q_s suffisamment petite pour qu'on puisse s'y donner une coordonnée holomorphe z centrée en q_s. Puisque g est symétrique d'après (17), ce qui précède implique que lorsque $q_* \in \mathcal{B}\backslash\{q_s\}$ tend vers q_s, $g_{q_*} - \frac{1}{2\pi}\ln|z - z(q_*)|$ converge uniformément sur $\mathcal{B}$ vers une fonction harmonique de la forme

$g^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B},q_s} - \frac{1}{2\pi}\ln|z|$ où $g^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B},q_s}$ est harmonique sur $\mathcal{B}\backslash\{q_s\}$. Pour la même raison, si $\mathcal{B}'$ est une autre branche de $\mathcal{Y}_0$ en q_s ou une branche de $\mathcal{Y}_0$ relativement compacte dans $\mathcal{Y}_0\backslash\{q_q\}$, g_{q_*} converge uniformément sur $\mathcal{B}'$ vers une une fonction harmonique $g^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B},q_s}$ quand $q_* \in \mathcal{B}\backslash\{q_s\}$ tend vers q_s. Quand $\mathcal{B}'$ parcoure l'ensemble des branches de $\mathcal{Y}_0$, ces fonctions $g^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B},q_s}$ se recollent en une fonction $g_{\mathcal{B},q_s}$ qui est harmonique sur $\mathcal{B}'\backslash\{q_s\}$ pour toute branche $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{Y}_0$, dont la restriction à $\mathcal{B}$ présente une singularité logarithmique en q_s et telle que g_{q_*} tend au sens des courants vers $g_{\mathcal{B},q_s}$ quand $q_* \in \mathcal{B}\backslash\{q_s\}$ tend vers q_s. Procédant ainsi pour tous les points singuliers de $\mathcal{Y}_0$, on constate que g est une fonction de Green simple pour $\mathcal{Y}_0$. ■

On applique maintenant ce qui précède à la situation du théorème 5. On rappelle que $F : \widetilde{M} \to \mathbb{C}^2$ est l'application obtenue en appliquant le théorème 2 à un prolongement simple $(\widetilde{M}, \widetilde{\sigma})$ de (M, σ). On pose $\mathcal{Y} = F(\widetilde{M})$ et on fixe un voisinage de Stein Ω de $\mathcal{Y}$ dans $\mathbb{C}^2$, c'est-à-dire un voisinage qui est une variété de Stein. Comme $\mathcal{M} = F(M)$ est relativement compact dans $\mathcal{Y}$, on peut sélectionner dans $\mathbb{C}^2$ un domaine strictement pseudoconvexe Ω_0 vérifiant $\mathcal{M} \subset\subset \mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y} \cap \Omega_0 \subset \Omega$. On utilise alors la proposition 11 pour obtenir une fonction de Green pour $\mathcal{M}$. D'après le corollaire ci-dessous, celle-ci provient d'une fonction de Green pour M.

Corollaire 12 *Les hypothèses et notations sont les mêmes quand dans le théorème 5 et g est la fonction définie par (18). Alors $g_M = F^*g\Big|_{\overline{M}\times\overline{M}\backslash\Delta_M}$ est a une fonction de Green pour $(M, \mathcal{C}_\sigma)$.*

Preuve. Puisque $F : M \to \mathcal{M}$ est une normalisation $(c_\sigma, c_{\mathcal{M}})$-analytique, $h = F^*g$ est bien définie sur $\overline{M}_{\text{reg}} \times \overline{M}_{\text{reg}} \backslash \Delta_{\overline{M}_{\text{reg}}}$ où $\overline{M}_{\text{reg}} = F^{-1}\left(\text{Reg}\,\overline{Q}\right)$, symétrique et pour tout $x \in \overline{M}$, $h_x = h(.,x)$ est harmonique sur $\overline{M}_{\text{reg}}\backslash bM \cup \{x\}$, continue sur $\overline{M}_{\text{reg}}\backslash\{x\}$ et $i\partial^\sigma\overline{\partial^\sigma}h$ est le courant de Dirac δ_x de M en x. Lorsque $p \in F^{-1}\left(\text{Sing}\,\overline{\mathcal{M}}\right) \cap M$ et V est un voisinage connexe de p dans M, $B = F(V)$ est une branche intérieure de $\overline{\mathcal{M}}$ en $q = F(p)$ et on peut poser $g_{M,p} = F^*g_{p,B}$. La proposition 11 implique que la fonction g_M ainsi construite est une fonction de Green pour M. ■

Nous pouvons donc appliquer les méthodes de la section 4.2.1 à g_M puis transférer leurs résultats sur $\mathcal{M}$ par image directe. Cependant, $\mathcal{M}$ et θ^σ_c devant être calculés avant que M ne puisse l'être, il est plus pertinent d'appliquer ces méthodes directement à $\mathcal{M}$ et g. Etant donné que $b\mathcal{M}$ est lisse, les espaces de Sobolev sur $b\mathcal{M}$ se définissent comme d'habitude et la discussion de la section 4.2.1 peut être suivie littéralement. Ainsi, les opérateurs T_g, D_g, $A^\pm_g$, N_g etc. sont définis comme ci-dessus (avec $\mathcal{M}$ au lieu de of S) et le lemme 9 demeure. On peut maintenant prouve le théorème 5.

Preuve du théorème 5. Considérons $u \in C^0(bM)$ et $\widetilde{u}$ son prolongement C_σ-harmonique à M. Puisque $d = \overline{\partial}^\sigma + \partial^\sigma$ et $d^\sigma = i\left(\overline{\partial}^\sigma - \partial^\sigma\right)$, il vient $2i\partial^\sigma\overline{\partial}^\sigma = dd^\sigma$ et $\widetilde{u}$ est l'unique solution dans $C^0\left(\overline{M}\right)$ du système

$$i\partial^\sigma\overline{\partial}^\sigma U = 0 \;\;\&\;\; U|_{bM} = u.$$

et $\theta^\sigma_c u$ est donc la restriction à bM de la $(1,0)$-forme $\mathcal{C}_\sigma$-holomorphe $\partial^\sigma\widetilde{u}$. Par définition, lorsque B est une branche B de $\mathcal{M}$, il existe un (unique) ouvert V de M tel que $F_B = F\Big|^B_V$ est un $(c_\sigma, c_{\mathcal{M}})$-biholomorphisme. Puisque $\widetilde{u}$ est lisse, on en déduit que $F_*\widetilde{u}$ est lisse le long de toute branche B de M et que $\left(\partial\overline{\partial}(F_B)_*\widetilde{u}\right)|_B = (F_B)_*\overline{\partial}^\sigma\partial^\sigma\widetilde{u} = 0$. Ainsi, $\widetilde{u} \circ (F_{\text{Reg}\,\mathcal{M}})^{-1}$ se prolonge harmoniquement le long de toute branche de $\mathcal{M}$ et définit sur $\mathcal{M}$ une distribution $\widehat{w}$ qui est l'unique solution continue le long de toute branche de $\mathcal{M}$ du problème

$$i\partial\overline{\partial}W = 0 \;\;\&\;\; W|_{b\mathcal{M}} = f_*u \tag{22}$$

Ceci livre $F^*W = \widetilde{u}$ ce qui signifie que $\widetilde{u}\,|_V = \left(F \Big|_V^{F(V)}\right)^* W$ lorsque $V \subset M$ est tel que $F\,(V)$ est une branche de $\mathcal{M}$. Le lemme 8 implique par ailleurs que $F : M \to \mathcal{M}$ est holomorphe de (M, c_σ) vers $(\mathcal{M}, c_{\mathcal{M}})$. Etant donné que les opérateurs différentiels complexes de ces surfaces de Riemann (nodales) sont ∂^σ et ∂, on obtient $\widetilde{u} = \partial^\sigma F^* W = F^* \partial W$ et W est le prolongement harmonique simple $\widehat{f_* u}$ de $f_* u$ à $\mathcal{M}$. Ceci livre donc $\theta_c^\sigma u = (F^* \partial \widehat{f_* u})\,|_{bM}$.

Le noyau de B_g (sans sa version nodal) est un sous-espace de dimension finie de $C^\infty\,(b\mathcal{M})$ et quand $u \in C^\infty\,(bM, \mathbb{R})$ est telle que $f_* u$ lui est orthogonale, toute solution w de l'équation $f_* u = w + A_g^- w$ est dans $C^\infty\,(b\mathcal{M}, \mathbb{R})$ et livre $\widehat{f_* u}$ sous la forme $T_g^+ w$. Ainsi, $\theta_c^\sigma u = \left(F^* \partial T_g^+ w\right)|_{bM}$. ■

Remarque. La preuve ci-dessus contient le fait que pour tout $u \in C^\infty\,(bM)$, $\widetilde{u} = F^* \widehat{f_* u}$ où $\widetilde{u}$ est le prolongement $\mathcal{C}_\sigma$-harmonique de u à M et $\widehat{f_* u}$ est prolongement harmonique simple de $f_* u$ à $\mathcal{M}$.

5 Preuve du théorème d'unicité 3

Dans cette section, on prouve le théorème 3 et comme mentionné dans la section 2, on complète ainsi la preuve de [16, Theorem 1] ainsi que celle du résultat Henkin-Santacesaria cité par le théorème 2. L'une des étapes de la preuve du théorème 3 utilise [20] dont les lemmes 11 à 14 avaient été écrits au départ par l'auteur de ces lignes pour donner une preuve complète du théorème ci-dessus.

On note (U_ℓ) et (U'_ℓ) les extensions harmoniques de u à M et M' respectivement. Par hypothèse, $F = [\partial U] : \overline{M} \longrightarrow \mathbb{CP}_n$ et $F' = [\partial U'] : \overline{M'} \longrightarrow \mathbb{CP}_n$ sont bien définies, coïncident sur γ et $f = F\,|_\gamma = F'\,|_\gamma$ plonge γ dans $\{w_0 \neq 0\}$ où $w_0, ..., w_n$ sont les coordonnées homogènes standards de $\mathbb{CP}_n$. On munit $\delta = f\,(\gamma)$ de l'orientation de γ transportée par f. Les hypothèses de régularité faites sur M et M' impliquent que F et F' sont de classe C^1. On pose

$$\begin{gathered} Y = F\,(M) \backslash \delta, \;\; \Gamma = F^{-1}\,(\delta)\,, \\ \widetilde{M} = M \backslash \Gamma, \quad \widetilde{F} = F \Big|_{M\backslash\Gamma}^{\mathbb{CP}_n\backslash\delta}\,, \\ \overline{M}_r = \{dF \neq 0\} \quad \& \quad M_s = \{dF = 0\} \end{gathered}$$

Puisque f est un plongement de γ dans $\{w_0 \neq 0\}$ qui est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, il existe un voisinage G ouvert de γ dans $\overline{M}$ tel que $F_G = F\,|_G$ soit un plongement de G dans $\mathbb{C}^2$; l'orientation de δ est donc aussi celle induite par celle naturelle de G. Lorsque A est un espace topologique, on note $CC\,(A)$ l'ensemble des composantes connexes de A. Si $A \subset \overline{M}$ et $B \subset F\,(A)$, on note $\nu\,(F, A, B)$ le degré de $F\,\big|_A^B$ quand il existe. On adopte pour M' des notations similaires à celle prises pour M. La notation $\mathcal{D}_{p,q}\,(U)$ désigne l'espace des (p,q)-formes de classe C^∞ à support compact dans un ouvert U d'une variété complexe. La notation $\mathcal{H}^d\,(E)$ désigne la mesure d-dimensionnelle de Hausdorff d'un ensemble E quand ceci a un sens.

Lemme 13 *$\Gamma \backslash \gamma$ est un compact de M et Y est une courbe complexe de $\mathbb{CP}_n \backslash \delta$.*

Preuve. Puisque F_G plonge G dans $\mathbb{C}^2$, $\Gamma \cap G = \gamma$ et $\Gamma \backslash \gamma = \Gamma \cap \left(\overline{M} \backslash G\right)$ est un compact contenu dans M. En particulier, $\widetilde{M} = M \backslash \Gamma$ est une surface de Riemann ouverte. Par construction, $\widetilde{F}$ est propre car si L est un compact de $\mathbb{CP}_n \backslash \delta$, $\widetilde{F}^{-1}\,(L)$ est un compact de $\overline{M}$ qui ne rencontre pas Γ et donc est un compact de $\widetilde{M}$. Par un théorème de Remmert, inutile dans le cas très simple $n = 1$, $Y = \widetilde{F}(\widetilde{M})$ est un sous-ensemble analytique de $\mathbb{CP}_n \backslash \delta$. ■

Lemme 14 *$F_*\,[M]$ est un courant normal positif porté par $\overline{Y}$ et $dF_*\,[M] = [\delta]$.*

Preuve. Si χ est une forme lisse à support compact de $\mathbb{CP}_n$,

$$\langle F_* [M], \chi\rangle = \int_M F^* \chi.$$

$F_* [M]$ est donc un courant de bidegré $(1,1)$ porté par $\overline{F(M)}$ c'est-à-dire $\overline{Y}$. Il est positif car si $\chi \in \mathcal{D}_{1,1}(\mathbb{CP}_n)$ est positive, $(F^*\chi)|_M$ est une $(1,1)$-forme positive de M car F est holomorphe et donc $\langle F_* [M], \chi\rangle \geqslant 0$. Soit $\xi \in C^\infty(\mathbb{CP}_n)$ tel que $\chi = \xi \omega_{FS}$ où $\omega_{FS} = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial} \ln |w|^2$ est la $(1,1)$-forme qui induit la métrique de Fubini-Study. On a alors

$$|\langle F_* [M], \chi\rangle| \leqslant \int_M |\xi| F^* \omega_{FS} \leqslant \|\xi\|_\infty \int_M F^* \omega_{FS}$$

Comme $\|\chi\| = \sup_{p\in\mathbb{CP}_n} \|\chi_p\|$ et

$$\begin{aligned} \|\chi_p\| &= \max_{s,t\in T_p\mathbb{CP}_n,\ \|s\|_{FS}=\|t\|_{FS}=1} |\chi_p.(s,t)| \\ &= |\xi(p)| \max_{s,t\in T_p\mathbb{CP}_n,\ \|s\|_{FS}=\|t\|_{FS}=1} \left|(\omega_{FS})_p . (s,t)\right| = |\xi(p)|, \end{aligned}$$

on obtient que la masse de $F_* [M]$ est finie et au plus $\int_M F^*\omega_{FS}$. Si $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{CP}_n)$,

$$\langle dF_* [M], \chi\rangle = \langle F_* [M], d\chi\rangle = \int_M F^* d\chi = \int_M dF^* \chi = \int_\gamma F^* \chi = \langle F_* [\gamma], \chi\rangle$$

Autrement dit, $dF_* [M] = F_* [\gamma] = [\delta]$. En particulier, la masse de $dF_* [M]$ est finie ; $F_* [M]$ est un courant normal porté par $\overline{Y}$. ■

Lemme 15 $F_* [M] \big|_{\mathbb{CP}_n \backslash \delta}$ *est une chaîne holomorphe positive de* $\mathbb{CP}_n \backslash \delta$ *portée par* Y.

Preuve. Etant donné que $T = F_* [M]$ est porté par $\overline{Y}$ et que $Y = \overline{Y} \backslash \delta$, $S = T\big|_{\mathbb{CP}_n\backslash\delta}$ est un courant normal et donc localement rectifiable de $\mathbb{CP}_n \backslash \delta$, sans bord et porté par Y. D'après le théorème de structure 2.1 de [12], il existe donc $(n_j)_{1\leqslant j\leqslant N} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tel que $S = \sum_{1\leqslant j\leqslant N} n_j [Y_j]$ où (Y_j) est la famille des composantes irréductibles de Y. S étant par ailleurs un courant positif d'après le lemme 14, les n_j sont des entiers naturels. ■

Lemme 16 $F_* [M] = F_* [M']$ *et* $Y' = Y$.

Preuve. D'après le lemme 14, le courant $T = F_* [M] - F'_* [M']$ est un courant normal sans bord de bidegré $(1,1)$ porté par $\overline{Y} \cup \overline{Y'}$. Il est par conséquent de la forme $\sum_{1\leqslant j\leqslant N} n_j [Z_j]$ où $(n_j) \in (\mathbb{Z}^*)^{\mathbb{N}}$ et les Z_j sont des courbes complexes compactes irréductibles de $\mathbb{CP}_n$ contenues dans $\overline{Y} \cup \overline{Y'}$. Soit Z l'une de ces courbes. $Z \cap \delta \neq \varnothing$ car sinon $F^{-1}(Z)$ est une courbe complexe compacte contenue dans M ou M', ce qui est exclu. L'une des composantes connexes β de δ est donc contenue dans Z ; on munit β de l'orientation induite par δ. β étant lisse, il existe dans Z une surface de Riemann (lisse) B telle que $B\backslash\beta$ est contenue dans $(\mathbb{CP}_n\backslash\delta) \cap \operatorname{Reg} \overline{Y} \cap \operatorname{Reg} \overline{Y'}$ et n'a que deux composantes connexes B^- et B^+.

Par construction, B^- est une surface de Riemann ouverte connexe contenue dans la courbe complexe $Y \cup Y'$ et donc l'un au moins des deux nombres $\mathcal{H}^2(B^- \cap Y)$ ou $\mathcal{H}^2(B^- \cap Y')$ est strictement positif, par exemple $\mathcal{H}^2(B^- \cap Y) > 0$. Puisque B^- est connexe, ceci implique[(3)] que $B^- \subset Y$. Etant donné que β est contenu dans les bords de Y et B, on en déduit quitte à diminuer B, que $Y \cap B \subset Z$ et donc que $Y \cap B \subset B^- \cup B^+$.

Supposons que $\mathcal{H}^2(B^+ \cap Y) = 0$. Alors, comme $B \subset \operatorname{Reg} \overline{Y}$, $B^+ \cap Y = \varnothing$, $Y \cap B = B^-$ et, par force, $B^+ \subset Y'$. Supposons en outre que $\mathcal{H}^2(B^- \cap Y') = 0$, alors, quitte à diminuer B, on a de la même façon qu'auparavant $Y' \cap B = B^+$ et donc $d[Y] = -d[Y']$ près de β. Ceci est incompatible avec le fait que $F_*[M]$ et $F'_*[M']$ sont deux chaînes holomorphes positives de $\mathbb{CP}_n \backslash \delta$ portées respectivement par Y et Y'. Par conséquent, $\mathcal{H}^2(B^- \cap Y') > 0$ et donc $B^- \subset Y'$. D'où $B \subset Y'$ puis $Z \subset Y'$, ce qui est de nouveau une contradiction. Revenant à notre première supposition, on en déduit que $\mathcal{H}^2(B^+ \cap Y) > 0$ et donc $B \subset Y$, ce qui est de nouveau absurde. Le lemme est prouvé. ■

Lemme 17 *Lorsque* $y \in \overline{Y}$, $\overline{M_y} = F^{-1}(\{y\})$ *est un ensemble fini et* $\nu : \overline{Y} : y \mapsto \operatorname{Card} \overline{M}_y$ *est bornée.*

Preuve. Supposons que $F^{-1}(\{y\})$ est infini pour un un certain $y \in \overline{Y}$. Si $F^{-1}(\{y\})$ possède un point d'accumulation dans M, $F = y$ sur une composante connexe de M et donc sur un ouvert non vide de γ. Dans le cas contraire, $F^{-1}(\{y\})$ possède un point d'accumulation dans γ et dF s'annule en ce point. Dans les deux cas, ceci contredit que $F|_\gamma$ est un plongement.

Supposons que ν ne soit pas bornée. Il existe alors $(y_m) \in \overline{Y}^{\mathbb{N}}$ telle que $(\nu_m) = (\nu(y_m))$ a $+\infty$ comme limite et (y_m) converge vers $y_* \in \overline{Y}$. Puisque $\overline{M}$ est compacte, il existe dans $\overline{M}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $x_*^0 \in F^{-1}(\{y_*\})$ et une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $y_{\varphi(m)} = F(x_m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Si $dF\,\big|_{x_*^0} \neq 0$, il existe un voisinage ouvert U_0 de x_*^0 dans $\overline{M}$ tel que $V_0 = F(U_0)$ est une surface de Riemann (à bord si $x_*^0 \in \gamma$) et $F\big|_{U_0}^{V_0}$ est un biholomorphisme (de surfaces de Riemann à bord si $x_*^0 \in \gamma$) ; on pose $m_*^0 = 1$ dans ce cas. Si $dF\,\big|_{x_*^0} = 0$, $x_0^* \notin \gamma$ et on peut choisir des coordonnées holomorphes $(\zeta_1, ..., \zeta_n)$ pour $\mathbb{CP}_n$ au voisinage de y_* tel que l'ordre d'annulation m_* de $(d(\zeta_1 \circ F), ..., d(\zeta_n \circ F))$ en x_*^0 est aussi celui de $d(\zeta_1 \circ F)$ en x_*^0. Dans ce cas, il existe un voisinage ouvert U_0 de x_*^0 dans M tel que si $y \in V_0 = F(U_0)$, $\zeta_1(F(y))$ a exactement m_*^0 antécédents par $\zeta_1 \circ F$ dans U_0, deux à deux distincts si $y \neq y_*$; si $y \in V_0 = F(U_0)$, y a donc au moins un antécédent par F dans U_0 et au plus m_*^0.

Supposons que nous disposons dans $F^{-1}(y_*)$ de $k+1$ points deux à deux distincts $x_*^0, ..., x_*^k$ et de voisinages ouverts $U_0, ..., U_k$ de ces points dans $\overline{M}$ tels que pour tout $j \in \{1, ..., k\}$, $1 \leqslant \operatorname{Card} F^{-1}(y_*) \cap U_j \leqslant m_*^j$ et $U_j \subset \overline{M} \backslash V_{j-1}$ où $V_{j-1} = \underset{1 \leqslant \ell \leqslant j-1}{\cup} U_\ell$. Alors $\operatorname{Card} F^{-1}(y_*) \cap V_k \leqslant \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant k} m_*^j$ et puisque $\overline{M} \backslash V_{k+1}$ est compact, on peut donc trouver une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $F^{-1}\left(y_{\varphi(m)}\right) \cap \left(\overline{M} \backslash V_{k+1}\right)$ contient au moins un point x_m^{k+1} qui, lorsque m tend vers $+\infty$, tend vers un point $x_*^{k+1} \in F^{-1}(\{y_*\})$. Comme précédemment, on peut alors trouver un entier m_*^{k+1} et un voisinage U_{k+1} de x_*^{k+1} dans $\overline{M}$ tels que $1 \leqslant \operatorname{Card} F^{-1}(y_*) \cap U_k \leqslant m_*^{k+1}$.

On construit ainsi par récurrence une suite $\left(x_*^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ de points deux à deux distincts de $\overline{M}_y$, ce qui est impossible. ν est donc bornée. ■

Lemme 18 *Soit* $h \in \mathcal{O}(M) \cap C^0\left(\overline{M}\right)$. *Alors* $F_* h$ *est holomorphe et bornée sur* $\operatorname{Reg} Y$ *et* $F'^* F_* h = (F_* h) \circ F' \in \mathcal{O}(M') \cap C^0\left(\overline{M'}\right)$

[3]Puisque $B^- \cap \delta = \varnothing$, $B^- = (B^- \cap Y) \cup \left(B^- \backslash \overline{Y}\right)$. $B^- \cap Y$ est un ouvert de B^- car par construction, $B^- \subset \operatorname{Reg} \overline{Y} \cap \operatorname{Reg} \overline{Y'}$. Il est non vide par hypothèse. Donc $B^- = B^- \cap Y \subset Y$.

Preuve. Par définition F_*h est la fonction définie sur Y par $(F_*h)(y) = \sum_{x\in F^{-1}(y)} h(x)$. Soit $y_* \in (\operatorname{Reg} Y)\backslash F(\{dF=0\})$. Posons $F^{-1}(y_*) = \{x_{*1}, ... x_{*k}\}$ où $k = \nu(y)$. Il existe un voisinage B de y dans $\operatorname{Reg} Y$ tel que pour tout $j \in \{1,...,k\}$, il existe un voisinage A_j de x_{*j} dans M pour lequel $F_j = F\Big|_{A_j}^{B}$ est un biholomorphisme. Supposons que $(y_\nu) \in B^{\mathbb{N}}$ converge vers y_* et $\operatorname{Card} F^{-1}\{y_n\} \geqslant k$ pour tout n. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe donc $a_n \in M\backslash \left\{F_1^{-1}(y_n), ..., F_k^{-1}(y_n)\right\}$ tel que $F(a_n) = y_n$. Quitte à considérer une sous-suite, (a_n) converge vers un point a de $\overline{M}$ qui vérifie $F(a) = y_*$. Etant donné que $y \in Y = F(M)\backslash F(bM)$, $a \notin bM$ et il existe $j \in \{1,...,k\}$ tel que $a = x_{*j}$. Pour n assez grand, a_n et $F_j^{-1}(y_n)$ sont alors deux points distincts de A_j qui ont la même image par F, à savoir y_n. Ceci est absurde. Donc, $F_*h = \sum_{1\leqslant j\leqslant k} h\circ F_j^{-1}$ est holomorphe au voisinage de. De plus, $|F_*h| \leqslant k\|h\|_\infty$ et $k = \nu(y)$. F_*h est donc bornée d'après le lemme 17. Etant donné que $(\operatorname{Reg} Y)\cap F(\{dF=0\})$ est fini, F_*h se prolonge holomorphiquement à $\operatorname{Reg} Y$. Ceci implique que $F'^*F_*h = (F_*h)\circ F'$ est holomorphe et est bornée sur $M'\backslash F'^{-1}(\operatorname{Sing} Y)$. Comme $F'^{-1}(\operatorname{Sing} Y)$ est un ensemble fini, F'^*F_*h se prolonge holomorphiquement à M'. ■

Lemme 19 *Si $\omega' \in C^{1,0}\left(\overline{M'}\right)\cap\Omega^{1,0}(M')$, il existe $\omega \in C^{1,0}\left(\overline{M}\right)\cap\Omega^{1,0}(M)$ telle que $\omega|_\gamma = \omega'|_\gamma$.*

Preuve. Il s'agit de constater que $\omega'|_\gamma$ vérifie la condition des moments quand γ est vue comme le bord de M. Soit donc $h \in \mathcal{O}(M)\cap C^0\left(\overline{M}\right)$. D'après le lemme 18, $g = F'^*F_*h \in \mathcal{O}(M')\cap C^0\left(\overline{M'}\right)$. Puisque $f_*[\gamma] = [\delta]$,

$$\begin{aligned}\int_\gamma h\omega' &= \int_\gamma F^*F_*(h\omega') = \int_\delta F_*(h\omega') \\ &= \int_\gamma (F'^*F_*)(h\omega') = \int_{M'} d(F'^*F_*)(h\omega') = 0.\end{aligned}$$

car $F'^*F_*h \in \mathcal{O}(M')\cap C^0\left(\overline{M'}\right)$ et $\omega' \in \Omega^{1,0}(M')$. ■

Preuve du théorème 3. 3 Puisque par hypothèse $\left[(\partial U_\ell)_{0\leqslant \ell\leqslant n}\right]$ est une application bien définie de $\overline{M}$ dans $\mathbb{CP}_n$, on peut utiliser le lemme 12 d'adjonction de [20] qui bien, qu'écrit pour le cas particulier $n=2$, s'applique sans changement pour n quelconque dans $\mathbb{N}^*$: il existe des fonctions $U_{n+1}, ..., U_N$ harmoniques sur M et continues sur $\overline{M}$ telles que $\left[(\partial U_\ell)_{0\leqslant\ell\leqslant N}\right]$ est un plongement de M dans $\mathbb{CP}_N$. De même, il existe des fonctions $U'_{N+1}, ..., U'_{N'}$ harmoniques sur M' et continues sur $\overline{M'}$ telles que $\left[(\partial U'_\ell)_{\ell\in\{0,..,n,N+1,..,N'\}}\right]$ est un plongement de M' dans $\mathbb{CP}_{n+N'-N}$. Lorsque $\ell \in \{N+1,...,N+N'\}$, le lemme 19 donne que $(\partial U'_\ell)|_{\gamma'}$ se prolonge à M en une $(1,0)$-forme holomorphe Σ_ℓ. De même, lorsque $\ell \in \{n+1,...,N\}$, $(\partial U_\ell)|_\gamma$ se prolonge à M' en une $(1,0)$-forme holomorphe Σ'_ℓ. Considérons alors

$$\begin{aligned}\Sigma &= (\partial U_0, ..., \partial U_n, \partial U_{n+1}..., \partial U_N, \Sigma_{N+1}, ..., \Sigma_{N+N'}) \overset{d\acute{e}f}{=} (\Sigma_\ell)_{0\leqslant\ell\leqslant L} \\ \Sigma' &= \left(\partial U'_0, .., \partial U'_n, \Sigma'_{n+1}, ..., \Sigma'_{N'}, \partial U'_{N+1}, ..., \partial U'_{N+N'}\right) \overset{d\acute{e}f}{=} (\Sigma'_\ell)_{0\leqslant\ell\leqslant L}\end{aligned}$$

Par construction Σ et Σ' coïncident sur γ. Notons $(w_\ell)_{0\leqslant\ell\leqslant L}$ les coordonnées naturelles de $\mathbb{C}^{L+1}$. Lorsque $0 \leqslant \ell_* \leqslant n$, $[\Sigma]\,|_{\{\partial U_\ell\neq 0\}}$ s'écrit $(\partial U_\ell/\partial U_{\ell_*})_{\ell\neq\ell^*}$ dans les coordonnées naturelles de $\mathbb{C}^L$ identifié à $\{w_{\ell_*}\neq 0\}$. Notons p_{ℓ_*} la projection naturelle de $\mathbb{C}^L$ sur $\mathbb{C}^N$, $(z_\ell)_{\ell\neq\ell_*} \mapsto (z_\ell)_{0\leqslant\ell\leqslant N,\ \ell\neq\ell_*}$. L'application $(\partial U_\ell/\partial U_{\ell_*})_{0\leqslant\ell\leqslant N,\ \ell\neq\ell_*}$ est par construction un plongement de $\{\partial U_\ell\neq 0\}$ dans

$\mathbb{C}^N$. $[\Sigma]$ est par ailleurs injective car $\overline{M} = \underset{0\leqslant \ell\leqslant n}{\cup} \{\partial U_\ell \neq 0\}$ et car une relation de la forme $[\Sigma](x) = [\Sigma](y)$ impose $y \in \underset{(\partial U_\ell)_x \neq 0}{\cap} \{\partial U_\ell \neq 0\}$. $[\Sigma]$ est donc un plongement de $\overline{M}$ dans $\mathbb{CP}_L$. De même, $[\Sigma']$ est un plongement de M' dans $\mathbb{CP}_L$. Remarquant que la preuve du lemme 14 n'utilise pas que F est une application canonique, c'est-à-dire de la forme $[\partial U]$, ou en utilisant le lemme 8 de [20] qui montre que Σ et Σ' sont forcément de ce type, on en conclut que $\Sigma(M) = \Sigma'(M')$ puis que M et M' sont rendues isomorphes par une application dont la restriction à γ est l'identité. ■

6 Reconstruction d'une surface de Riemann

Comme expliqué dans la section 2, une étape de la reconstruction d'une structure de conductivité deux dimensionnel générale est le cas particulier de la reconstruction d'une surface de Riemann à partir de son opérateur de Dirichlet-Neumann qui elle-même se ramène à la reconstruction à partir de son bord orienté ∂Q d'un domaine relativement compact Q d'une surface de Riemann nodale ouverte $\widetilde{Q}$ de $\mathbb{CP}_2$.

Cette dernière tâche est accomplie en utilisant les indicatrices de Cauchy-Fantapié de Q définies par la formules (4). Le théorème 39 de la section 6.4 et la proposition 41 qui sont les principaux résultats de la section 6.5, apportent des nouveautés sur la caractérisation et l'unicité des décompositions en sommes d'ondes de chocs.

Pour la commodité du lecteur, on liste ici certaines des notations utilisées dans cette section. U, L_z et G_k sont définis avec (4) ; Q^∞, q^∞, b^q, E^∞, U_{reg}, Z, Z_{reg}, Z^+, Z^+_{reg}, ρ, $\widetilde{\rho}$ sont définis au début de la section 6.1 ; $N_{h,k}$ et $S_{h,k}$: (25) ; $\mathbb{C}[X,Y)$ et $\mathbb{C}_k[X,Y)$: proposition 21 ; N_k^Q et S_k^Q : fin de la section 6.1 ; P_k : (29) ; B^∞ et $p_{k,\nu}$: (31) ; δ, $G_{k,m}$ et $\widetilde{G}_{k,m}$: lemme 23 ; $(\partial Q)_0$: début de la section 6.2 ; e_m, κ_m, κ_m^r, L : (38) ; $S_{k,r}$ et $\mathcal{P}$:définition 28 ; H, $\mathcal{E}$, Π, $\mathcal{F}$: définition 30 ; $\mathcal{F}_k$: corollaire 33.

6.1 Décomposition des indicatrices de Cauchy-Fantapié

Cette section précise des notations de la section 6 et rappelle un résultat de Dolbeault and Henkin qui donne une décomposition des indicatrices de Cauchy-Fantapié associées aux intersections des droites L_z avec la surface de Riemann nodale Q à reconstruire.

Sans perte de généralité, on suppose que $bQ \subset \{w_0w_1w_2 \neq 0\}$. A partir de maintenant, on fait en outre l'hypothèse générique et donc peu restrictive, que

$$(0:0:1)\,,(0:1:0) \notin Q^\infty = Q \pitchfork \{w_0 = 0\} \subset \operatorname{Reg} Q$$

où $\pitchfork$ désigne une intersection transverse. Dans cette situation, $u_0 = \frac{w_0}{w_2}$ peut être choisie comme coordonnée pour Q au voisinage des points de Q^∞ et il existe pour chaque $q \in Q^\infty$ une fonction g^q holomorphe au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ telle qu'au voisinage de q dans $\mathbb{CP}_2$, Q coïncide avec $\{(u_0 : u_1 : 1)\,;\ u_1 = g^q(u_0)\}$. On note alors $(\Sigma g_\nu^q u_0^\nu)$ la série de Talyor de g^q en 0. Pour $q \in Q^\infty$, on a donc

$$q = (0 : g_0^q : 1) \overset{déf}{=} (0 : b^q : 1)\,.$$

On pose aussi et

$$E^\infty = \mathbb{C} \times \{-1/b^q;\ q \in Q^\infty\}\,.$$

On note U l'ouvert de $\mathbb{C}^2$ formé par les points où les G_k sont définies. Lorsque X est une partie de U, on note X_{reg} l'ouvert de $\mathbb{C}^2$ formé par les points $z = (x,y)$ de X tels que Q

et $L_z = \{w \in \mathbb{CP}_2;\ xw_0 + yw_1 + w_2 = 0\}$ se coupent transversalement Q en chaque point de $Q \cap L_z$; on pose $X_{\text{sing}} = X \backslash X_{\text{reg}}$ si bien que U_{sing} est un sous-ensemble analytique de U.

Bien que U puisse être compliqué, U contient un ouvert commode. Posons

$$\rho = \max\left(\max_{w\in bQ} |w_2/w_1|, 5\frac{\max\limits_{w\in bQ} |w_2/w_0|}{\min\limits_{w\in bQ} |w_1/w_0|}\right) \ \ \& \ \ \widetilde{\rho} = \max\{\rho,\ |1/b^q|\,;\ q \in Q^\infty\}, \tag{23}$$

et sélectionnons un réel α tel que $0 < \alpha < \frac{1}{4}\min\limits_{w\in bQ} |w_1/w_0|$. Alors les ensembles ci-dessous jouent un rôle essentiel :

$$\begin{aligned} Z &= \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2;\ \rho < |y|\ \&\ |x| < \alpha\,|y|\right\} \ \ \& \ \ Z^+ = Z \backslash (\mathbb{C} \times \mathbb{R}_-) \\ \widetilde{Z} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2;\ \widetilde{\rho} < |y|\ \&\ |x| < \alpha\,|y|\right\} \ \ \& \ \ \widetilde{Z}^+ = \widetilde{Z} \backslash (\mathbb{C} \times \mathbb{R}_-) \end{aligned} \tag{24}$$

Remarque. Les hypothèses $(0:1:1), (0:0:1) \notin Q$ (qui assure que $Q^\infty \subset \{w_1 w_2 \neq 0\}$) et $Q^\infty \subset \operatorname{Reg} Q$ simplifient quelques énoncés et calculs mais ne sont pas vraiment obligatoires. Pour certaines formules, nous indiquons une version quand $Q^\infty \cap \operatorname{Sing} Q \neq \varnothing$.

Le lemme ci-dessous assure que le procédé de reconstruction amorcé avec la proposition 21 aboutit bien à la connaissance complète de Q ; pour le reste de cet article, $\mathbb{D}$ est le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.

Lemme 20 *Pour tout $w_* \in Q \cap \{w_0 \neq 0\}$ et tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $z \in U_{\text{reg}} \cap \left(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \backslash R\overline{\mathbb{D}}\right)$ tel que $w_* \in L_z$.*

Preuve. Soient $R \in [\widetilde{\rho}, +\infty[$ et $w_* \in Q$ tel que $w_{*0} \neq 0$. Posons $\zeta_* = \left(\frac{w_{*1}}{w_{*0}}, \frac{w_{*2}}{w_{*0}}\right)$. Les points $z = (x,y)$ de $\mathbb{C}^2$ tels que $w_* \in L_z$ forment la droite $L^*_{w_*}$ d'équation $x + y\zeta_{*1} + \zeta_{*2} = 0$. Si $L^*_{w_*}(R) = L^*_{w_*} \cap \left(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \backslash R\overline{\mathbb{D}}\right)$ ne rencontre pas U, c'est que pour tout $y \in \mathbb{C} \backslash R\overline{\mathbb{D}}$, il existe dans bQ d'un élément $w = (1 : \zeta_1 : \zeta_2)$ tel que $w \in L_{(-y\zeta_{*1} - \zeta_{*2}, y)}$, ce qui implique $y = -\frac{\zeta_{*2} - \zeta_2}{\zeta_{*1} - \zeta_1}$. Etant donné que bQ est une courbe réelle, $\mathbb{C} \backslash R\overline{\mathbb{D}}$ ne peut être contenu dans l'image de bQ par $\zeta \mapsto -\frac{\zeta_{*2} - \zeta_2}{\zeta_{*1} - \zeta_1}$. Ainsi, $L^*_{w_*}(R) \cap U$ est un ouvert non vide de $L^*_{w_*}$.

Recouvrons $Q \cap \{w_0 \neq 0\}$ par une famille localement finie $\mathcal{B}$ de branches de Q. Pour chaque branche $B \in \mathcal{B}$, on se donne une fonction holomorphe f définie sur un ouvert V_B de $\mathbb{C}^2$ tel que

$$B = \{(1 : \zeta_1 : \zeta_2)\,;\ \zeta \in V_B\ \&\ f_B(\zeta) = 0\}$$

et df_B ne s'annule pas sur B. Notons $E(R)$ l'ensemble des z de $L^*_{w_*}(R)$ tels que L_z et Q soient tangentes en un point de $L_z \cap Q$. Un point $z = (x,y)$ de $\mathbb{C}^2$ appartient à $E(R)$ lorsque $|y| > R$ et qu'il existe $B \in \mathcal{B}$ et $\zeta \in V_B$ vérifiant les conditions

$$\begin{aligned} f_B(\zeta) &= 0, \ \ x + y\zeta_{*1} + \zeta_{*2} = 0, \ \ x + y\zeta_1 + \zeta_2 = 0, \\ \frac{\partial f_B}{\partial \zeta_2}(\zeta) &\neq 0, \ \ y = \frac{\partial f_B/\partial \zeta_1}{\partial f_B/\partial \zeta_2}(\zeta), \ \ x = -\frac{\partial f_B/\partial \zeta_1}{\partial f_B/\partial \zeta_2}(\zeta)\,\zeta_{*1} - \zeta_{*2} \end{aligned}$$

Lorsque $\zeta \neq \zeta_*$, ceci impose $\zeta_{*1} \neq \zeta_1$ et $-\frac{\partial f_B/\partial \zeta_1}{\partial f_B/\partial \zeta_2}(\zeta) = \frac{\zeta_{*2} - \zeta_2}{\zeta_{*1} - \zeta_1}$. Les points ζ vérifiant cette équation forment donc un sous-ensemble analytique C_B de B. A ce titre, C_B est soit discret, soit égal à B.

Supposons que $C_B = B$ pour un élément B de $\mathcal{B}$. Alors $\partial f_B/\partial \zeta_2$ ne s'annule pas sur V_B et on peut trouver localement une fonction φ telle que $f(\zeta) = 0$ si et seulement si $\zeta_2 = \varphi(\zeta_1)$. La fonction φ vérifie alors $\varphi'(\zeta_1) + \frac{1}{\zeta_{*1}-\zeta_1}\varphi(\zeta_1) = \frac{\zeta_{*2}}{\zeta_{*1}-\zeta_1}$, c'est-à-dire $\left(\frac{1}{\zeta_1-\zeta_{*1}}\varphi(\zeta_1)\right)' = \left(\frac{\zeta_{*2}}{\zeta_1-\zeta_{*1}}\right)'$. D'où $\varphi(\zeta_1) = (\zeta_1 - \zeta_{*1})c + \zeta_{*2}$ où c est une constante. Dans ce cas, B est un ouvert de la droite d'équation $\zeta_2 = (\zeta_1 - \zeta_{*1})c + \zeta_{*2}$. Puisque Q est connexe et n'a que des singularités nodales, ceci implique que Q est elle-même contenue dans cette droite. Il suffit de prendre y suffisamment grand pour obtenir que $L_{(-y\zeta_{*1}-\zeta_{*2},y)}$ ne coupe Q que transversalement. Lorsque C_B est une partie discrète de B, l'ensemble $E(R,B)$ des éléments z de $L^*_{w_*}(R)$ tels que L_z et B soient tangentes en un point de $L_z \cap B$ est contenu, du fait des relations ci-dessus, dans un ensemble discret. Puisque $\mathcal{B}$ est localement finie, on déduit de l'étude de ces deux cas que $L^*_{w_*}(R)$ rencontre $U_{\mathrm{reg}} \cap \left(\mathbb{C} \times \mathbb{C}\backslash R\overline{\mathbb{D}}\right)$. ■

Le point départ de toute cette section est la proposition 21 ci-dessous sur les indicatrices de Cauchy-Fantapié de Q définies par (4). Ce résultat peut être extrait comme cas particulier du théorème II et du lemme 4.2.2 obtenus par Dolbeault et Henkin dans [9] ; leur preuve qui consiste à utiliser la formule de Stokes s'applique sans changement au cas où Q^∞ contient des noeuds de $\overline{Q}$. Dans cet énoncé et ensuite, on utilise les notations suivantes lorsque $h_1, ..., h_p$ sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$N_{h,k} = \sum_{1\leqslant j\leqslant p} h_j^k \ , \ \ S_{h,k} = \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_p\leqslant k} h_{j_1}\cdots h_{j_k}. \tag{25}$$

Les identités de Newton sont que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$N_{h,k} = (-1)^{k-1} kS_{h,k} + \sum_{1\leqslant j\leqslant k-1} (-1)^{k-j-1} S_{h,j}N_{h,k-j} \tag{26}$$

$$S_{h,k} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}N_{h,k} + \frac{1}{k}\sum_{1\leqslant j\leqslant k-1} (-1)^{j-1} S_{h,j}N_{h,k-j} \tag{27}$$

On note $\mathbb{C}[X,Y)$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}(X,Y)$ qui sont des polynômes en X. $\mathbb{C}_k[X,Y)$ désigne l'anneau des polynômes en X de degré au plus k dont les coefficients sont des fractions rationnelles en Y. Une onde de choc est par définition une fonction h holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}^2$ telle que dans le système (x,y) des coordonnées standards

$$\frac{\partial h}{\partial y} = h\frac{\partial h}{\partial x} \tag{28}$$

Proposition 21 (Dolbeault-Henkin, 1997) *Soient $z_* \in U_{\mathrm{reg}}\backslash E^\infty$ et $p = \mathrm{Card}\,(L_{z_*} \cap Q)$. Si U_* est un voisinage suffisamment petit de z_* dans U_{reg}, il existe des ondes de choc $h_1, ..., h_p$ sur U_* dont les images sont deux à deux distinctes telles que pour tout $z \in U_*$,*

$$L_z \cap Q = \{(1 : h_j(z) : -x - yh_j(z))\, ;\ 1 \leqslant j \leqslant p\}.$$

En outre, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $P_k \in \mathbb{C}_k[X,Y)$ tel que pour tout $z \in U_*$

$$G_k(z) = N_{h,k}(z) + P_k(z). \tag{29}$$

De plus, notant η l'injection naturelle de Q dans $\mathbb{CP}_2$, $P_k = \sum_{q\in Q^\infty} \mathrm{Res}\left(\eta^*\Omega_z^k, q\right)$ et

$$\frac{\partial P_k}{\partial Y} = \frac{k}{k+1}\frac{\partial P_{k+1}}{\partial X}.$$

D'un point de vue pratique, la principale difficulté pour extraire des équations (29) les fonctions symétriques des h_j provient des polynômes P_k. [1] contient une méthode quand $q^\infty \in \{1,2\}$. Pour celle proposée dans cet article, il faut commencer par apporter des précisions sur les polynômes P_k.

Lemme 22 *$P_0 = -q^\infty$ où $q^\infty = \operatorname{Card} Q^\infty$ et posant $P_k = \sum\limits_{0 \leqslant m \leqslant k} p_{k,m} X^m$ lorsque $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$p_{k,k} = \frac{1}{(k-1)!} p_{1,1}^{(k-1)} \quad \& \quad p_{k,m} = \frac{k}{m!\,(k-m)} p_{k-m,0}^{(m)}, \quad m \in \{0,..,k-1\} \tag{30}$$

En outre, si on pose

$$B^\infty = \prod_{q \in Q^\infty} (1 + Y b^q) \tag{31}$$

Alors

$$p_{1,1} = \sum_{q \in Q^\infty} \frac{b^q}{1 + Y b^q} = \frac{B^{\infty\prime}}{B^\infty} \tag{32}$$

$$p_{1,0} = -\sum_{q \in Q^\infty} \frac{g_1^q}{1 + Y b^q} = \frac{p_{1,0,1}}{B^\infty} \tag{33}$$

$$p_{k,0} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{q \in Q^\infty} \frac{p_{k,0,j}^q}{(1 + Y b^q)^j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{p_{k,0,j}}{(B^\infty)^j}, k \in \mathbb{N} \tag{34}$$

où les $p_{k,0,j}^q$ sont des polynômes universels en les coefficients du jet d'ordre $k-j+1$ de Q en q et $p_{k,0,j} = \sum\limits_q p_{k,0,j}^q \prod\limits_{q' \neq q} (1 + Y b^{q'})^j$. En particulier, P_k ne dépend pas de z_* et est entièrement déterminé par les $k\,(q^\infty + 1)$ nombres b^q, $p_{k,0,j}^q$, $(q,j) \in Q^\infty \times \{1,...,k\}$.

En outre, P_k admet un développement en série de Laurent de la forme $\sum\limits_{m \leqslant -1} P_{k,m} \otimes Y^m$ où $P_{k,m} \in \mathbb{C}_{k-1}[X]$ lorsque $-1 \geqslant m > -k$ and $P_{k,m} \in \mathbb{C}_k[X]$ lorsque $-k \geqslant m$.

Remarque. Dans le cas où $Q^\infty \cap \operatorname{Sing} Q \neq \varnothing$, la formule (31) devient $B^\infty = \prod\limits_{q \in Q^\infty} (1 + Y b^q)^{\nu(q)}$ où $\nu(q)$ désigne le nombre de branches de Q en q, (32) reste inchangée et dans (33), il faut remplacer g_1^q par $\sum\limits_B g_1^{B,q}$ où la sommation se fait sur un jeu complet de branches de Q en q et $g_1^{B,q} = \left(g^B\right)'(0)$, g^B désignant la fonction holomorphe telle qu'au voisinage de 0, une équation de la branche B est $u_1 = g_1^B(u_0)$.

Preuve. Supposons que (30) soit vérifiée pour un entier k non nul. Alors

$$\begin{aligned}
P_{k+1} &= P_{k+1}(0,Y) + \frac{k+1}{k} \left(\sum_{0 \leqslant m \leqslant k-1} p'_{k,m} \frac{X^{m+1}}{m+1} + p'_{k,k} \frac{X^{k+1}}{k+1} \right) \\
&= p_{k+1,0} + \sum_{0 \leqslant m \leqslant k-1} \frac{k+1}{(m+1)!\,(k-m)} p_{k-m,0}^{(m+1)} X^{m+1} + \frac{1}{k!} p_{1,1}^{(k)} X^{k+1} \\
&= p_{k+1,0} + \sum_{1 \leqslant m \leqslant k} \frac{k+1}{(m+1)!\,(k+1-m)} p_{k+1-m,0}^{(m)} X^m + \frac{1}{k!} p_{1,1}^{(k)}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve (30) par récurrence.

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$ et $z = (x, y) \in U \backslash E^\infty$. Dans les coordonnées affines $(u_0, u_1) = \left(\frac{w_0}{w_2}, \frac{w_1}{w_2}\right)$ de $\mathbb{CP}_2$, Ω_z^k s'écrit

$$\Omega_z^k = \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^k \frac{d\frac{xu_0+yu_1+1}{u_0}}{\frac{xu_0+yu_1+1}{u_0}} = \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^k \left(\frac{xdu_0 + ydu_1}{xu_0 + yu_1 + 1} - \frac{du_0}{u_0}\right).$$

On fixe un point q de Q^∞ et pour simplifier les notations, on écrit g au lieu de g^q (et donc g_ν pour g_ν^q) et u pour u_0 pour quelque temps. Au voisinage de q dans Q, la forme $\eta^* \Omega_z^k$ s'écrit dans la coordonnée u sous la forme

$$\eta^* \Omega_z^k = \left(\frac{(x + yg')\, g^k}{u^k\,(1 + xu + yg)} - \frac{g^k}{u^{k+1}}\right) du.$$

Notant par $\langle f, u^\nu \rangle$ le coefficient de u^ν dans la série de Taylor en 0 d'une fonction f holomorphe au voisinage de 0, on obtient

$$P_k^q\,(z) \overset{déf}{=} \operatorname{Res}\left(\eta^* \Omega_z^k, q\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{(x + yg')\, g^k}{(1 + xu + yg)\, u^k}, 0\right) - \left\langle g^k, u^k \right\rangle.$$

En particulier $P_0^q\,(z) = -1$ et donc $P_0 = -\operatorname{Card} Q^\infty$. Supposons désormais $k \geqslant 1$. Notons alors que

$$\frac{yg'g^k}{1 + xu + yg} = \left(1 - \frac{1 + xu}{1 + xu + yg}\right) g'g^{k-1}$$

et que si $g'g^{k-1} = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n u^n$, $\frac{1}{k}\left(g^k - g_0^k\right) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\alpha_{n-1}}{n} u^n$, ce qui livre

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g^k}{u^{k+1}} du, 0\right) = k\frac{\alpha_{k-1}}{k} = \operatorname{Res}\left(\frac{g'g^{k-1}}{u^k} du, 0\right)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} P_k^q\,(z) &= \operatorname{Res}\left(\frac{xg^k}{(1 + xu + yg)\, u^k}, 0\right) - \operatorname{Res}\left(\frac{1 + xu}{(1 + xu + yg)\, u^k} g'g^{k-1}, 0\right) \\ &= \operatorname{Res}\left(\frac{x\,(g - ug') - g'}{(1 + xu + yg)\, u^k} g^{k-1}, 0\right). \end{aligned}$$

Puisque $g - g_0 = O\,(u)$ et $(x, y) \notin E^\infty$, $1 + yg_0 \neq 0$ et il vient par ailleurs pour u assez petit que

$$\frac{1}{1 + xu + yg} = \frac{(1 + yg_0)^{-1}}{1 + \frac{xu + y(g - g_0)}{1 + yg_0}} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{(1 + yg_0)^n} \left[xu + y\,(g - g_0)\right]^{n-1}.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
&\left[x\left(g-ug'\right)-g'\right]g^{k-1}\left[xu+y\left(g-g_0\right)\right]^{n-1}\\
&=\sum_{m=0}^{n-1}C_{n-1}^{m}g^{k-1}\begin{pmatrix} x^{m+1}y^{n-1-m}\left(g-ug'\right)\left(g-g_0\right)^{n-1-m}u^{m}\\ -g'x^{m}y^{n-1-m}\left(g-g_0\right)^{n-1-m}u^{m}\end{pmatrix}\\
&=\begin{array}{l}\sum\limits_{m=1}^{n}C_{n-1}^{m-1}x^{m}y^{n-m}g^{k-1}\left(g-ug'\right)\left(g-g_0\right)^{n-m}u^{m-1}\\ -\sum\limits_{m=0}^{n-1}C_{n-1}^{m}x^{m}y^{n-1-m}g'g^{k-1}\left(g-g_0\right)^{n-1-m}u^{m}\end{array}\\
&=\begin{array}{l}-y^{n-1}g'g^{k-1}\left(g-g_0\right)^{n-1}+x^{n}g^{k-1}\left(g-ug'\right)u^{n-1}\\ +\sum\limits_{m=1}^{n-1}x^{m}y^{n-1-m}\begin{pmatrix} yC_{n-1}^{m-1}g^{k-1}\left(g-ug'\right)\left(g-g_0\right)\\ -C_{n-1}^{m}g'g^{k-1}u\end{pmatrix}\left(g-g_0\right)^{n-1-m}u^{m-1}\end{array}
\end{aligned}$$

Donc

$P_k^q\left(z\right)$

$$=-\sum_{n=1}^{k}\frac{\left(-1\right)^{n}}{\left(1+yg_0\right)^{n}}\begin{pmatrix} -y^{n-1}\left\langle g'g^{k-1}\left(g-g_0\right)^{n-1},u^{k-1}\right\rangle+x^{n}\left\langle g^{k-1}\left(g-ug'\right),u^{k-n}\right\rangle\\ +\sum\limits_{m=1}^{n-1}x^{m}y^{n-1-m}\left\langle\begin{pmatrix} yC_{n-1}^{m-1}g^{k-1}\left(g-ug'\right)\left(g-g_0\right)\\ -C_{n-1}^{m}g'g^{k-1}u\end{pmatrix}\left(g-g_0\right)^{n-1-m},u^{k-m}\right\rangle\end{pmatrix}$$

D'où $P_k^q\left(z\right)=\sum\limits_{m=0}^{k}p_{k,m}^q\left(y\right)x^m$ avec

$$p_{k,0}^q=\sum_{n=1}^{k}\frac{\left(-1\right)^{n}Y^{n-1}}{\left(1+Yg_0\right)^{n}}\left\langle g'g^{k-1}\left(g-g_0\right)^{n-1},u^{k-1}\right\rangle,\quad p_{k,k}^q=\frac{\left(-1\right)^{k+1}g_0^k}{\left(1+Yg_0\right)^{k}}$$

et pour $1\leqslant m\leqslant k-1$,

$p_{k,m}^q$

$$=-\sum_{n=m+1}^{k}\frac{\left(-1\right)^{n}Y^{n-1-m}}{\left(1+Yg_0\right)^{n}}\left\langle\left(YC_{n-1}^{m-1}g^{k-1}\left(g-ug'\right)\left(g-g_0\right)+C_{n-1}^{m}g'g^{k-1}u\right)\left(g-g_0\right)^{n-1-m},u^{k-m}\right\rangle$$

En particulier,

$$p_{1,0}^q=\frac{-g_1}{1+Yg_0}\quad\&\quad p_{1,1}^q=\frac{g_0}{1+Yg_0}.$$

Par ailleurs, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\left(-1\right)^{n}Y^{n-1}}{\left(1+Yg_0\right)^{n}}=\frac{\left(-1\right)^{n}}{g_0^{n-1}\left(1+Yg_0\right)}\left(1-\frac{1}{1+Yg_0}\right)^{n-1}=\left(-1\right)^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{j-1}C_{n-1}^{j-1}g_0^{-(n-1)}}{\left(1+Yg_0\right)^{j}},$$

D'où

$$
\begin{aligned}
p_{k,0}^{q} &= \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{(1+Yg_0)^{j}} \sum_{n=j}^{k} \frac{(-1)^{n} C_{n-1}^{j-1}}{g_0^{n-1}} \left\langle g' g^{k-1} (g-g_0)^{n-1}, u^{k-1} \right\rangle \\
&= \frac{-g_1^k}{(1+Yg_0)^k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-1)^{j-1}}{(1+Yg_0)^{j}} \sum_{n=j}^{k} \frac{(-1)^{n} C_{n-1}^{j-1}}{g_0^{n-1}} \left\langle g' g^{k-1} (g-g_0)^{n-1}, u^{k-1} \right\rangle
\end{aligned}
$$

On remarque que $\left\langle g' g^{k-1} (g-g_0)^{k-1}, u^{k-1} \right\rangle = g_1 g_0^{k-1} g_1^{k-1} = g_1^k g_0^{k-1}$ et que

$$
\begin{aligned}
&\left\langle g' g^{k-1} (g-g_0)^{k-2}, u^{k-1} \right\rangle \\
&= \left(g_1 + 2g_2 u + O\left(u^2\right)\right) \left(g_0 + g_1 u + O\left(u^2\right)\right)^{k-1} \left(g_1 u + g_2 u^2 + O\left(u^3\right)\right)^{k-2} \\
&= (g_1 + 2g_2 u) \left(g_0^{k-1} + (k-1) g_0^{k-2} g_1 u\right) \left(g_1^{k-2} u^{k-2} + (k-2) g_1^{k-3} g_2 u^{k-1}\right) + O\left(u^k\right) \\
&= \left(g_1 g_0^{k-1} + \left(2g_2 g_0^{k-1} + (k-1) g_0^{k-2} g_1^2\right) u\right) \left(g_1^{k-2} u^{k-2} + (k-2) g_1^{k-3} g_2 u^{k-1}\right) + O\left(u^k\right) \\
&= g_1^{k-1} g_0^{k-1} u^{k-2} + \left[g_1 g_0^{k-1} (k-2) g_1^{k-3} g_2 + \left[2g_2 g_0^{k-1} + (k-1) g_0^{k-2} g_1^2\right] g_1^{k-2}\right] u^{k-1} + O\left(u^k\right) \\
&= g_1^{k-1} g_0^{k-1} u^{k-2} + \left[k g_0^{k-1} g_1^{k-2} g_2 + (k-1) g_0^{k-2} g_1^k\right] u^{k-1} + O\left(u^k\right)
\end{aligned}
$$

ce qui donne

$$
\frac{(-1)^k C_{k-1}^{k-1}}{g_0^{k-1}} \left\langle g' g^k (g-g_0)^{n-1}, u^{k-1} \right\rangle = (-1)^k g_1^k
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=k-1}^{k} \frac{(-1)^n C_{n-1}^{k-2}}{g_0^{n-1}} \left\langle g' g^k (g-g_0)^{n-1}, u^{k-1} \right\rangle \\
&= \frac{(-1)^k (k-1)}{g_0^{k-1}} \left\langle g' g^k (g-g_0)^{k-1}, u^{k-1} \right\rangle + \frac{(-1)^{k-1}}{g_0^{k-2}} \left\langle g' g^k (g-g_0)^{k-2}, u^{k-1} \right\rangle \\
&= (-1)^k (k-1) g_1^k + \frac{(-1)^{k-1}}{g_0^{k-2}} \left[k g_0^{k-1} g_1^{k-2} g_2 + (k-1) g_0^{k-2} g_1^k\right] \\
&= (-1)^k \left((k-1) g_1^k - \left[k g_0 g_1^{k-2} g_2 + (k-1) g_1^k\right]\right) = -k (-1)^k g_0 g_1^{k-2} g_2
\end{aligned}
$$

D'où

$$
p_{k,0}^{q} = \frac{-g_1^k}{(1+Yg_0)^k} + \frac{-k g_0 g_1^{k-2} g_2}{(1+Yg_0)^{k-1}} + \sum_{j=1}^{k-2} \frac{p_{k,0,j}^{q}}{(1+Yg_0)^{j}}
$$

avec

$$
p_{k,0,j}^{q} = (-1)^{j-1} \sum_{n=j}^{k} \frac{(-1)^n C_{n-1}^{j-1}}{g_0^{n-1}} \left\langle g' g^{k-1} (g-g_0)^{n-1}, u^{k-1} \right\rangle
$$

En sommant sur q décrivant Q^∞ les relations obtenues, on produit celles annoncées dans le lemme.

En écrivant les développements en série de the Laurent à l'infini des $p_{k,\nu}$, $0 \leqslant \nu \leqslant k$, sous la forme $\sum_{m \leqslant -1} \langle p_{k,\nu} Y^m \rangle Y^m$, il vient $P_k = \sum_{m \leqslant -1} P_{k,m} \otimes Y^m$ et $P_{k,m} = \sum_{0 \leqslant \nu \leqslant k} \langle p_{k,\nu}, Y^m \rangle X^\nu$ pour tout m. Puisque (30) implique $\langle p_{k,k}, Y^m \rangle = 0$ quand $m > -k$, on obtient que $P_{k,m} =$

$\sum\limits_{0\leqslant j<k}\left\langle p_{k,j}^{m},Y^{m}\right\rangle X^{j}\in\mathbb{C}_{k-1}\left[X\right]$ pour $-1\geqslant m>-k$ et que $P_{k,m}=\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant k}\left\langle p_{k,j}^{m},Y^{m}\right\rangle X^{j}\in\mathbb{C}_{k}\left[X\right]$ pour $-k\geqslant m$. ■

6.2 Développement des indicatrices

La forme des fractions P_k dégagée par le lemme 22 suggère d'étudier les fonctions G_k sur le domaine Z définit par (24). Dans cette section et après $(\partial Q)_0$ désigne la courbe réelle orientée de $\mathbb{C}^2$ qui est l'image de ∂Q par la carte $w\mapsto\left(\frac{w_1}{w_0},\frac{w_2}{w_0}\right)$.

Lemme 23 *On note δ l'entier relatif $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q}\frac{d(w_1/w_0)}{w_1/w_0}$. G_0 est constante sur Z et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, G_k admet sur Z un développement en série de Laurent de la forme*

$$G_k\left(x,y\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{G_{k,-n}\left(x\right)}{y^n}=\left(-1\right)^k\delta\frac{x^k}{y^k}+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\widetilde{G}_{k,-n}\left(x\right)}{y^n}\tag{35}$$

avec convergence normale sur Z et où pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\widetilde{G}_{k,-n}=\sum\limits_{0\leqslant\nu<n}G_{k,-n}^{\nu}X^{\nu}$ est un polynôme degré au plus $n-1$, $G_{k,0}=\delta_{k,0}\delta$, $G_{k,-n}=\delta_{k,n}\left(-1\right)^n\delta X^n+\widetilde{G}_{k,-n}\in\mathbb{C}_{n-\delta_{k,n}}\left[X\right]$ et

$$G_1\left(x,y\right)=\frac{G_{1,-1}^{0}-\delta x}{y}+\sum_{n\geqslant 2}\frac{G_{1,-n}\left(x\right)}{y^n}\tag{36}$$

avec $G_{1,-1}^{0}=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial Q}\frac{w_2}{w_1}d\frac{w_1}{w_0}$.

Preuve. Fixons k dans $\mathbb{N}^*$. Soit $(x,y)\in Z$. Pour tout $(z_1,z_2)\in(\partial Q)_0$, $\left|\frac{x+z_2}{yz_1}\right|<\frac{1}{2}$ car par définition de ρ, $|x+z_2|\leqslant\alpha\left|y\right|+\max\limits_{(\zeta_1,\zeta_2)\in(\partial Q)_0}|\zeta_2|<\frac{1}{2}\left|y\right|\min\limits_{(\zeta_1,\zeta_2)\in(\partial Q)_0}|\zeta_1|\leqslant\frac{1}{2}\left|yz_1\right|$. D'où

$$\begin{aligned}G_k\left(x,y\right)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\partial Q)_0}z_1^{k-1}dz_1+\frac{1}{2\pi i}\int_{(\partial Q)_0}z_1^{k-1}\frac{z_1dz_2-\left(x+z_2\right)dz_1}{x+yz_1+z_2}\\&=0+\frac{1}{2\pi i}\int_{(\partial Q)_0}\frac{z_1^{k-2}}{y}\frac{z_1dz_2-\left(x+z_2\right)dz_1}{1+\frac{x+z_2}{yz_1}}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\partial Q)_0}\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\frac{\left(-1\right)^{\nu}z_1^{k-2-\nu}}{y^{\nu+1}}\left(x+z_2\right)^{\nu}\left(z_1dz_2-\left(x+z_2\right)dz_1\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{G_{k,-n}\left(x\right)}{y^n}\end{aligned}$$

avec convergence normale sur Z et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$G_{k,-n}\left(x\right)=\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{2\pi i}\int_{(\partial Q)_0}z_1^{k-n-1}\left(x+z_2\right)^{n-1}\left(z_1dz_2-\left(x+z_2\right)dz_1\right).$$

Par conséquent, $G_{k,-n}$ est un polynôme de degré au plus n. Ecrivons le sous la forme $\sum\limits_{0\leqslant\nu\leqslant n}G_{k,-n}^{\nu}X^{n}$. Le coefficient $G_{k,-n}^{n}$ de X^n dans $G_{k,-n}$ est donné par la formule

$$G_{k,-n}^{n}=\frac{\left(-1\right)^n}{2\pi i}\int_{(\partial Q)_0}z_1^{k-n-1}dz_1=\delta_{k,n}\left(-1\right)^n\delta.$$

Avec $\widetilde{G}_{k,-n} = \sum\limits_{0 \leqslant \nu < n} G^{\nu}_{k,-n} X^{\nu}$, il vient

$$G_k(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\delta_{k,n} (-1)^n \delta x^n + \widetilde{G}_{k,-n}(x)}{y^n} = (-1)^k \delta \frac{x^k}{y^k} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\widetilde{G}_{k,-n}(x)}{y^n}$$

Par ailleurs,

$$G_{1,-1}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\partial Q)_0} z_1^{-1} (z_1 dz_2 - (x + z_2) dz_1) = G^0_{1,-1} + x G^1_{1,-1}$$

avec $G^0_{1,-1} = 0 + \frac{-1}{2\pi i} \int_{w \in (\partial Q)_0} \frac{w_2}{w_1} d \frac{w_1}{w_0}$ et $G^1_{1,-1} = \frac{-1}{2\pi i} \int_{(\partial Q)_0} z_1^{-1} dz_1 = -\delta$.

Par définition, G_0 est la fonction $U \ni (x,y) \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} \frac{d[(xw_0 + yw_1 + w_2)/w_0)]}{xw_0 + yw_1 + w_2/w_0}$. Par conséquent, elle est continue et à valeurs entières. Elle est donc constante sur Z et égale à sa limite lorsque $x = 0$ et $y \to \infty$, c'est-à-dire à δ. Ainsi, $G_{0,-n} = 0$ for tout $n \in \mathbb{N}^*$. ■

Corollaire 24 *Le nombre p de fonctions $h_1, ..., h_p$ impliquées dans la proposition 21 est le même pour tous les points de $Z_{\mathrm{reg}} \backslash E^{\infty}$: $p = \delta + q^{\infty}$.*

Preuve. Notons provisoirement $p(z)$ le nombre de fonctions $h_1, ..., h_{p(z)}$ qui interviennent dans la proposition 21 quand $z \in U_{\mathrm{reg}}$. Puisque $P_0 = -q^{\infty}$, on sait que $G_0(z) = p(z) - q^{\infty}$ et donc que p est une fonction à valeurs dans $\mathbb{Z}$ continue sur l'ensemble connexe $Z_{\mathrm{reg}} \backslash E^{\infty}$. Elle est donc constante et puisque $G_0(z) = \delta + \sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{G_{0,-n}(x)}{y^n}$ lorsque $z = (x,y) \in Z_{\mathrm{reg}}$, on en déduit que $\delta = p - q^{\infty}$. ■

Remarques. Dans le cas où $Q^{\infty} \cap \operatorname{Sing} Q \neq \varnothing$, $q^{\infty} = \sum\limits_{q \in Q^{\infty}} \nu(q)$. Le corollaire 45 de la section 7 donne une formule qui relie q^{∞} au genre de Q via son opérateur de Dirichlet-Neumann.

Corollaire 25 *Les notations et les hypothèses sont celles de la proposition 21. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $N_{h,k}$ se prolonge à $Z \backslash E^{\infty}$ en une fonction holomorphe N^Q_k qui ne dépend pas de z_* et qui se développe en série de Laurent sur $\widetilde{Z}$ sous la forme $N^Q_k(x,y) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{N^Q_{k,n}(x)}{y^n}$ où les $N^Q_{k,n}$ sont des polynômes de degré au plus n. En outre, pour tout $z \in Z_{\mathrm{reg}}$, il existe des ondes de choc $h^z_1, ..., h^z_p$ dont les images sont deux à deux distinctes et telles que pour z' suffisamment voisin de z, $\left(N^Q_k(z')\right)_{k \in \mathbb{N}} = (N_{h^z,k}(z'))_{k \in \mathbb{N}}$ et $L_{z'} \cap Q = \{(1 : h_j(z') : -x - y h_j(z'))\,;\ 1 \leqslant j \leqslant p\}$.*

Preuve. Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait que $N_{h,k} = G_k - P_k$ sur U_* et grâce au lemme 22 que P_k est une fraction rationnelle qui ne dépend pas de z_* et qui est définie sur $Z \backslash E^{\infty}$. Par conséquent $N^Q_k = G_k - P_k$ prolonge $N_{h,k}$ en une fonction holomorphe sur Z. En appliquant la proposition 21 et le corollaire 24 en un point z arbitraire de $Z_{\mathrm{reg}} \backslash E^{\infty}$, on obtient des ondes de chocs $h^z_1, ..., h^z_p$ ayant les propriétés annoncées. Par ailleurs, le lemme 22 donne aussi que

$$P_k = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} p_{k,m} X^m = \frac{1}{(k-1)!} p^{(k-1)}_{1,1} X^k + \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} \frac{k}{m!\,(k-m)} p^{(m)}_{k-m,0} X^m$$

avec $p_{1,1}=\sum\limits_{q\in Q^\infty}\frac{b^q}{1+Yb^q}$ et $p_{\nu,0}=\sum\limits_{j=1}^{\nu}\sum\limits_{q\in Q^\infty}\frac{p^q_{\nu,0,j}}{(1+Yb^q)^j}$. Pour $|y|>\widetilde{\rho}$, on obtient

$$\begin{aligned}
p_{1,1}(y) &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n-1}}{t}\sum_{q\in Q^\infty}(b^q)^{\,n-1}=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n-1}S_{b,n-1}}{t^n}\\
p_{\nu,0}(y) &= \sum_{j=1}^{\nu}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(j-1)!\,(-1)^{n+j-1}}{t^{n+j-1}}\sum_{q\in Q^\infty}(b^q)^{\,-n}p^q_{\nu,0,j}=\sum_{m\in\mathbb{N}^*}\frac{p^{\infty,m}_{\nu,0}}{y^m}
\end{aligned}$$

avec $p^{\infty,m}_{\nu,0}=(-1)^m\sum\limits_{(n,j)\in\mathbb{N}^*\times\{1,\dots,\nu\},\ n+j=m+1}(j-1)!\sum\limits_{q\in Q^\infty}(b^q)^{-n}p^q_{\nu,0,j}$. Il suffit alors de combiner ces formules avec le lemme 23 pour obtenir les développements annoncés. ∎

Corollaire 26 *Les notations et hypothèses sont celles de la proposition 21. On note S^Q_k, $k\in\mathbb{N}^*$, les fonctions obtenues avec (26) et $\left(N^Q_k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui est définie dans le corollaire (25 ; localement, les S^Q_k sont les fonctions symétriques des fonctions $h_1,..,h_p$ de la proposition 21. Alors, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, S^Q_k se développe en série de Laurent sur $\widetilde{Z}$.*

6.3 Une genèse des ondes de chocs multiples

On se donne $A,B\in\mathbb{C}[Y]$ avec $\deg A<r=\deg B$ et $B(1)=0$ puis on définit $P\in\mathbb{C}[X,Y)$ et N par les relations

$$P(X,Y)=\frac{A(Y)}{B(Y)}+\frac{B'(Y)}{B(Y)}X \quad \& \quad N=G_1-P.$$

Il s'agit dans cette section de savoir quand N est une onde de chocs multiples, c'est-à-dire une somme d'onde de choc. Le théorème 4 de [16] donne une caractérisation de telles sommes mais dans cet article, on en utilise une plus adaptée à la situation présente. Ces deux caractérisations correspondent plus ou moins à privilégier l'une ou l'autre des variables x ou y et reposent sur le lemme ci-dessous dont on omet la preuve car celle-ci se déduit facilement de [16, lemme 16] et de la preuve de [16, proposition 17]

Lemme 27 (Henkin-Michel, 2007) *Soient D un domaine de $\mathbb{C}^2$, $N\in\mathcal{O}(D)$ et $d\in\mathbb{N}^*$. Il existe localement des ondes de choc $h_1,...,h_d$ mutuellement distinctes telles que $N=h_1+\cdots+h_d$ si et seulement si il existe $s_1,...,s_d\in\mathcal{O}(D)$ telles que $s_1=-N$ et*

$$-s_d\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial s_d}{\partial y}=0,\qquad -s_k\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial s_k}{\partial y}=\frac{\partial s_{k+1}}{\partial x}\ ,\quad 1\leqslant k\leqslant d-1, \tag{37}$$

et si le discriminant du polynôme $\Sigma=T^d+s_1T^{d-1}+\cdots+s_d\in\mathcal{O}(D)[T]$ n'est pas identiquement nul sur D. Dans ce cas, on dit que N est une d-onde de chocs.

Afin de définir les opérateurs intégro-différentiel adaptés à la résolution du système (37), nous introduisons des notations liées aux séries de Laurent et à leur primivitisation. Pour $m\in\mathbb{Z}$, nous posons

$$\begin{aligned}
&e_m:\mathbb{C}^*\ni y\mapsto(-1)^{|m|-1}(|m|-1)!\ y^m \quad \text{si } m\leqslant -1 \qquad (38)\\
&e_m:\mathbb{C}^*\ni y\mapsto\frac{1}{m!}y^m \quad \text{if } \ m\geqslant 0
\end{aligned}$$

et nous désignons par $\kappa_m = \frac{e_m}{e_1^m}$ le nombre réel tel que $e_m(y) = \kappa_m y^m$ pour tout $y \in \mathbb{C}^*$. Nous utilisons aussi la notation $\kappa_m^r = \frac{\kappa_r \kappa_{m-r}}{\kappa_m}$ lorsque $0 \leqslant r \leqslant m$. La principale raison de cette normalisation est que pour tout $m \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$, e_{m+1} est une primitive de e_m. Notons que $\kappa_1 = \kappa_{-1} = 1$. On note L la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$.

Définition 28 *Pour $(k,r) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, on note $S_{k,r}$ l'ensemble des fonctions holomorphes F sur Z^+ telles qu'il existe une famille $(c_{m,s})_{m\leqslant k,\ 0\leqslant s\leqslant r}$ de fonctions entières telle que pour chaque $s \in \{0,...,r\}$, la séries $(\sum\limits_{m\leqslant k} c_{m,s}\otimes e_m)$ est normalement convergente sur les parties de Z dont la première projection est bornée et telle que $F = \sum\limits_{m\leqslant k,\ 0\leqslant s\leqslant r} c_{m,s}\otimes e_m L^s$ sur Z^+.*

On définit un opérateur $\mathcal{P}$ sur $S_{*,*} = \bigcup\limits_{(k,r)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} S_{k,r}$ en posant $\mathcal{P}F = \sum\limits_{m\leqslant k,\ 0\leqslant s\leqslant r} c_{m,s}\otimes\mathcal{P}(e_m L^s)$ lorsque $F = \sum\limits_{m\leqslant k,\ 0\leqslant s\leqslant r} c_{m,s}\otimes e_m L^s \in \mathcal{S}_{k,r}$, l'action de $\mathcal{P}$ sur $e_m L^s$ étant définie par

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}(e_m) = e_{m+1} \quad si \quad m \neq -1,\ \mathcal{P}e_{-1} = L \\
&\mathcal{P}(e_m L^s) = (-1)^0 A_s^0 a_m^0 e_{m+1} L^s + \cdots + (-1)^s A_s^s a_m^s e_{m+1} L^0 \quad si \quad m \neq -1, \\
&\mathcal{P}(e_{-1} L^s) = \tfrac{1}{s+1} L^{s+1} = \tfrac{1}{s+1} e_0 L^{s+1}
\end{aligned}$$

où $a_m = -m$ si $m \leqslant -2$ et $a_m = \frac{1}{m+1}$ si $m \geqslant 0$.

Lemme 29 *Pour tour $F = \sum\limits_{m\leqslant k,\ 0\leqslant s\leqslant r} c_{m,s}\otimes e_m L^s \in \mathcal{S}_{k,r}$, $\mathcal{P}F \in c_{k,r}\otimes e_{k+1}L^r + \frac{c_{-1,r}}{r+1}\otimes L^{r+1} + S_{k,r}$ et $\mathcal{P}F$ est une primitive partielle de F au sens où $\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{P}F = F$.*

Preuve. Nous avons seulement à vérifier que pour $(m,s) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ donné, $[\mathcal{P}(e_m L^s)]' = e_m L^s$. Les cas $m = -1$ ou $(s = 0$ & $m \neq -1)$ sont assez évident. Supposons $s \neq 0$ et $m \neq -1$. Ainsi

$$\int_{[1;y]} (e_m L^s)(\tau)\, d\tau = [e_{m+1} L^s]_1^y - \int_{[1;y]} e_{m+1}(\tau) \frac{s}{\tau} L^{s-1}(\tau)\, d\tau$$

Si $m \leqslant -2$, $e_{m+1}(\tau)\frac{1}{\tau} = (-1)^{|m|}|m|!\tau^m = -me_m$ et si $m \geqslant 0$, $e_{m+1}(\tau)\frac{1}{\tau} = \frac{1}{(m+1)!}\tau^m = \frac{1}{m+1}e_m$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_{[1;y]} (e_m L^s)(\tau)\, d\tau &= e_{m+1}L^s - s a_m \int_{[1;y]} \left(e_m L^{s-1}\right)(\tau)\, d\tau \\
&= A_s^0 a_m^0 e_{m+1} L^s + \cdots + (-1)^{s-1} A_s^{s-1} a_m^{s-1} e_{m+1} L^1 + (-1)^s A_s^s a_m^s \int_{[1;y]} e_m(\tau)\, d\tau \\
&= A_s^0 a_m^0 e_{m+1} L^s + \cdots + (-1)^s A_s^s a_m^s e_{m+1} L^0 = \mathcal{P}(e_m L^s)
\end{aligned}$$

et $\mathcal{P}(e_m L^s)$ est bien une primitive de $e_m L^s$. ■

Définition 30 *Soit H la fonction définie sur Z^+ par*

$$H = \mathcal{P}\frac{\partial G_1}{\partial x} = -\delta\otimes L + \sum_{m\leqslant -1} \frac{G'_{1,m-1}}{\kappa_{m-1}} \otimes e_m = -\delta\otimes L + \widetilde{H}$$

On définit alors les opérateurs $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sur $S_{*,*}$ de la façon suivante

$$\mathcal{D} = e^{-H}\frac{\partial}{\partial x}e^{H} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{P}\circ\mathcal{D} \ \ \& \ \ \mathcal{F} = \Pi\mathcal{E} \tag{39}$$

où Π *est l'opérateur qui à* $F = \sum\limits_{m\leqslant k,\ 0\leqslant s\leqslant r} c_{m,s}\otimes e_m L^s \in \mathcal{S}_{k,r}$ *associe* $\sum\limits_{m\leqslant k} c_{m,0}\otimes e_m$.

Le lemme ci-dessous rassemble des propriétés élémentaires de la fonction cruciale H.

Lemme 31 $\widetilde{H} = I + J$ *où pour tout* $(x,y)\in Z$,

$$\begin{aligned}
I\left(x,y\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(\partial Q)_0}\frac{z_1dz_2-\left(x+z_2\right)dz_1}{x+yz_1+z_2}\\
J\left(x,y\right) &= \frac{-1}{2\pi i}\int_{(\partial Q)_0} L\left(\frac{x+yz_1+z_2}{yz_1}\right)dz_1
\end{aligned}$$

$H = -\delta\otimes L + \sum\limits_{m\leqslant -1} H_m\otimes e_m$ *avec* $H_m\in\mathbb{C}_{|m|-1}\left[X\right]$ *pour tout* $m\leqslant -1$ *et*

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial G_1}{\partial x}. \tag{40}$$

e^H *se prolonge holomorphiquement à* Z *et*

$$e^H = \left(1\otimes e_1^{-\delta}\right)e^{\widetilde{H}} \tag{41}$$

si bien que $\mathcal{D}$ *est en fait défini sur* $\mathcal{O}\left(Z\right)$. *De plus,* δ *est donné pour tout* $x\in\mathbb{C}$ *par la formule*

$$\delta = \lim_{|y|\to+\infty}\frac{\ln\left|e^{-H(x,y)}\right|}{\ln|y|}. \tag{42}$$

Preuve. La formule (40) est la principale raison de poser $H = \mathcal{P}\frac{\partial G_1}{\partial x}$, (41) prend seulement en compte que $\delta\in\mathbb{Z}$ et (42) se déduit de (41). Pour tout $m\leqslant -1$, $H_m = -\frac{1}{\kappa_{-2}}G'_{1,m-1}\in\mathbb{C}_{|m-1|-2}\left[X\right] = \mathbb{C}_{|m|-1}\left[X\right]$. Pour vérifier que $\widetilde{H} = I+J$, on note que pour $(x,y)\in U$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_1}{\partial x}\left(x,y\right) &= \frac{-1}{2\pi i}\int_{(\partial Q)_0}\frac{yz_1dz_1+z_1dz_2}{\left(x+yz_1+z_2\right)^2}\\
&= \frac{-1}{2\pi i}\int_{(\partial Q)_0}\frac{dz_1}{x+yz_1+z_2}+\frac{1}{2\pi i}\int_{(\partial Q)_0}\frac{\left(x+z_2\right)dz_1-z_1dz_2}{\left(x+yz_1+z_2\right)^2}\\
&= \frac{-1}{2\pi i}\int_{(\partial Q)_0}\frac{dz_1}{x+yz_1+z_2}+\frac{\partial I}{\partial y}\left(x,y\right).
\end{aligned}$$

Lorsque $(z_1,z_2)\in(\partial Q)_0$, $\frac{x+yz_1+z_2}{yz_1}\in\mathbb{R}_-^*$ seulement si $y\in\left]0;\frac{-x-z_2}{z_1}\right]$, ce qui ne peut arriver car $\left|\frac{-x-z_2}{z_1}\right|\leqslant\frac{\alpha}{\min\limits_{(\zeta_1,\zeta_2)\in(\partial Q)_0}|\zeta_1|}|y|+\max\limits_{(\zeta_1,\zeta_2)\in(\partial Q)_0}|\zeta_2|\leqslant\frac{1}{2}|yz_1|<|yz_1|$. Par conséquent J est bien défini sur Z et

$$\frac{\partial J}{\partial y} = \frac{-1}{2\pi i}\int_{(\partial Q)_0}\left(\frac{1}{x+yz_1+z_2}-\frac{1}{yz_1}\right)dz_1 = \frac{\delta}{y}+\frac{-1}{2\pi i}\int_{(\partial Q)_0}\frac{dz_1}{x+yz_1+z_2}$$

Ainsi, $\frac{\partial(I+J)}{\partial y} = \frac{\partial\widetilde{H}}{\partial y}$ et puisque $(x,.)$ et $(I+J)(x,.)$ ont tous deux 0 comme limite à l'infini lorsque x est fixé, on obtient $I+J=\widetilde{H}$. ∎

L'opérateur $\mathcal{F}$ permet de fabriquer une machinerie adaptée au système (37).

Proposition 32 *Soient $s_1, ..., s_d \in \mathcal{O}(Z\backslash E^\infty)$. Alors $(s_1, ..., s_d)$ est solution de (37) avec $N = G_1 - P$ si et seulement si chaque $s_j B$ se prolonge holomorphiquement à Z et il existe $\mu_1, ..., \mu_d \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telles que le système ci-dessous est vérifié sur Z^+,*

$$(1 \otimes B)\, s_k = \left(\mathcal{E}^0 (\mu_k \otimes 1) + \cdots + \mathcal{E}^{d-k} (\mu_d \otimes 1)\right) e^H, \; d \geqslant k \geqslant 1 \tag{43}$$

Preuve. Puisque $N = G_1 - \frac{A}{B} - x \otimes \frac{B'}{B}$, on remarque que si $s \in \mathcal{O}(Z)$, et $\widetilde{B} = 1 \otimes B$

$$\begin{aligned}\widetilde{B}\left(-s\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}\right) &= s\left(-\widetilde{B}\frac{\partial G_1}{\partial x} + \widetilde{B}'\right) + \widetilde{B}\frac{\partial s}{\partial y} \\ &= -\left(\widetilde{B}s\right)\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{B}s}{\partial y} = e^H \frac{\partial e^{-H}\widetilde{B}s}{\partial y}\end{aligned}$$

Comme e^H se prolonge holomorphiquement à Z, $(s_1, ..., s_d) \in \mathcal{O}(Z\backslash E^\infty)^d$ est solution de (37) si et seulement si les équations

$$\frac{\partial e^{-H}\widetilde{B}s_d}{\partial y} = 0 \quad \& \quad \frac{\partial e^{-H}\widetilde{B}s_k}{\partial y} = e^{-H}\frac{\partial \widetilde{B}s_{k+1}}{\partial x}\ , \;\; 1 \leqslant k \leqslant d-1 \tag{44}$$

sont satisfaites sur sur $Z\backslash E^\infty$. La première est équivalente à l'existence d'une fonction μ_d définie sur $\mathbb{C}$ telle que pour tout $(x,y) \in Z\backslash E^\infty$,

$$B(y)\, s_d(x,y) = \mu_d(x)\, e^{H(x,y)} \tag{45}$$

Une telle fonction μ_d est en fait holomorphe sur $\mathbb{C}$ puisque pour tout $y \in \mathbb{C}\backslash\widetilde{\rho}\overline{\mathbb{D}}$, elle serait donnée sur $D(0, \alpha|y|)$ par la formule $\mu_d = s_d(.,y)\frac{e^{H(.,y)}}{B(y)}$. Du même coup, (45) impose que $\widetilde{B}s_d$ se prolonge holomorphiquement à Z. Supposons que pour $k \in \{1, ..., d-1\}$, $\mu_d, ..., \mu_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ vérifient sur $Z\backslash E^\infty$

$$\widetilde{B}s_j = \left[\mathcal{F}^0\left(\mu_j \otimes e_0\right) + \cdots + \mathcal{F}^{d-j}\left(\mu_d \otimes e_0\right)\right] e^H$$

lorsque $d \geqslant j \geqslant k+1$ et que chacune de ces fonctions $\widetilde{B}s_j$ se prolonge holomorphiquement à Z. L'équation $\frac{\partial}{\partial y}\left(\widetilde{B}s_k e^{-H}\right) = e^{-H}\frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{B}s_{k+1}\right)$ est alors équivalente à l'existence d'une fonction μ_k définie sur $\mathbb{C}$ telle que pour tout $(x,y) \in Z^+\backslash E^\infty$,

$$B(y)\, s_k(x,y)\, e^{-H(x,y)} = \mu_k(x) + \mathcal{P}\left(e^{-H}\frac{\partial}{\partial x}(Bs_{k+1})\right)(x,y)\,. \tag{46}$$

Comme $\widetilde{B}s_{k+1}$ et e^{-H} se prolonge holomorphiquement à Z, le seule terme logarithmique que le membre droit (46) puisse avoir provient de $\mathcal{P}$ appliqué à des éléments de $\mathcal{O}(\mathbb{C}) \otimes e_{-1}$. Comme $\widetilde{B}s_k e^{-H}$ se développe en série de Laurent usuelles dans $\widetilde{Z}$, ces termes logarithmiques doivent se compenser. Il apparaît donc que le membre de droite (46) se développe en série de Laurent usuelle dans Z, ce qui implique que $\widetilde{B}s_k$ se prolonge holomorphiquement à Z et que $\mu_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

On obtient aussi

$$\begin{aligned}
\widetilde{B}s_k e^{-H} &= \Pi\left(\left(1\otimes\widetilde{B}\right)s_k e^{-H}\right) = \mu_k\otimes e_0 + \Pi\mathcal{P}\left(e^{-H}\frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{B}s_{k+1}\right)\right)\\
&= \mu_k\otimes e_0 + \Pi\sum_{k+1\leqslant j\leqslant d}\mathcal{P}\left(e^{-H}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^H\mathcal{F}^{j-k-1}\left(\mu_j\otimes e_0\right)\right)\right)\\
&= \sum_{1\leqslant j\leqslant d}\mathcal{F}^{j-k-1}\left(\mu_j\otimes e_0\right).
\end{aligned}$$

■

On déduit de la proposition 32 un procédé pour construire a priori des fonctions susceptibles d'être des ondes de chocs multiples. .

Corollaire 33 *Pour $\mu_1,...,\mu_d\in\mathcal{O}(D_\omega)$, on définit sur Z des fonctions holomorphes $s_k(\mu,B)$, $1\leqslant k\leqslant d$, par*

$$s_k(\mu,B) = \frac{e^{\widetilde{H}}}{1\otimes e_1^\delta B}\mathcal{F}_k(\mu) \quad \& \quad \mathcal{F}_k(\mu) = \sum_{j=k}^{d}\mathcal{F}^{j-k}\left(\mu_j\otimes e_0\right) \quad , \quad 1\leqslant k\leqslant d.$$

On pose $\mathbb{C}_{\mathcal{B}}[Y] = \{B\in\mathbb{C}[Y];\ B(0)=1\}$. Alors l'application $\mathcal{O}(\mathbb{C})^d\times\mathbb{C}_{\mathcal{B}}[Y]\ni(\mu,B)\mapsto(s_k(\mu,B))_{1\leqslant k\leqslant d}$ est injective. En outre $-s_1(\mu,B)$ est une d-onde de chocs sur Z si et seulement si

$$-s_1(\mu,B) = G_1 - P$$

et le discriminant $\Delta(\mu,B)$ de $S(\mu,B) = T^d + s_1(\mu,B)T^{d-1}+\cdots+s_d(\mu,B)\in\mathcal{O}(Z)[T]$ n'est pas identiquement nul..

Preuve. Supposons que (μ,B) et (ν,C) sont deux éléments de $\mathcal{O}(\mathbb{C})^d\times\mathbb{C}_{\mathcal{B}}[Y]$ tels que $(s_k(\mu,B))_{1\leqslant k\leqslant n} = (s_k(\nu,C))_{1\leqslant k\leqslant d}$. Alors sur $Z\backslash E^\infty$, $\mu_d\otimes\frac{1}{B} = \nu_d\otimes\frac{1}{B}$. Comme $B,C\in\mathbb{C}_{\mathcal{B}}[Y]$, ceci impose $B=C$ et $\mu_d=\nu_d$. Supposons que $\mu_j=\nu_j$ lorsque $d\geqslant j\geqslant k>1$. La relation $s_{k-1}(\mu,B) = s_{k-1}(\nu,C)$ s'écrit alors $\mathcal{F}_{k-1}(\mu) = \mathcal{F}_{k-1}(\nu)$ et celle-ci livre immédiatement $\mu_{k-1} = \nu_{k-1}$. D'où $\mu=\nu$.

Puisque $e^H = \left(1\otimes(Y/\omega)^{-\delta}\right)e^{\widetilde{H}}$, il résulte de la proposition 32 que $(s_k(\mu,B))_{1\leqslant k\leqslant d}$ vérifie le système (37). Lorsque $-s_1(\mu,B) = G_1-P$, $\Delta(\mu,B)\neq 0$ assure que $-s_1(\mu,B)$ est la somme de d ondes de chocs deux à deux différentes dont les fonctions symétriques sont les $(-1)^k s_k(\mu,B)$.

■

La proposition ci-dessous montre que le système (43) peut être vu comme un système différentiel classique d'inconnues $\mu_1,...,\mu_d$.

Proposition 34 *On définit des fonctions $\mathcal{F}_{k,k},...,\mathcal{F}_{k,0}$ holomorphes sur Z pour tout $k\in\mathbb{N}$ par les relations suivantes*

$$\begin{gathered}
\mathcal{F}_{k,k} = 1\otimes e_k, \quad \mathcal{F}_{k+1,0} = \mathcal{F}^k\Pi\mathcal{P}\frac{\partial H}{\partial x}\\
\mathcal{F}_{k+1,j} = \Pi\mathcal{P}\mathcal{F}_{k,j-1} + \mathcal{F}\mathcal{F}_{k,j}, \ 1\leqslant j\leqslant k
\end{gathered}$$

où $\mathcal{F}_{k,\nu} = 0$ si $\nu < 0$. Alors pour tout $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$,

$$\mathcal{F}^k (f \otimes 1) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \left(f^{(j)} \otimes 1\right) \mathcal{F}_{k,j}$$

Preuve. Par définition, pour tout $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $\mathcal{D}(f \otimes e_0) = f' \otimes e_0 + (f \otimes e_0) \frac{\partial H}{\partial x}$ et donc $\mathcal{F}(f \otimes e_0) = \Pi \mathcal{P} \mathcal{D}(f \otimes e_0) = (f' \otimes e_0) \mathcal{F}_{1,1} + (f \otimes e_0) \mathcal{F}_{1,0}$ avec $\mathcal{F}_{1,1} = 1 \otimes e_1$ et $\mathcal{F}_{1,0} = \Pi \mathcal{P} H$. Supposons que le résultat du lemme est vrai pour $k \in \mathbb{N}^*$ donné. Alors pour $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{k+1} (f \otimes e_0) \\
&= \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \Pi \mathcal{P} \frac{\partial}{\partial x} \left(f^{(j)} \otimes e_0\right) \mathcal{F}_{k,j} + \Pi \mathcal{P} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \left(f^{(j)} \otimes e_0\right) \mathcal{F}_{k,j} \right) \\
&= \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \Pi \mathcal{P} \left(\left(f^{(j+1)} \otimes e_0\right) \mathcal{F}_{k,j} + \left(f^{(j)} \otimes e_0\right) \frac{\partial \mathcal{F}_{k,j}}{\partial x} \right) + \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \left(f^{(j)} \otimes e_0\right) \Pi \mathcal{P} \left(\mathcal{F}_{k,j} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \\
&= \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \left(f^{(j+1)} \otimes e_0\right) \Pi \mathcal{P} \mathcal{F}_{k,j} + \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \left(f^{(j)} \otimes e_0\right) \Pi \mathcal{P} \frac{\partial \mathcal{F}_{k,j}}{\partial x} + \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \left(f^{(j)} \otimes e_0\right) \Pi \mathcal{P} \left(\mathcal{F}_{k,j} \frac{\partial H}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

ce qui donne la formule attendue avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{k+1,k+1} &= \Pi \mathcal{P} \mathcal{F}_{k,k} = \Pi \mathcal{P} (1 \otimes e_k) = 1 \otimes e_{k+1}, \\
\mathcal{F}_{k+1,j} &= \Pi \mathcal{P} \mathcal{F}_{k,j-1} + \Pi \mathcal{P} \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{k,j}}{\partial x} + \mathcal{F}_{k,j} \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \Pi \mathcal{P} \mathcal{F}_{k,j-1} + \mathcal{F} \mathcal{F}_{k,j}, \ 1 \leqslant j \leqslant k, \\
\mathcal{F}_{k+1,0} &= \Pi \mathcal{P} \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{k,0}}{\partial x} + \mathcal{F}_{k,0} \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \mathcal{F} \mathcal{F}_{k,0} = \mathcal{F} \mathcal{F}^{k-1} \Pi \mathcal{P} \frac{\partial H}{\partial x} = \mathcal{F}^k \Pi \mathcal{P} \frac{\partial H}{\partial x}.
\end{aligned}$$

■

Approfondissant encore l'analyse de (37), nous sommes presque en mesure d'établir que les fonctions μ_j sont polynomiales. On commence par deux lemmes élémentaires.

Lemme 35 *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $F = \sum\limits_{m \leqslant k} c_m \otimes e_m \in S_{k,r}$. Alors $\mathcal{F} F \in c'_k \otimes e_{k+1} + S_{k,r}$ et $\langle \mathcal{F} F, e_0 \rangle = 0$.*

Preuve. Soient k et F comme ci-dessus. Puisque $\mathcal{F} F = \Pi \mathcal{P} \mathcal{D} F$ et $\langle \mathcal{P}(e_j L^s), e_0 \rangle = 0$ pour tout (j, s), nous obtenons $\langle \mathcal{F} F, e_0 \rangle = 0$. En outre,

$$\mathcal{P} \frac{\partial F}{\partial x} = \sum_{m \leqslant k} c'_m \otimes \mathcal{P} e_m \in c'_k \otimes e_{k+1} + S_{k,r}.$$

Comme H_{-1} est constant, $\frac{\partial H}{\partial x} = \sum\limits_{m \leqslant -2} H'_m \otimes e_m$ et la relation attendue découle de

$$\begin{aligned}
\Pi\mathcal{P}\left(F\frac{\partial H}{\partial x}\right) &= \Pi\mathcal{P}\sum_{j\leqslant k}\sum_{\nu\leqslant -2} c_j H'_\nu \otimes \frac{\kappa_j\kappa_\nu}{\kappa_{j+\nu}} e_{\nu+j} \\
&= \Pi\mathcal{P}\sum_{\ell\leqslant k-2}\Big(\sum_{\substack{\nu+j=\ell \\ \nu\leqslant -2\ \&\ j\leqslant k}} \kappa^j_{j+\nu}\ c_j H'_\nu\Big)\otimes e_\ell \\
&= \sum_{0\neq m\leqslant k-1}\Big(\sum_{\substack{\nu+j=m-1 \\ \nu\leqslant -2\ \&\ j\leqslant k}} \kappa^j_{j+\nu} c_j H'_\nu\Big)\otimes e_m \in S^{\rho,\delta}_{k,r}.
\end{aligned}$$

■

Lemme 36 *Notons B_{q^∞} le coefficient dominant de B. Alors, il existe $(\lambda_m) \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{Z}_-}$ tel que*

$$\frac{e^H}{1\otimes B} = \frac{1}{B_{q^\infty}}\sum_{m\leqslant 0}\lambda_m \otimes \frac{e_m}{e_p/\kappa_p} \tag{47}$$

avec $\lambda_0 = 1$ et $\deg\lambda_m \leqslant |m|-1$pour tout $m\in\mathbb{Z}^*_-$.

Preuve. Pour une famille $(B_{-1,m}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_-}$ adéquate, $\frac{1}{B} = \frac{\kappa_{q^\infty}}{B_{q^\infty} e_{q^\infty}} \sum\limits_{m\leqslant 0} B_{-1,m} e_m$ avec $B_{-1,0} = 1$. Puisque $H = -\delta L + \sum\limits_{m\leqslant -1} H_m \otimes e_m$,

$$e^{-H} = \frac{\kappa_\delta}{e_\delta}\left[1+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n!}\left(-\sum_{\nu\leqslant -1} H_\nu\otimes e_\nu\right)^n\right] = \frac{\kappa_\delta}{e_\delta}\sum_{m\leqslant 0} h_m\otimes e_m$$

avec $h_0 = 1$ et pour $m\in\mathbb{N}^*$, $h_m = \sum\limits_{1\leqslant n\leqslant |m|}\frac{(-1)^n}{n!}\sum\limits_{\nu\in\left(\mathbb{Z}^*_-\right)^n;\ \nu_1+\cdots+\nu_n = m} H_{\nu_1}\cdots H_{\nu_n} \in \mathbb{C}_{|m|-1}[X]$ car si $\nu\in\left(\mathbb{Z}^*_-\right)^n$ et $\nu_1+\cdots+\nu_n = m$, $\deg H_{\nu_1}\cdots H_{\nu_n} \leqslant \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n}(|\nu_j|-1) = |m|-n \leqslant |m|-1$. Comme $p = \delta + q^\infty$, $\frac{\kappa_\delta\kappa_{q^\infty}}{e_\delta e_{q^\infty}} = \frac{\kappa_p}{e_p}$ et nous obtenons (47) avec $\lambda_0 = 1$ et pour tout $m\in\mathbb{Z}^*_-$, $\lambda_m = \sum\limits_{r+s=m,\ 0\geqslant r,s} h_r B_{-1,s}$ qui est un polynôme de degré au plus $\max\limits_{0\geqslant r\geqslant m}\deg h_r$, c'est-à-dire $|m|-1$.
■

Proposition 37 *Soient $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ et $k\in\mathbb{N}^*$. Alors,*

$$\mathcal{F}^k(f\otimes e_0) = f^{(k)}\otimes e_k + \sum_{m\leqslant k-2} P_{k,m}(f)\otimes e_m = \sum_{m\leqslant k} P_{k,m}(f)\otimes e_m$$

avec $P_{k,k} = \frac{\partial^k}{\partial x_k}$, $P_{k,k-1} = P_{k,0} = 0$ et pour $m\in\mathbb{Z}\cap\left]-\infty,k-1\right]$, $P_{k,m} = \sum\limits_{(m+1)^+\leqslant j\leqslant k-1} P^j_{k,m}\frac{\partial^j}{\partial x^j}$ où pour tout j, $P^j_{k,m}\in\mathbb{C}_{j-m-1}[X]$ ce qui signifie que $P^j_{k,m} = 0$ lorsque $j < m+1$.

Preuve. Notons que si $\nu\in\mathbb{Z}^*_-$, $\deg H'_\nu = (|\nu|-1)-1 = |\nu|-2$. Posons $F = f\otimes e_0$ et pour $m\in\mathbb{Z}$, $\left\langle\mathcal{F}^k F, e_m\right\rangle = c_{k,m}$. Par définition of $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^1 F = f'\otimes e_1 + \sum\limits_{m\leqslant -1} H'_{m-1} f\otimes e_m$. Puisque lorsque $m\in\mathbb{Z}^*_-$, $P_{1,m} \overset{def}{=} P^0_{1,m} \overset{def}{=} H'_{m-1}$ es de degré $|m|-1$, les affirmations du lemme sont vraies pour $k=1$.

Soit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ tel que $c_{k,m}=0$ lorsque $m \in \mathbb{Z}\cap[k,+\infty[$, $c_{k,k}=f^{(k)}$, $c_{k,k-1}=c_{k,0}=0$ où pour $m \in \mathbb{Z}\cap\,]-\infty,k-1]$, $c_{k,m}=P_{k,m}(f)$ avec $P_{k,m}=\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant k-1} P^j_{k,m}\frac{\partial^j}{\partial x^j}$ et $P^j_{k,m}\in\mathbb{C}_{j-m-1}[X]$ pour tout j. Puisque $H'_{-1}=0$, avec $\kappa^r_m=\frac{\kappa_r\kappa_{m-r}}{\kappa_m}$, il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{k+1}F=\Pi\mathcal{E}\mathcal{F}^kF&=\sum_{0\neq m\leqslant k+1} c'_{k,m-1}\otimes e_m+\Pi\mathcal{P}(\sum_{r\leqslant k} c_{k,r}\otimes e_r)(\sum_{s\leqslant -2} H'_s\otimes e_s)\\&=\sum_{0\neq m\leqslant k+1} c'_{k,m-1}\otimes e_m+\Pi\mathcal{P}\sum_{m\leqslant k-2}(\sum_{m+2\leqslant r\leqslant k}\kappa^r_m c_{k,r}H'_{m-r})\otimes e_m\\&=c'_{k,k}\otimes e_{k+1}+c'_{k,k-1}\otimes e_k+\sum_{0\neq m\leqslant k-1}(c'_{k,m-1}+\sum_{m+1\leqslant r\leqslant k}\kappa^r_{m-1}c_{k,r}H'_{m-1-r})\otimes e_m\end{aligned}$$

Ainsi $c_{k+1,k+1}=c'_{k,k}=f^{(k+1)}$, $c_{k+1,k}=c'_{k,k-1}=0$ et $c_{k+1,m}=0$si $m\geqslant k+1$ où $m=0$. Pour $m\in\mathbb{Z}^*\cap\,]-\infty,k]$, on obtient

$$c_{k+1,m}=c'_{k,m-1}+\sum_{m+1\leqslant r\leqslant k}\kappa^r_{m-1}H'_{m-1-r}c_{k,r} \tag{48}$$

Soit $m\in\mathbb{Z}^*\cap\,]-\infty,k-1]$. La formule (48) et t'hypothèse de récurrence donnent

$$\begin{aligned}c_{k+1,m}&=(\sum_{(m+1)^+\leqslant j\leqslant k-1} P^j_{k,m-1}f^{(j)})'+\sum_{m+1\leqslant r\leqslant k}\ \sum_{(m+1)^+\leqslant j\leqslant k-1}\kappa^r_{m-1}P^j_{k,r}H'_{m-1-r}f^{(j)}\\&=\sum_{(m+1)^+\leqslant j\leqslant k-1}(P^j_{k,m-1}f^{(j)})'+\sum_{(m+1)^+\leqslant j\leqslant k-1}[\sum_{m+1\leqslant r\leqslant k}\kappa^r_{m-1}P^j_{k,r}H'_{m-1-r}]f^{(j)}=P_{k+1,m}(f)\end{aligned}$$

avec $P_{k+1,m}=\sum\limits_{(m+1)^+-1\leqslant j\leqslant k} P^j_{k+1,m}\frac{\partial}{\partial x_j}$ et

$$P^k_{k+1,m}=P^{k-1}_{k,m-1} \tag{49}$$

$$P^j_{k+1,m}=P^{j-1}_{k,m-1}+\left(P^j_{k,m-1}\right)'+\sum_{r=m+1}^{k}\kappa^r_{m-1}P^j_{k,r}H'_{m-1-r},\ (m+1)^+\leqslant j<k \tag{50}$$

$$P^{(m+1)^+-1}_{k+1,m}=\left(P^{(m+1)^+-1}_{k,m-1}\right)'+\sum_{m+1\leqslant r\leqslant k}\kappa^r_{m-1}P^{(m+1)^+-1}_{k,r}H'_{m-1-r} \tag{51}$$

Supposons $1\leqslant m\leqslant k-1$. Alors (51) devient $P^m_{k+1,m}=\left(P^m_{k,m-1}\right)'+\sum\limits_{m+1\leqslant r\leqslant k}\kappa^r_{m-1}P^m_{k,r}H'_{m-1-r}$. Nous savons que $\deg P^m_{k,m-1}=m-(m-1)-1=0$ et que lorsque $m+1\leqslant r\leqslant k$, $P^m_{k,r}=0$ puisque $m\leqslant r-1<r+1$. Donc $P^m_{k+1,m}=0$. Lorsque $m+1\leqslant j\leqslant k-1$, $\deg P^{j-1}_{k,m-1}\leqslant j-1-(m-1)-1=j-m-1$, $\deg\left(P^j_{k,m-1}\right)'\leqslant(j-(m-1)-1)-1=j-m-1$ et pour $m+1\leqslant r\leqslant k$, $\deg P^j_{k,r}H'_{m-1-r}\leqslant(j-r-1)+(r+1-m)-2=j-m-2$. Ainsi, (50) livre que $\deg P^j_{k+1,m}\leqslant j-m-1$. Enfin, $\deg P^k_{k+1,m}=\deg P^{k-1}_{k,m-1}\leqslant k-1-(m-1)-1=k-m-1$.

Supposons maintenant que $m\leqslant -1$. Les calculs de degré pour $P^k_{k+1,m}$ et $P^j_{k+1,m}$ lorsque $1\leqslant j\leqslant k-1$ sont encore valides. La formule (51) devient $P^0_{k+1,m}=\left(P^0_{k,m-1}\right)'+\sum\limits_{m+1\leqslant r\leqslant k}\kappa^r_{m-1}P^0_{k,r}H'_{m-1-r}$ et livre $\deg P^0_{k+1,m}\leqslant 0-m-1$ car $\deg\left(P^0_{k,m-1}\right)'\leqslant(0-(m-1)-1)-1=-m-1$ et pour $m+1\leqslant r\leqslant k$, $\deg P^0_{k,r}H'_{m-1-r}\leqslant(0-r-1)+(r+1-m)-2=-m-2$. La preuve est complète. ∎

Proposition 38 *Supposons que* $(s_1, ..., s_d) \in \mathcal{O}(Z \backslash E^\infty)^d$ *est un solution of (37) avec* $-s_1 = G_1 - P_1$ *et soit* $(\mu_1, ..., \mu_d) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})^d$ *satisfaisant le système (43). Alors* $d = p$, μ_p *est un polynôme de degré* p *et* $\mu_p^{(p)} = p! B_{q^\infty}$ *où* $B_{q^\infty} = \prod_{q \in Q^\infty} b^q$ *est le coefficient dominant de* B. *De plus,pour tout* $j \in \{1, ..., p-1\}$, μ_j *est un polynôme de degré au plus* $p-1$.

Preuve. La preuve s'appuie sur une induction décroissante démarrant à p et sur la la comparaison de la série de Laurent de s_1, série que nous devons calculer, au développement de $-G_1 + P_1$ que nous connaissons grâce aux lemmes 23 et 22 : $G_1 = \sum_{m \leqslant -1} \frac{G_{1,m}}{\kappa_m} \otimes e_m$ et $P_1 = \sum_{m \leqslant -1} \frac{P_{1,m}}{\kappa_m} \otimes e_m$ avec $G_{1,-1} = G_{1,1}^0 - \delta x$, $G_{1,m} \in \mathbb{C}_{|m|-1}[X]$ lorsque $m \leqslant -2$, $P_{1,1} = q^\infty X + \langle p_{1,0}, e_{-1} \rangle$ et $P_{1,m} \in \mathbb{C}_1[X]$ pour tout m. Grâce à la proposition 37 et à (47), nous obtenons

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{e^H}{1 \otimes B} \sum_{1 \leqslant j \leqslant d} \mathcal{F}^{j-1}\left(\mu_j \otimes e_0\right) = \frac{e^H}{1 \otimes B} \sum_{1 \leqslant j \leqslant d} \sum_{m \leqslant j-1} P_{j-1,m}\left(\mu_j\right) \otimes e_m \\
&= \frac{1}{B_{q^\infty}} \left(\sum_{m \leqslant 0} \lambda_m \otimes \frac{e_m}{e_p / \kappa_p} \right) \sum_{m \leqslant d-1} \Big(\sum_{m^+ + 1 \leqslant j \leqslant p} P_{j-1,m}\left(\mu_j\right)\Big) \otimes e_s \\
&= \frac{1}{B_{q^\infty}} \sum_{m \leqslant d-1} \sum_{m-d+1 \leqslant r \leqslant 0} \left(\sum_{(m-r)^+ + 1 \leqslant j \leqslant d} \kappa_m^r \lambda_r P_{j-1,m-r}\left(\mu_j\right) \right) \otimes \frac{e_m}{e_p / \kappa_p} \\
&= \frac{1}{B_{q^\infty}} \sum_{m \leqslant d-1} \frac{\kappa_m}{\kappa_{m-p}} \widetilde{s}_{1,m} \otimes e_{m-p}
\end{aligned}$$

avec pour $m \leqslant p-1$, $\widetilde{s}_{1,m} = \sum_{m-d+1 \leqslant r \leqslant 0} \sum_{(m-r)^+ + 1 \leqslant j \leqslant d} \kappa_m^r \lambda_r P_{j-1,m-r}\left(\mu_j\right)$. En particulier, lorsque $0 \leqslant m \leqslant d-1$,

$$\widetilde{s}_{1,m} = \sum_{m+1 \leqslant j \leqslant d} \sum_{m-j+1 \leqslant r \leqslant 0} \kappa_m^r \lambda_r d_{j-1,m-r}\left(\mu_j\right) = \sum_{m+1 \leqslant j \leqslant d} \widetilde{P}_{1,m}^j\left(\mu_j\right)$$

où pour $m+1 \leqslant j \leqslant d$,

$$\widetilde{P}_{1,m}^j = \sum_{m-j+1 \leqslant r \leqslant 0} \kappa_m^r \lambda_r P_{j-1,m-r} = \kappa_m^0 P_{j-1,m} + \sum_{m-j+1 \leqslant r \leqslant -1} \kappa_m^r \lambda_r P_{j-1,m-r}$$

Ainsi, $\widetilde{P}_{1,m}^{m+1}\left(\mu_{m+1}\right) = \kappa_m^0 P_{m,m}\left(\mu_{m+1}\right) = \mu_{m+1}^{(m)}$ puisque $\kappa_m^0 = 1$. D'où

$$\widetilde{s}_{1,m} = \mu_{m+1}^{(m)} + \sum_{m+2 \leqslant j \leqslant d} \widetilde{P}_{1,m}^j\left(\mu_j\right) \tag{52}$$

De plus,

$$\widetilde{P}^j_{1,m}\left(\mu_j\right)=\sum_{0\leqslant t\leqslant j-2}P^t_{j-1,m}\mu_j^{(t)}+\kappa_m^{m-j+1}\lambda_{m-j+1}P_{j-1,j-1}\left(\mu_j\right)+\sum_{m-j+2\leqslant r\leqslant -1}\sum_{0\leqslant t\leqslant j-2}\kappa_m^r\lambda_rP^{(t)}_{j-1,m-r}\mu_j^{(t)}$$
$$=\kappa_m^{m-j+1}\lambda_{m-j+1}\mu_j^{(j-1)}+\sum_{0\leqslant t\leqslant j-2}\left(P^t_{j-1,m}+\sum_{m-j+2\leqslant r\leqslant -1}\kappa_m^r\lambda_rP^t_{j-1,m-r}\right)\mu_j^{(t)}$$

La formule (52) implique $\widetilde{s}_{1,d-1}=\mu_d^{(p-1)}$ si bien que $s_1\in\frac{\kappa_{d-1}}{B_{q^\infty}}\mu_d^{(d-1)}e_{d-p-1}+S_{d-p-2,0}$. Donc, $s_1=-N_1=-G_1+P_1$, $G_1\in\left(G^0_{1,1}-\delta Id\right)\otimes e_{-1}+S_{-2,0}$ et $P_1\in\left(q^\infty Id+\langle p_{1,0},e_{-1}\rangle\right)\otimes e_{-1}+S_{-2,0}$. Ainsi, $d-p-1$ doit être égal à -1, c'est-à-dire $d=p$, et

$$\mu_p^{(p-1)}=\frac{B_{q^\infty}}{\kappa_{p-1}}\left(pId-G^0_{1,1}-\langle p_{1,0},e_{-1}\rangle\right)=p!B_{q^\infty}Id-(p-1)!B_{q^\infty}\left[G^0_{1,1}-\langle p_{1,0},e_{-1}\rangle\right]$$

En particulier, $\mu_p\in\mathbb{C}_p\left[X\right]$ et $\mu_p^{(p)}=p!B_{q^\infty}$.

Supposons maintenant que $0\leqslant m\leqslant p-2$ et que μ_p, ..., μ_{m+2} sont polynomiales. Alors pour $m+2\leqslant j\leqslant p$, $\widetilde{P}^j_{1,m}\left(\mu_j\right)$ est du même type et puisque

$$\deg\lambda_{m-j+1}\mu_j^{(j-1)}\leqslant(j-m-1)-1+\deg\mu_j-j+1=\deg\mu_j-m-1$$
$$\deg P^t_{j-1,m}\mu_j^{(t)}\leqslant(t-m-1)+\deg\mu_j-t=\deg\mu_j-m-1$$
$$\deg\lambda_rP^t_{j-1,m-r}\mu_j^{(t)}\leqslant(|r|-1)+(t-m+r)+\deg\mu_j-t=\deg\mu_j-m-1$$

on obtient
$$\deg\widetilde{P}^j_{1,m}\left(\mu_j\right)\leqslant\deg\mu_j-m-1$$

Ainsi, $\widetilde{s}_{1,m}$ est polynomiale et il existe un polynôme R_m tel que

$$\deg\widetilde{s}_{1,m}=\mu_{m+1}^{(m)}+R_m\quad\&\quad\deg R_m\leqslant\max_{m+2\leqslant j\leqslant p}\deg\mu_j-m-1$$

De plus,
$$-G_{1,m-p}+P_{1,m-p}=s_{1,m-p}=\frac{1}{B_{q^\infty}}\frac{\kappa_m}{\kappa_{m-p}}\widetilde{s}_{1,m},$$

$G_{1,m-p}\in\mathbb{C}_{|m|-1}\left[X\right]$ puisque $m-p\leqslant-2$ et $P_{1,m}\in\mathbb{C}_1\left[X\right]$. De

$$\mu_{m+1}^{(m)}=B_{q^\infty}\frac{\kappa_{m-p}}{\kappa_m}\left(-G_{1,m-p}+P_{1,m-p}\right)+R_m,$$

on tire d'abord que les fonctions μ_j sont toutes polynomiales puis, avec $m=p-2$ que

$$\deg\mu_{p-1}^{(p-2)}\leqslant\max\left\{p-(p-2)-1,1,\deg\mu_p-(p-2)-1\right\}=1$$

et donc que $\deg\mu_{p-1}\leqslant p-1$. Supposant $\deg\mu_j\leqslant p-1$ lorsque $m+2\leqslant j\leqslant p-1$, nous obtenons
$$\deg\mu_{m+1}^{(m)}\leqslant\max\left\{p-m-1,1,p-m-1\right\}=p-m-1$$
et donc que $\deg\mu_{m+1}\leqslant p-1$, ce qui achève la preuve. ■

6.4 Un système linéaire

D'après la proposition 21, le lemme 22 et le corollaire 25, il existe $A^\infty, B^\infty \in \mathbb{C}[Y]$ avec $\deg A < \deg B^\infty = q^\infty$ et $B^\infty(0) = 1$ tel que sur $Z \backslash E^\infty$,

$$G_1 = N_1^Q + X \otimes \frac{B^{\infty\prime}}{B^\infty} + 1 \otimes \frac{A^\infty}{B^\infty}$$

où N_1^Q est localement la somme des ondes de chocs $h_1, ..., h_p$ impliquées dans la proposition 21. D'après le lemme 27, le corollaire 25, la proposition 32 et la proposition 38, ces fonctions locales définissent globalement sur $Z \backslash E^\infty$ des fonctions symétriques $(-1)^k s_k^Q$, $1 \leqslant k \leqslant p$, qui peuvent être écrites sous la forme

$$s_k^Q = \frac{e^H}{1 \otimes B^\infty} \mathcal{F}_k\left(\mu^Q\right), \ p \geqslant k \geqslant 1,$$

où $\mu^Q = \left(\mu_1^Q, ..., \mu_p^Q\right) \in \mathbb{C}[X]^p$ est tel que et $\deg \mu_j^Q < \deg \mu_p^Q = p$ lorsque $1 \leqslant j \leqslant p$. Dans la formule ci-dessus, $\mathcal{F}_k$ est défini pour tout $\mu \in \mathbb{C}[X]^d$ et $(d,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ arbitraire par

$$\mathcal{F}_0(\mu) = \mathcal{F}\mathcal{F}_1(\mu) \quad \& \quad \mathcal{F}_k(\mu) = \sum_{k \leqslant j \leqslant d} \mathcal{F}^{j-k}\left(\mu_j \otimes e_0\right), \ k \geqslant 1, \tag{53}$$

où $\mathcal{F}$ est l'opérateur défini par (39).

Dans le théorème 39 ci-dessous, le système S_d défini par les équations (54) à (58) est un système sur-determiné dont la nature est d'avoir une infinité de solutions lorsque la fonction nulle n'en est pas la seule. La première partie du théorème 39 dit dans d'autres mots que, parce que bM est connu pour être le bord d'un surface de Riemann, 0 n'est pas la seule solution of S_d au moins lorsque $d = q^\infty + \delta = p$. La seconde partie du théorème 39 est une sorte de réciproque. Si on parvient à trouver une solution non nulle à S_d où d est quelque entier naturel non nul, on obtient une décomposition (62) du type cherché. Cependant, il n'est pas clair qu'une telle décomposition est pertinente. La section suivante clarifie ce point : la décomposition correcte peut être déduite de (62) par l'élimination de termes parasites.

Théorème 39 *On suppose que $\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} \neq 0$, on fixe d dans $\mathbb{N}^*$, on pose $r = d - \delta$ et on considère $\mu = (\mu_1, ..., \mu_d) \in \mathbb{C}[X]^d$ tel que pour $j \in \{1, ..., d-1\}$, $\deg \mu_j < \deg \mu_d = d$.*

1) On suppose que $d = p$ et $\mu = \mu^Q$. Alors $r = q^\infty$ et

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\partial^2 G_1/\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-H} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}_0(\mu)\right]\right) = 0 \tag{54}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} e^H \mathcal{F}_0(\mu) - \frac{\partial H/\partial x}{\partial^2 G_1/\partial x^2} e^H \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-H} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}_0(\mu)\right] - e^H \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\partial^2 G_1/\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-H} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}_0(\mu)\right]\right) = 0 \tag{55}$$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} \frac{\partial^{r+1}}{\partial y^{r+1}}\left[e^H \mathcal{F}_0(\mu)\right] - \left(\frac{\partial^{r+1} e^H}{\partial y^{r+1}}\right) \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-H} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}_0(\mu)\right] = 0 \tag{56}$$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} \frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[e^H\left(G_1 \mathcal{F}_0(\mu) + \mathcal{F}_1(\mu)\right)\right] - \frac{\partial^r e^H G_1}{\partial y^r} \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-H} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}_0(\mu)\right] = 0 \tag{57}$$

$$\mathcal{E}\mathcal{F}_1(\mu) = \Pi \mathcal{E}\mathcal{F}_1(\mu) = \mathcal{F}\mathcal{F}_1(\mu) = \mathcal{F}_0(\mu) \tag{58}$$

et $B_\mu = e^H\left(\mathcal{F}_0(\mu) - \frac{1}{\partial^2 G_1/\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} e^{-H} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}_0(\mu)\right)$ vérifie $B_\mu(0,y) \underset{\mathbb{C}^* \ni y \to 0}{\longrightarrow} 1$.

2) On suppose que μ satisfait au système différentiel linéaire S_d défini par les équations (54) à (58) et que $B_\mu(0,y) \underset{\mathbb{C}^*\ni y\to 0}{\to} 1$. Il existe alors $(c_0, A, B) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}_{r-1}[Y] \times \mathbb{C}_r[Y]$ avec $B(0) = 1$ et tel que

$$c_0 \otimes 1 = \frac{1}{\partial^2 G_1/\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} e^{-H} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}_0(\mu) \tag{59}$$

$$1 \otimes B = (\mathcal{F}_0(\mu) - c_0 \otimes 1) e^H \tag{60}$$

$$1 \otimes A = (1 \otimes B) G_1 + e^H \mathcal{F}_1(\mu) - X \otimes B' \tag{61}$$

En outre, tenant compte du fait que e^H se prolonge holomorphiquement à Z, $s_1^\mu = \frac{e^H}{1\otimes B}\mathcal{F}_1(\mu)$ définit sur $Z\backslash E^\infty$ une fonction holomorphe telle que

$$G_1 = -s_1 + X \otimes \frac{B'}{B} + 1 \otimes \frac{A}{B} \tag{62}$$

et qui est une d-onde de chocs en dehors du lieu d'annulation du discriminant Δ_μ de $T^d + \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant d} s_k T^{d-k}$ où $(s_k^\mu) = \left(\frac{e^H}{1\otimes B}\mathcal{F}_{d-k}(\mu)\right)_{d\geqslant k\geqslant 1}$.

Preuve. 1) Posons $(A, B) = (A^\infty, B^\infty)$. D'après les résultats cités au début de cette section, on sait que

$$1 \otimes A = (1 \otimes B) G_1 + e^H \mathcal{F}_1(\mu) - X \otimes B' \tag{63}$$

En particulier, le membre de droite de (63) est indépendant de X. Puisque $\frac{\partial G_1}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y}$, il vient

$$\begin{aligned} 0 = e^{-H} \frac{\partial(1\otimes A)}{\partial x} &= e^{-H}\left[(1\otimes B)\frac{\partial H}{\partial y} - (1 \otimes B')\right] + e^{-H}\frac{\partial}{\partial x} e^H \mathcal{F}_j(\mu) \\ &= -\frac{\partial(1\otimes B)e^{-H}}{\partial y} + \mathcal{D}\mathcal{F}_1(\mu) \end{aligned} \tag{64}$$

Donc $\frac{\partial(1\otimes B)e^{-H}}{\partial y} = \mathcal{D}\mathcal{F}_1(\mu)$ et nous obtenons une fonction entière c_0 telle que

$$\mathcal{P}\mathcal{D}\mathcal{F}_1(\mu) = \mathcal{P}\frac{\partial}{\partial y}(1\otimes B) e^{-H} = (1 \otimes B) e^{-H} + c_0 \otimes 1. \tag{65}$$

Comme e^{-H} admet une série de Laurent usuelle sur $\widetilde{Z}$, $\mathcal{P}\mathcal{D}\mathcal{F}_1(\mu)$ ne peut contenir de terme algorithmique, ce qui implique que (58) est vérifiée. Puis, (65) livre que B est donnée par (60) bien que nous ne connaissions pas encore c_0. Puisque B ne dépend pas de x, nous obtenons

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} e^H \mathcal{F}_0(\mu) - (c_0 \otimes 1) \frac{\partial H}{\partial x} e^H - (c_0' \otimes 1) e^H \tag{66}$$

Puisque $\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial G_1}{\partial x}$, ceci livre

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} e^{-H} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}_0(\mu) - (c_0 \otimes 1) \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2},$$

ce qui implique que c_0 est en fait défini par (59). Avec cette valeur de c_0, (54) est l'affirmation que c_0 ne dépend pas de y et (66) devient l'équation de compatibilité (55). Etant donné que le membre de droite de 60) doit être $\mathbb{C}_r[Y]$, nous obtenons aussi

$$0=\frac{\partial^{r+1}}{\partial y^{r+1}}\left[\left(\mathcal{F}_0(\mu)-c_0\otimes 1\right)e^H\right]=\frac{\partial^{r+1}}{\partial y^{r+1}}\left[\mathcal{F}_0(\mu)\,e^H\right]-(c_0\otimes 1)\frac{\partial^{r+1}e^H}{\partial y^{r+1}}$$

qui devient (56) lorsque (59) est utilisée pour c_0. De plus, comme le membre de droite de (63) doit être dans $\mathbb{C}_{r-1}[Y]$, $\deg B<r$ et comme (59) a déjà été prouvée, on obtient aussi

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[(1\otimes B)\,G_1-X\otimes B'+e^H\mathcal{F}_1(\mu)\right]\\&=\frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[(1\otimes B)\,G_1+e^H\mathcal{F}_1(\mu)\right]\\&=\frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[\left(\mathcal{F}_0(\mu)-c_0\otimes 1\right)e^HG_1+e^H\mathcal{F}_1(\mu)\right]\\&=\frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[e^H\left(G_1\mathcal{F}_0(\mu)+\mathcal{F}_1(\mu)\right)\right]-(c_0\otimes 1)\frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[e^HG_1\right]\end{aligned}$$

qui devient (57) lorsque (59) est utilisée pour c_0. Notons que S_d est un système différentiel linéaire du fait de la proposition 34.

2) Inversement, supposons que $\frac{\partial^2G_1}{\partial x^2}\neq 0$ et que le système S_d est satisfait par μ. Alors, grâce à (54), le membre de droite de (59) dépend seulement de sa première variable et définit donc une fonction c_0. Comme $\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\mathcal{F}_0(\mu)-c_0\otimes 1\right)e^H\right]$ est égal au membre de droite de (66), (55) signifie que $\left(\mathcal{F}_0(\mu)-c_0\otimes 1\right)e^H$ ne dépend que de x si bien que (60) définit correctement une fonction B. Puisque

$$\frac{\partial^{r+1}}{\partial y^{r+1}}\left[\left(\mathcal{F}_0(\mu)-c_0\otimes 1\right)e^H\right]=\frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[\mathcal{F}_0(\mu)\,e^H\right]-(c_0\otimes 1)\frac{\partial^re^H}{\partial y^r},$$

(56) indique que B est un polynôme de degré au plus r. Comme $B_\mu=e^H\left(\mathcal{F}_0(\mu)-c_0\otimes 1\right)=1\otimes B$, $B(0)=\lim\limits_{y\to 0^*}B_\mu(0,y)=1$. Notons $\mathcal{A}$ le membre de droite de (61). Alors

$$\begin{aligned}e^{-H}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}&=e^{-H}\left[(1\otimes B)\frac{\partial H}{\partial y}-(1\otimes B')\right]+e^{-H}\frac{\partial}{\partial x}\left[e^H\mathcal{F}_1(\mu)\right]\\&=\mathcal{D}\mathcal{F}_1(\mu)-\frac{\partial\,(1\otimes B)\,e^{-H}}{\partial y}\\&=\mathcal{D}\mathcal{F}_1(\mu)-\frac{\partial\left(\mathcal{F}_0(\mu)-c_0\otimes 1\right)}{\partial y}=\mathcal{D}\mathcal{F}_1(\mu)-\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{F}_0(\mu)\end{aligned}$$

si bien que $\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}=0$ grâce à (58). Par conséquent (61) définit correctement une fonction A, qui du fait de (57), est un polynôme de degré au plus $r-1$. Les autres assertions de (2) sont maintenant des conséquences du corollaire 33. ■

Remarque. Si $c\in\mathbb{C}^*$, $(cA,cB)\in\mathbb{C}[Y]^2$ vérifie aussi $G_1=-s_1+\frac{X\otimes B'+1\otimes A}{B}$. La condition $B_\mu(0,y)\underset{\mathbb{C}^*\ni y\to 0}{\to}1$ peut donc être vue comme une normalisation de B. Cependant, le théorème n'aborde pas la question de l'unicité.

Pour un d donné, le système S_d peut être explicitement écrit grâce à la proposition 34 qui donne des formules pour le coefficients des opérateurs $\mathcal{F}^k$ et donc pour $\mathcal{F}_0$. Le cas $d=0$ est impossible lorsque $\partial^2G_1/\partial x^2\neq 0$. Le cas $d=1$ correspond au cas où les droites complexes L_z, $z\in Z$, ne rencontrent Q qu'une seule fois. Dans ce cas, S_1 est un système sur-déterminé portant sur les coefficients de seulement une fonction affine μ_1. Son écriture ne pose pas de problème mais est déjà encombrante. Par exemple,(54) qui signifie qu'une certaine fonction de deux variables x et y ne dépend en fait que de l'une des deux, occupe déjà de l'espace même pour $d = p = 1$. Dans ce cas $q^\infty = 1 - \delta$, $\delta \in \mathbb{Z} \cap]-\infty, 1]$ et tenant compte de 53, de la définition 30, écrivant $e^{-H} = \sum\limits_{m \leqslant q^\infty - 1} \widetilde{h}_m \otimes e_m$ et $\frac{1}{\partial^2 G_1/\partial x^2} = \sum\limits_{m \leqslant 2} g_{1,m} \otimes e_m$, on obtient après calculs que

$$\frac{1}{\partial^2 G_1/\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[e^{-H} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}_0(\mu) \right] = \sum_{m \leqslant q^\infty - 1} \sum_{t=m-2}^{q^\infty - 3} \Big(\sum_{s=t-q^\infty+2}^{-1} g_{1,m-t} \frac{\left(\mu_1 G''_{1,s-2}\right)'}{\kappa_{s-2}} \widetilde{h}_{t+1-s} \Big) \otimes e_m$$

Ainsi, l'annulation de la dérivée selon y du membre de gauche de l'équation ci-dessus impose une infinité d'équations linéaires sur les deux coefficients de μ_1. La certitude que 0 n'est pas la seule solution repose sur le fait que nous avons supposé que p est égal à 1. Pour un p général, le nombre de μ_j augmente mais aussi leur degré. Par conséquent, le théorème 6 qui donne un majorant de p est important pour les applications. Dans cet article, on économise de l'espace en évitant d'écrire explicitement S_d complètement.

6.5 Unicité des décompositions en ondes de choc

Supposons que $\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} \neq 0$ et posons $\mathcal{R} = \bigcup\limits_{d \in \mathbb{N}^*} \mathcal{R}_d$ où $\mathcal{R}_d$ est l'ensemble des $\mu = (\mu_1, ..., \mu_d) \in \mathbb{C}[X]^d$ avec $\deg \mu_j < d = \deg \mu_d$ pour $j \in \{1, ..., d\}$ tel que μ est une solution de S_d, $B_\mu(0, y) \underset{y \to 0^*}{\to} 1$ et $\Delta_\mu \neq 0$ où B_μ et Δ_μ sont définies dans le théorème 39 . Ce théorème indique que $\mathcal{R}_p \neq \varnothing$ et que si $\mu \in \mathcal{R}_d$, μ produit par des formules explicites une décomposition de G_1 sous la forme $-s_1 + X \otimes \frac{B'}{B} + 1 \otimes \frac{A}{B}$ où $-s_1$ est une d-onde de chocs dans $Z \backslash (E^\infty \cup \{\Delta_\mu = 0\})$ et où $A, B \in \mathbb{C}[Y]$ avec $\deg A < \deg B = r - \delta$ and $B(0) = 1$. Ainsi, on sait grâce à la proposition 33 que pour $z_* \in Z$ en dehors d'un sous-ensemble analytique propre S de Z et pour un voisinage suffisamment petit U_* de z_*, il existe des ondes de chocs $g_1, ..., g_d$ sur U_* dont les images sont deux à deux distinctes telles que pour tout $z \in U_*$,

$$-s_1(\mu, B)(z) = N_{g,1}(z)$$
$$N_{g,1}(z) + P(z) = G_1(z) = N_{h,1}(z) + P_1(z) = N_{Q,1}(z) + P_1$$

où les fonctions h_j sont les ondes de chocs $h_j^{z_*}$ définies dans le corollaire 25, c'est-à-dire les ondes de chocs engendrées par la collision de Q avec les droites L_z, $z \in U_*$.

A priori, rien ne garantit que $\{g_1, ..., g_d\} = \{h_1, ..., h_p\}$ car il se peut par exemple qu'il existe une partie finie non vide J de $\{1, ..., d\}$ telle que $\sum\limits_{j \in J} g_j$ se prolonge comme un élément de l'espace $\mathbb{C}(Y)_1[X]$ des fractions rationnelles affines en X. Dans ce cas, $G_1 = N_{\widetilde{g},1} - \widetilde{P}$ avec $\widetilde{P} = P - \sum\limits_{j \in J} g_j \in \mathbb{C}(Y)_1[X]$ et $\{\widetilde{g}_1, ..., \widetilde{g}_{\widetilde{d}}\}$ où $\widetilde{d} = d - \operatorname{Card} \widetilde{J} \in \{0, .., d-1\}$. Itérant cette réduction, sur se ramène au cas où

$$\forall J \in \mathcal{P}(\{1, .., d\}) \backslash \{\varnothing\}, \sum_{j \in J} g_j \notin \mathbb{C}(Y)_1[X]. \tag{67}$$

Le cas $d = 0$ ne se produit à l'issue de ces itérations que si au départ, $\sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant d} g_j$ et donc G_1, se prolonge comme élément de $\mathbb{C}(Y)_1[X]$. Le lemme ci-dessous étudie ce cas.

Lemme 40 *On utilise les notations du corollaire 25. G_1 se prolonge comme élément de $\mathbb{C}(Y)_1[X]$ si et seulement si Q est un domaine dans une courbe compacte connexe K telle que pour tout z_* dans Z_{reg} et z dans un voisinage suffisamment petit U_* de z_* dans Z_{reg},*

$$K \cap L_z = \left\{ \left(1 : h_j^{z_*}(z) : -x - yh_j^{z_*}(z)\right) ;\ 1 \leqslant j \leqslant p \right\} = Q \cap L_z.$$

Preuve. Supposons tout d'abord que K est une courbe compacte ayant les propriétés ci-dessus. Fixons z_* et U_* comme dans l'énoncé. Puisque K est une courbe algébrique, sur sait depuis les travaux d'Abel que $\sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} h_j^{z_*} \in \mathbb{C}(Y)_1[X]$ (voir par exemple [14]). Il s'ensuit que $G_1 = N_{h^{z_*},1} + P_1$ est, sur U_* et donc sur Z, rationnelle en y et affine en x.

Réciproquement, supposons que $G_1 \in \mathbb{C}(Y)_1[X]$. Alors $N_{h^{z_*},1} = G_1 - P_1$ est sur U_* rationnelle en y et affine en x. Comme $\left\{ \left(1 : h_j^{z_*}(z) : -x - yh_j^{z_*}(z)\right) ;\ 1 \leqslant j \leqslant p \right\} = Q \cap L_z$ pour tout $z \in U_*$, un théorème de Wood [36] stipule l'existence d'une courbe algébrique compacte K de degré p contenant Q. Puisque K est de degré p, $K \cap L_z = \{(1 : h_j(z) : -x - yh_j(z)) ;\ 1 \leqslant j \leqslant \lambda\} = Q \cap L_z$ pour tout $z \in U$. ■

Dans le cas où G_1 est rationnelle en y et affine en x, la courbe algébrique K du lemme 40 est connue au voisinage de bQ. On peut alors sélectionner de façon générique des coordonnées homogènes w pour qu'au moins une droite L_z, $z \in U$, rencontre $K \backslash Q$. On est ainsi ramené au cas général puisque le lemme 40 assure alors que même après réduction, d n'est pas nul.

Grâce à des résultats de Henkin [14] et de Collion [7], cette réduction de la famille (g_j) ramène à sa première équation le système sur-déterminé (29).

Proposition 41 *Les notations sont celles énoncées au début de cette section. On suppose que (67) est vérifiée. Pour le cas où Q est contenue dans une courbe algébrique, $\widehat{Q}$ désignant alors la plus petite courbe ayant cette propriété, sur suppose que $(0 : 1 : 0) \notin \widehat{Q}$ et qu'au moins une des droites L_z, $z \in U$, rencontre Q et $\widehat{Q} \backslash Q$. Ceci étant, $\{g_1, ..., g_d\} = \{h_1, ..., h_p\}$ et $P = P_1$.*

Preuve. Avec une éventuelle renumérotation, sur se ramène au cas où $g_\nu = h_\nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant t \in \mathbb{N}$ et que $\{g_{t+1}, ..., g_d\} \cap \{h_{t+1}, ..., h_p\} = \varnothing$.

1) On suppose que Q n'est pas contenue dans une courbe algébrique. Dans ce cas $d \in \mathbb{N}^*$ car sinon, $N_{h,1} \in \mathbb{C}(Y)_1[X]$ et G_1 se prolonge comme élément de $\mathbb{C}(Y)_1[X]$, ce qui est impossible d'après lemme 40.

Supposons $t < \min(p, d)$. Quitte à changer le point de référence z_* et à diminuer U_*, sur suppose que les courbes $H_\nu = \{(1 : h_\nu(z) : -x - yh_\nu(z)) ;\ z \in U_*\}$, $t + 1 \leqslant \nu \leqslant p$ et $C_\nu = \{(1 : g_\nu(z) : -x - yg_\nu(z)) ;\ z \in U_*\}$, $t + 1 \leqslant \nu \leqslant d$ sont lisses et deux à deux disjointes. On note alors φ la forme différentielle définie sur la réunion C de ces courbes par $\varphi|_{H_\nu} = d\frac{w_1}{w_0}$ lorsque $t + 1 \leqslant \nu \leqslant p$ et $\varphi|_{C_\nu} = -d\frac{w_1}{w_0}$ lorsque $t + 1 \leqslant \nu \leqslant d$. On note AR la transformée d'Abel-Radon du courant $\varphi \wedge [C]$. Par définition (voir [14], [7] ou [15]),

$$AR = d\Big(\sum_{t+1 \leqslant \nu \leqslant p} h_\nu - \sum_{t+1 \leqslant \nu \leqslant q} g_\nu\Big).$$

Mais du fait des hypothèses,

$$\sum_{t+1 \leqslant \nu \leqslant p} h_\nu - \sum_{t+1 \leqslant \nu \leqslant q} g_\nu = N_{h,1} - N_{g,1} = R - P_1.$$

AR est donc algébrique au sens de [7] de sorte que le théorème 1.2 de [7] s'applique et donne en particulier l'existence d'une courbe algébrique Λ qui contient C. Puisque Q n'est pas contenue dans Λ, la connexité de Q impose qu'aucune des courbes H_ν n'est contenue dans Λ et donc que $\{h_1,...,h_p\} \subset \{g_1,...,g_d\}$. Ainsi, $\sum\limits_{p<\nu\leqslant d} g_\nu$ est une fonction algébrique affine en x, ce qui est impossible de par la réduction faites sur $(g_j)_{1\leqslant j\leqslant d}$. D'où $t = \min(p,d)$.

Si $t = d < p$, la relation $N_{g,1}+P = N_{h,1}+P_1$ se lit aussi $h_{t+1}+\cdots+h_p = P_1 - P \in \mathbb{C}(Y)_1[X]$ et le théorème de Wood implique, puisque Q est connexe, que Q est contenue dans une courbe algébrique ce qui est exclu par hypothèse. Si $t = p < d$, $g_{t+1}+\cdots+g_d = N_{g,1} - N_{h,1} + P - P_1 \in \mathbb{C}(Y)_1[X]$ ce qui est exclu du fait de la réduction faite sur la famille (g_j).

Finalement $t = p = d$, $\{h_1,...,h_p\} = \{g_1,...,g_d\}$ et $P_1 = R$.

2) Supposons maintenant que Q est contenue dans une courbe algébrique $\widehat{Q}$, minimale au sens de l'inclusion. Par hypothèse $(0:1:0) \notin \widehat{Q}$ et $\widehat{Q}\backslash Q$ est bordé par $-\partial Q$. Quitte à changer de point de référence z_* et à diminuer U_*, sur peut supposer que pour tout $z \in U_*$, L_z coupe transversalement $\widehat{Q}$. On note alors $h_{p+1},...,h_{\widehat{p}}$ les ondes de choc sur U_* telles que pour tout $z \in U$,

$$(\widehat{Q}\backslash Q) \cap L_z = \{(1 : h_\nu(z) : -x - yh_\nu(z))\,;\ p+1 \leqslant \nu \leqslant \widehat{p}\}\,.$$

Puisque $\widehat{Q}$ est une courbe algébrique, $N_{\widehat{Q},1} \overset{déf}{=} N_{h,1} + N_{h_{p+1},...,h_{\widehat{p}}} \overset{déf}{=} N_{h,1} + \widehat{N}_1$ est rationnelle en y et affine en x. D'où

$$N_{g,1} + \widehat{N}_1 = N_{g,1} - N_{h,1} + N_{\widehat{Q},1} = P_1 - R + N_{\widehat{Q},1} \in \mathbb{C}(Y)_1[X]$$

La somme $N_{g,1} + \widehat{N}_1$ se récrit $\sum\limits_{1\leqslant\lambda\leqslant s} c_\lambda f_\lambda$ où $f_1,...f_s$ sont les fonctions deux à deux distinctes constituant la réunion de $\{g_\nu;\ 1 \leqslant \nu \leqslant q\}$ et $\{h_\nu;\ p+1 \leqslant \nu \leqslant \widehat{p}\}$ et où $c_\lambda = 2$ si f_λ est dans l'intersection de ces deux ensembles et 1 sinon. Comme précédemment, sur peut choisir z_* et U_* pour que les fonctions f_λ aient des images deux à deux disjointes. On peut alors introduire la forme ψ qui sur $F_\lambda = \{(1 : f_\lambda(z) : -x - yf_\lambda(z))\,;\ z \in U\}$ vaut $d\frac{w_1}{w_0}$ si $c_\lambda = 1$ et $2d\frac{w_1}{w_0}$ si $c_\lambda = 2$. La forme $\sum\limits_{1\leqslant\lambda\leqslant s} c_\lambda df_\lambda$ est la transformée d'Abel-Radon de $\psi \wedge [F]$ où $F = \cup F_\lambda$. Celle-ci étant rationnelle, le théorème principal de Henkin dans [14] s'applique et donne en particulier l'existence d'une courbe algébrique $\widetilde{F}$ et d'une forme rationnelle Ψ telles que pour tout λ, $\Psi\,|_{F_\lambda} = \psi$ et pour tout $z \in U_*$, $\widetilde{F} \cap L_z = \cup L_z \cap F_\lambda$. Etant donné que $\widehat{Q} \cap \widetilde{F}$ contient $(\widehat{Q}\backslash Q) \underset{z\in U_*}{\cup} L_z$, $\widehat{Q} \subset \widetilde{F}$. Si $\widetilde{F} \neq \widehat{Q}$, $\overline{\widehat{Q}\backslash\widetilde{F}}$ est une courbe algébrique dont les intersections avec les L_z, $z \in U_*$, se paramètre avec une sous-famille des g_j. Ceci est impossible car du fait des hypothèses, $d \neq 0$ et aucune sous-famille de (g_j) n'a de somme qui soit rationnelle en y et affine en x. Ainsi, $\widehat{Q} = \widetilde{F}$ et lorsque $z \in U_*$, $\widehat{Q} \cap L_z$ est la réunion de $(\widehat{Q}\backslash Q) \cap L_z$ et de $\{(1 : g_j(z) : -x - yg_\lambda(z))\,;\ 1 \leqslant j \leqslant d\}$. Ceci force $\{h_1,...,h_p\} = \{g_1,...,g_d\}$ et $P_1 = R$. ■

7 Genre d'une surface de Riemann à bord

La formule (71) du théorème 44 relie le genre $g(M)$ de M à des données associées à la structure complexe $\mathcal{C}_\sigma$ de (M,σ). Elles probablement bien connue des spécialistes mais nous n'en avons pas trouvé de référence. Le corollaire 45 fait le lien avec l'opérateur complexe de Dirichlet-Neumann θ_c^σ. La formule obtenue n'est cependant pas encore effective car on ne connaît pas la caractéristique d'Euler de $\overline{M}$. Mais comme expliqué dans la preuve du théorème 6 donnée à la fin de cette section, le théorème 2 et le lemme 47 permettent d'en déduire un majorant effectif du nombre clé p des ondes de chocs cherchées dans le procédé de reconstruction décrit dans la section 2.

Rappelons que $g(M)$ est par définition le genre de la variété compacte obtenue par recollant c (deux à deux disjoints) disques conformes le long des c composantes connexes de bM. Dans [5], Belishev donne pour un bord connexe la formule

$$2g(M) = \mathrm{rg}\left(T + (N^{\nu} J)^2 T\right)$$

où T est la dérivation tangentielle, N^{ν} est l'opérateur Dirichlet-Neumann dans sa présentation métrique, c'est à dire celui qui à $u \in C^{\infty}(bM)$ associe la dérivée normale le long de bM du prolongement harmonique de u à M et J est l'opérateur de primivitisation naturel défini sur l'espace des fonctions dont l'intégrale sur ∂M est 0. Cependant le calcul a priori du rang de $T + (N^{\nu} J)^2 T$ n'est pas forcément facile. Pour contourner cette difficulté, [6] et [32] proposent d'utiliser des opérateurs de Dirichlet-Neumann agissant sur les formes. Ceci donne des formules simples pour $g(M)$ dans le cas où la conductivité se réduit à une structure complexe mais il n'est pas clair que ces opérateurs aient un sens physique.

Afin de produire des formules dont les ingrédients sont calculables à partir de N_d^{σ}, on utilise des formes volumes spéciales pour M et des métriques spéciales pour le fibré $\Lambda^{1,0}T^*\overline{M}$ des $(1,0)$-formes sur $\overline{M}$.

Définition 42 *Soit M une surface de Riemann à bord. On se donne une fonction définissante ρ de bM, ce qui signifie $\rho \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ telle que $\rho|_{B\cap M} < 0$, $\rho|_{B\cap bM} = 0$ et $(d\rho|_B)_s \neq 0$ pour tout $s \in bM$. Dans ces conditions, toute section ω de $\Lambda^{p,q}T^*\overline{M}$ de classe C^k, $k \geqslant 1$, sur un ouvert U de $\overline{M}$ peut s'écrire sous la forme $\omega_0 + \rho\omega_1$ où ω_j, $j = 0, 1$, est une section de $\Lambda^{p,q}T^*\overline{M}$ sur U de classe C^{k-j}, le couple $\left(\omega_{\rho}^{(0)}, \omega_{\rho}^{(1)}\right) = (\omega_0|_{U\cap M}, \omega_1|_{U\cap M})$ étant le même pour tout (ω_0, ω_1) tel que $\omega = \omega_0 + \rho\omega_1$. Le fait que $\omega_{\rho}^{(1)}$ soit nulle ne dépend pas du choix de la fonction définissante ρ choisie. On dit que ω est tangente à bM lorsque $\omega_{\rho}^{(1)} = 0$.*

L'existence d'une décomposition $\omega = \omega_0 + \rho\omega_1$ découle de ce que ρ peut être prise comme l'une des coordonnées d'un système de coordonnées réelles pour $\overline{M}$ au voisinage de bM. L'unicité de $(\omega_{\rho}^{(0)}, \omega_{\rho}^{(1)})$ provient de la même raison et si ρ' est une autre fonction définissante de bM, on peut écrire $\rho' = \lambda\rho$ où λ est une fonction qui ne s'annule pas, de sorte que l'annulation de $\omega_{\rho'}^{(1)} = \lambda|_M \,\omega_{\rho}^{(1)}$ et $\omega_{\rho}^{(1)}$ est simultanée.

Notons que lorsque M est munie d'une métrique hermitienne et que ρ est la distance à bM, $\omega_{\rho}^{(1)} = \frac{\partial \omega}{\partial \rho}|_{bM}$ n'est rien d'autre que la dérivée de ω par rapport au vecteur unitaire qui oriente la normale extérieure à $\overline{M}$ aux points de bM. Le lemme ci-dessous assure qu'il existe des formes volumes satisfaisant l'hypothèse du théorème principal de cette section.

Lemme 43 *Soit (M,σ) une structure de conductivité. Alors $\overline{M}$ admet une forme volume de classe C^2 tangentes à son bord et dont la restriction à bM est calculables à partir de données de bord associées à (M,σ).*

Preuve. Comme mentionné à la fin de la section 3, on peut fabriquer à partir de données de bord, une section lisse μ_0 du fibré des formes volumes de $\overline{M}$ au dessus de bM. Soient $\widehat{M}$ le double of M (voir la preuve du théorème 44 pour une construction détaillée), V une forme volume arbitraire de classe C^2 sur le double $\widehat{M}$ de M et $\rho \in C^{\infty}(\widehat{M},\mathbb{R})$ telle que $M = \{\rho < 0\}$, $bM = \{\rho = 0\}$ et $(d\rho)_s \neq 0$ pour tout $s \in bM$. En utilisant le théorème de prolongement de Whitney (voir [3, prop. 2.2]), on peut construire une section $\widetilde{V}$ de $\Lambda^{1,1}T\widehat{M}$ de classe C^2 telle que $\widetilde{V}|_M = V_0$ et $V_{\rho}^{(1)} = \frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \rho}|_{bM} = 0$. Par continuité, il existe un voisinage Σ de bM dans $\widehat{M}$ tel que $\widetilde{V}|_{\Sigma}$ est une forme volume. Soit $\chi \in C^{\infty}(M,[0,1])$ valant 1 au voisinage de bM dans Σ

et dont le support est contenu dans Σ. $W = \chi\widetilde{V} + (1-\chi)\,V$ est une forme volume W de classe C^2 sur $\widehat{M}$ telle que $W_\rho^{(1)} = \frac{\partial W}{\partial \rho}\,|_{bM} = 0$. ■

Soit (M,σ) une structure de conductivité et μ une forme volume pour $\overline{M}$ comme dans le lemme 43. Notons $*$ et $\Lambda^{1,0}T^*\overline{M}$ l'opérateur de conjugaison et le fibré des $(1,0)$-formes associé à $(M,\mathcal{C}_\sigma)$. Pour la simplicité des notations, on pose dans cette section $\partial = \partial^\sigma = d - \overline{\partial}$ où $\overline{\partial} = \overline{\partial}^\sigma$ est l'opérateur de Cauchy-Riemann de $(M,\mathcal{C}_\sigma)$. On munit $\Lambda^{1,0}T^*\overline{M}$ de la métrique h^* définie pour $s \in \overline{M}$ et $\alpha,\beta \in \Lambda^{1,0}T_s^*\overline{M}$ par

$$h_s^*(\alpha,\beta) = \frac{\alpha \wedge *_s\overline{\beta}}{\mu_s} \tag{68}$$

Notons D la connexion de Chern de h. On peut trouver une définition dans [8], [10, p. 73] ou [35] mais nous rappelons ici quelques bases. Choisissons une section lisse e de $\Lambda^{1,0}T^*\overline{M}$ au-dessus d'un ouvert W de $\overline{M}$, ne s'annulant pas et holomorphe dans $W \cap M$. Soit $|e|_{h^*} = \sqrt{h^*(e,e)}$ la norme ponctuelle de e par rapport à h^*. Alors

$$\eta_e = \frac{\partial\,|e|_{h^*}^2}{|e|_{h^*}^2} = \partial \ln h^*(e,e) \tag{69}$$

est la forme de connexion de D associée à e, la courbure $\Theta = d\eta_e = \overline{\partial}\eta_e$ de D ne dépend pas de e et si $\omega = \lambda e$, $\lambda \in C^\infty(W)$, est une section lisse arbitraire de $\Lambda^{1,0}T_s^*\overline{M}$ au-dessus de W, $D\omega$ est la 1-forme à valeurs dans $\Lambda^{1,0}T_W^*\overline{M}$ donnée par $D\omega = (d\lambda)\,e + \eta_e\omega$. Si ω est aussi holomorphe dans $W \cap M$, on obtient $\frac{D\omega}{\omega} = \frac{\partial\lambda}{\lambda} + \eta_e$. Notons qu'en particulier, $\eta_e = \frac{De}{e}$.

Lorsque $\sigma\Big|_{T_{bM}^*\overline{M}}$ est supposée connue, il en est de même pour $\frac{D\omega}{\omega}\,|_{bS}$ lorsque ω est une $(1,0)$-forme près de bM. En effet, grâce au théorème 5, on sait qu'avec la surface Riemann nodale $\mathcal{M}$ fabriquée par le théorème 2, on peut trouver des sections lisses ne s'annulant pas de $\Lambda^{1,0}T_{bM}^*\overline{M}$ qui se prolongent holomorphiquement à M en calculant $\theta_c^\sigma u$ pour des $u \in C^\infty(bM)$ adéquats. Pour un tel u et son prolongement harmonique $\widetilde{u}$ à M, $\partial\widetilde{u}$ est un repère holomorphe pour $\Lambda^{1,0}T_W^*\overline{M}$ où $W = \{\partial\widetilde{u} \neq 0\}$ and (69) devient

$$\frac{D\partial\widetilde{u}}{\partial\widetilde{u}} = \eta_{\partial\widetilde{u}} = \partial \ln h^*(\partial\widetilde{u},\partial\widetilde{u}) = \partial \ln\left(\frac{\partial\widetilde{u} \wedge *\overline{\partial\widetilde{u}}}{\mu}\right) \tag{70}$$

Puisque la structure complexe de $\overline{M}$ est connue le long de bM et puisque $\partial\widetilde{u}$ est holomorphe, les équations de Cauchy-Riemann permettent de calculer la dérivée normale de $\partial\widetilde{u}$ à partir de sa dérivée tangentielle. Cela signifie que dans (70), les dérivées provenant de $\partial\widetilde{u}$ sont calculables sur bM à partir de données de bord disponibles. Etant donné que la forme volume μ est tangentielle à bM, sa dérivée normale est zero et sa dérivée tangentielle est connue. Ainsi $\frac{D\partial\widetilde{u}}{\partial\widetilde{u}}\,|_{bM}$, c'est-à-dire $\eta_{\partial\widetilde{u}}\,|_{bM}$, est calculable à partir de données de bord disponibles, ce qu'il nous fallait vérifier.

Notons que pour le calcul d'une forme de connexion le long de bM, il n'est pas obligatoire d'utiliser un repère de la forme $\theta_c^\sigma u$. En effet, $F : M \to \mathcal{M}$ étant la normalisation de la courbe complexe nodale $\mathcal{M}$ of $\mathbb{C}^2$ fabriquée par le théorème 2 et γ étant un ouvert de $b\mathcal{M}$, on peut choisir dans $\Lambda^{1,0}T_\gamma^*\overline{\mathcal{M}}$ une section lisse arbitraire sans zéro φ qui se prolonge en une $(1,0)$-forme $\widetilde{\varphi}$ lisse sur $\mathcal{W}$ et holomorphe sur $\mathcal{W}\backslash b\mathcal{M}$ où $\mathcal{W}$ est un ouvert de $\overline{\mathcal{M}}$ contenant γ et tel que $\mathcal{W}\backslash b\mathcal{M} \subset \operatorname{Reg}\mathcal{M}$. Alors $\left(F\Big|_{W\backslash bM}^{\mathcal{W}\backslash\mathcal{BM}}\right)^*\widetilde{\varphi}$, qu'on abrège en $F^*\widetilde{\varphi}$, est une $(1,0)$-forme holomorphe de $(M,\mathcal{C}_\sigma)$ qui se prolonge à W en une forme lisse dont la restriction à $f^{-1}(\gamma)$ est

$F^*\varphi$. La forme de connexion $\eta_{F^*\widetilde{\varphi}} = \partial \ln h^* (F^*\widetilde{\varphi}, F^*\widetilde{\varphi})$ associée à $F^*\widetilde{\varphi}$ est calculable à partir de données de bord disponibles comme précédemment. En outre, puisque F est holomorphe de $(M, \mathcal{C}_\sigma)$ vers $\mathcal{M}$, on peut aussi faire les calculs dans $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}^2$ puis ramener le résultat sur bM par F :

$$\eta_{F^*\varphi} = F^* \partial \ln \frac{\partial \widetilde{\varphi} \wedge * \overline{\partial} \widetilde{\varphi}}{F_* \mu}$$

où ici $\partial = d - \overline{\partial}$ et $\overline{\partial}$ est l'opérateur de Cauchy-Riemann de $\overline{\mathcal{M}}$ et $*$ son opérateur de Hodge.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème 44. Il est plus à propos de la surface de Riemann $(M, \mathcal{C}_\sigma)$ que de (M, σ).

Théorème 44 *Soient (M, σ) une structure conductivité et κ le nombre des composantes connexes de bM. On se donne une forme volume μ comme dans le lemme 43, on munit $\Lambda^{1,0} T^* \overline{M}$ de la métrique h^* définie par (68) et on note D sa connexion de Chern. Alors, lorsque ω est une $(1,0)$-forme $\mathcal{C}_\sigma$-méromorphe sur $\overline{M}$, sans pôle ni zéro sur bM,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \frac{D\omega}{\omega} = N_z(\omega) - N_p(\omega) + 2 - 2g(M) - \kappa \tag{71}$$

où $N_z(\omega)$ et $N_p(\omega)$ sont respectivement le nombre de zéros et de pôles de ω comptés avec leur multiplicité or ordre.

Remarque. Supposons que μ' est une forme volume pour $\overline{M}$ ayant les mêmes propriétés que μ. La fonction $\lambda : \overline{M} \to \mathbb{R}$ telle que $\mu = e^{2\lambda} \mu'$ vérifie $D_\mu = D_{\mu'} - \partial \lambda$, ce qui donne $\int_{\partial M} \frac{D_\mu \omega}{\omega} = \int_{\partial M} \frac{D_{\mu'} \omega}{\omega} - \int_{\partial M} j_{bM}^* \partial \lambda$. (71) indique alors que $\int_{\partial M} j_{bM}^* \partial \lambda = 0$. Pour vérifier cela un priori, considérons une fonction définissante ρ de bM. De la relation $\frac{\partial \mu}{\partial \rho} = e^\lambda \frac{\partial \mu'}{\partial \rho} + \mu' \frac{\partial \lambda}{\partial \rho}$ qui est valable sur bM, on tire $\frac{\partial \lambda}{\partial \rho}|_{bM} = 0$. Munissons M d'une métrique hermitienne et considérons une section lisse (ν, τ) de $\left(T_{bM} \overline{M}\right)^2$ telle que pour chaque $s \in bM$, (ν_s, τ_s) est une base orthonormée directe de $T_s \overline{M}$. Alors pour tout $s \in bM$, $(\partial \lambda)_s = \frac{1}{2} \left((\nu \lambda)_s - i (\tau \lambda)_s \right) (\tau_s^* + i \nu_s^*)$ où (τ_s^*, ν_s^*) est la base duale de (ν_s, τ_s). Lorsque $s \in bM$, le fait que $\frac{\partial \lambda}{\partial \rho}(s) = 0$ indique que $(d\lambda)_s \in \mathbb{R} \tau_s^*$ et donc que $(\nu \lambda)_s = 0$, ce qui donne $(\partial \lambda)_s = \frac{1}{2i} (\tau \lambda)_s (\tau_s^* - i \nu_s^*)$. D'où $j_{bM}^* \partial \lambda = \frac{1}{2i} (\tau \lambda) \tau^* |_M = \frac{1}{2i} j_{bM}^* d\lambda$. Ainsi, $j_{bM}^* \partial \lambda$ est exacte et son intégrale sur ∂M est nulle.

Avec la formule (74) ci-dessous, on obtient le corollaire 45 comme cas particulier du théorème 44.

Corollaire 45 *Les hypothèses et notations sont les mêmes que celles du théorème 44. Soit $u \in C^\infty(bM)$, $\widetilde{u}$ son prolongement $\mathcal{C}_\sigma$-harmonique à M et q le nombre $N_z(\partial^\sigma \widetilde{u})$ de zéros de $\partial \widetilde{u}$ comptés avec leurs multiplicité où $\partial^\sigma = d - \overline{\partial}^\sigma$ et $\overline{\partial}^\sigma$ est l'opérateur de Cauchy-Riemann de $(M, \mathcal{C}_\sigma)$. On suppose que $\partial^\sigma \widetilde{u}$ ne s'annule pas sur bM. Alors*

$$q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \frac{D \partial^\sigma \widetilde{u}}{\partial^\sigma \widetilde{u}} - \chi\left(\overline{M}\right). \tag{72}$$

Preuve du théorème 44. Commençons par détailler une construction du double $\widehat{M}$ de M qu'on trouve par exemple dans [2]. Soit $\mathcal{U}$ un atlas de M. On utilise les notations suivantes : pour $\nu \in \{-1, +1\}$ et $X \subset \overline{M}$, $X_\nu = X \times \{\nu\}$ et si $(s, \nu) \in M_1 \cup M_{-1}$, $\pi(s, \nu) = s$; lorsque $s \in bM$, les points de $\widehat{M} = \overline{M_1} \cup \overline{M_{-1}}$ de la forme $(s, -1)$ et $(s, 1)$ sont identifiés et forment la courbe réelle γ. On munit M_1 de la structure complexe associée à l'atlas $\mathcal{U}_1$ constitué par les applications $\varphi_1 : U_1 \ni p \mapsto \varphi(\pi(p))$ où $\varphi : U \to \mathbb{C}$ décrit $\mathcal{U}$. Pour M_{-1}, sur utilise l'atlas

$\mathcal{U}_{-1}$ des applications $\varphi_{-1} : U_{-1} \ni p \mapsto -\overline{\varphi(\pi(p))}$, $\varphi : U \to \mathbb{C}$ décrivant $\mathcal{U}$. On obtient un atlas $\widehat{\mathcal{U}} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_b \cup \mathcal{U}_{-1}$ conférant à $\widehat{M}$ une structure complexe en définissant $\mathcal{U}_b$ comme l'ensemble des applications φ_b définies de la manière suivante : sur se donne une carte de bord pour $\overline{M}$ c'est à dire $\varphi \in C^\infty(U, \mathbb{C})$ où U est un ouvert de $\overline{M}$ tel que $b_U M = \overline{U} \cap bM$ est un ouvert de bM, $\varphi(U \backslash M) = \mathbb{D}^+ = \mathbb{D} \cap \{\mathrm{Im} > 0\}$ et $\varphi(b_U M) =]-1, 1[$; φ_b est l'application de $U_b = U_1 \cup U_{-1}$ dans $\mathbb{C}$ obtenue en posant $\varphi_b(s, 1) = \varphi(s)$ et $\varphi_b(s, -1) = \overline{\varphi(s)}$ pour tout $s \in U$.

On définit des formes volumes μ_1 et μ_{-1} sur $\overline{M}_1$ et $\overline{M}_{-1}$ en posant lorsque $\varphi : U \to \mathbb{C}$ est une carte de $\overline{M}$,

$$\begin{gathered}(\varphi_{1*}\mu_1)_z = (\varphi_*\mu)_z = \lambda_\varphi(z)\, idz \wedge d\overline{z},\ z \in U \\ \left(\varphi_{-1*}\mu_{-1}\right)_w = (\varphi_*\mu)_{-\overline{w}} = \lambda_\varphi(-\overline{w})\, idw \wedge d\overline{w},\ -\overline{w} \in U\end{gathered}$$

Cette définition est évidemment cohérente pour μ_1. Supposons que $\psi : V \to \mathbb{C}$ est une autre carte de M et $\psi_*\mu = \lambda_\psi idz \wedge d\overline{z}$. On note $\Phi : \psi(U \cap V) \ni z \mapsto \varphi\left(\psi^{-1}(z)\right)$ le changement de carte de ψ à φ. On un donc $\lambda_\psi = |\Phi'|^2 \lambda_\varphi \circ \Phi$. Le changement de carte de $\psi_{-1} : V_{-1} \to \mathbb{C}$ à $\varphi_{-1} : U_{-1} \to \mathbb{C}$ est alors l'application Φ_{-1} définie sur $\psi_{-1}(V_{-1} \cap U_{-1}) = -\overline{\psi}(U \cap V)$ par

$$\Phi_{-1}(w) = \varphi_{-1}\left(\left(\psi_{-1}\right)^{-1} w\right) = \varphi_{-1}\left(\psi^{-1}(-\overline{w}), -1\right) = -\overline{\varphi}\left(\psi^{-1}(-\overline{w})\right) = -\overline{\Phi(-\overline{w})}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\Phi_{-1}^*\left(\lambda_\varphi(-\overline{z})\, idz \wedge d\overline{z}\right) &= \lambda_\varphi(\Phi(-\overline{w}))\, i\left(-\frac{\partial\overline{\Phi(-\overline{w})}}{\partial w} dw\right) \wedge \left(\left(-\frac{\partial\Phi(-\overline{w})}{\partial\overline{w}} d\overline{w}\right)\right) \\ &= \lambda_\varphi(\Phi(-\overline{w}))\left|\Phi'(-\overline{w})\right|^2 idw \wedge d\overline{w} = \lambda_\psi(-\overline{w})\, idw \wedge d\overline{w},\end{aligned}$$

ce qui prouve la cohérence de la définition de μ_{-1}.

Les formes μ_1 et μ_{-1} se recollent continûment le long de γ en une forme volume $\widehat{\mu}$ pour $\widehat{M}$. En effet, considérons une carte de bord $\varphi : U \to \mathbb{C}$ pour $\overline{M}$ et la carte $\varphi_b : U_b \to \mathbb{C}$ définie comme plus haut. Posons $\varphi_*\mu = \lambda_\varphi idz \wedge d\overline{z}$. Lorsque $s \in U$, $\varphi_b(s, -1) = \overline{\varphi(s)}$ et $\varphi_{-1}(s, -1) = -\overline{\varphi(s)}$. Donc le changement de carte de φ_b à φ_{-1} est l'application de $\overline{U}$ dans $-\overline{U}$, $z \mapsto -z$. D'où

$$\left((\varphi_b)_*\,\mu_{-1}\right)_z = \lambda_\varphi(\overline{z})\, idz \wedge d\overline{z} = (\varphi_{1*}\mu_1)_{\overline{z}}$$

pour tout $z \in \mathbb{D}^- \cup]-1, 1[$ où $\mathbb{D}^- = \mathbb{D} \cap \{\mathrm{Im} > 0\}$. Etant donné que $\varphi(b_U M) =]-1, 1[$, ceci montre que $\mu_{-1} = \mu_1$ en chaque point de $\gamma \cap U$. Ecrivons au voisinage dans $\mathbb{D}^+ \cup]-1, 1[$ la fonction λ_φ sous la forme $\lambda_{\varphi,0}(x) + \lambda_{\varphi,1}(x)\, y + \lambda_{\varphi,2}(x)\, y^2 + o(y^2)$. Puisque μ est tangente à bM par hypothèse, $0 = \lambda_{\varphi,1}$ sur bM et il apparaît que $\widehat{\mu}$ est de classe C^2.

On peut maintenant munir $\Lambda^{1,0} T_p^* \widehat{M}$, $p \in \widehat{M}$, de la métrique $\widehat{h_p^*}$ définie par

$$\widehat{h_p^*}(\alpha, \beta) = \frac{\alpha \wedge *\overline{\beta}}{\widehat{\mu}_p}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \Lambda^{1,0} T_p^* \widehat{M}$. La connexion de Chern D qui lui est associée est donc de classe C^2. Considérons une $(1, 0)$-forme méromorphe sans pôle ni zéro sur bM. Comme rappelé précédemment, si e est une section holomorphe génératrice locale de $\Lambda^{1,0} T^* \widehat{M}$ et $\omega = \lambda e$, $\frac{D\omega}{\omega} = \frac{d\lambda}{\lambda} + \widehat{\eta}$ où $\widehat{\eta}$ est la forme de connexion de D associée à e. Puisque λ se doit être méromorphe avec les mêmes zéros and pôles que ω là où la formule $\omega = \lambda e$ est valide et puisque $d\eta$ est la courbure $\widehat{\Theta}$ or D, la formule de Stokes, appliquée à des domaines obtenus par retirant à M_1 des disques conformes arbitrairement petit autour des zéros and et pôles de ω, livre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial M}\frac{D\omega}{\omega}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial M_1}\frac{D\omega}{\omega}=N_z(\omega)-N_p(\omega)-\frac{1}{2\pi}\int_{M_1}i\widehat{\Theta} \tag{73}$$

Si on admet que $\frac{1}{2\pi}\int_{M_1}i\widehat{\Theta}=\frac{1}{2\pi}\int_{M_{-1}}i\widehat{\Theta}$, (71) résulte des formules (73) et (74) car alors $\widehat{M}$ étant compacte et D de classe C^2, $\frac{1}{2\pi}\int_{M_1}i\widehat{\Theta}=\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{\widehat{M}}i\widehat{\Theta}=\frac{1}{2}c_1(\widehat{M})=g\left(\widehat{M}\right)-1$ où $\frac{1}{2}c_1(\widehat{M})$ est la première classe de Chern de $\widehat{M}$. Une preuve de cette dernière égalité peut être trouvée par exemple dans [34, Th. 9.1] ou dans [8, p. 319] où elle est appelée formule de Hurwitz.

Notons j la symétrie naturelle de $\widehat{M}$ par rapport à γ et c la conjugaison de $\mathbb{C}$. Lorsque $\varphi: U\to\mathbb{C}$ est une carte de M, l'expression de j dans les cartes φ_1 et φ_{-1} est $\varphi_{-1}\circ j\circ(\varphi_1)^{-1}$ c'est à dire $-c\Big|_U^{\overline{U}}$. j échange donc les orientations de M_1 et M_{-1} ce qui donne

$$\int_{M_1}\widehat{\Theta}=-\int_{M_{-1}}j^*\widehat{\Theta}.$$

Lorsque $\psi: V\to\mathbb{C}$ est une carte de $\widehat{M}$, l'application $\widetilde{\psi}: j(V)\to\mathbb{C}$ définie par $\widetilde{\psi}=\overline{\psi}\circ j$ est aussi une carte de $\widehat{M}$. Ceci permet (voir [2] par exemple) à partir d'une section ω de $\Lambda T^*\widehat{M}$ sur une partie X de $\widehat{M}$, de définir une section $\widetilde{\omega}$ de $\Lambda T^*\widehat{M}$ sur $j(X)$ en posant pour chaque carte $\psi: V\to\mathbb{C}$ de $\widehat{M}$ telle que $V\cap X\neq\varnothing$, $\left(\widetilde{\psi}_*\widetilde{\omega}\right)_w=\beta(\overline{w})\,dw+\alpha(\overline{w})\,d\overline{w}$ lorsque $\psi_*\omega=\alpha dz+\beta d\overline{z}$ et $\overline{w}\in\psi(V\cap X)$. En particulier, ω étant une section fixée de $\Lambda^{1,0}T^*M$ sans zéro sur $\overline{M}$, holomorphe sur bM et de classe C^∞ sur $\overline{M}$, $\omega_1=\pi^*\omega$ (resp. $\omega_{-1}=\widetilde{\overline{\omega_1}}$) est une section de $\Lambda^{1,0}T^*\widehat{M}$ sans zéro sur $\overline{X}_1$ (resp. $\overline{X_{-1}}$), holomorphe sur X_1 (resp. X_{-1}) et de classe C^∞ sur (resp. $\overline{X_{-1}}$). Posant $f_\nu=\ln\widehat{h}(\omega_\nu)^2$, sur sait alors que

$$\widehat{\Theta}\,|_{M_\nu}=d\partial f_\nu,\ \ \nu=\pm1.$$

Fixons une carte $\varphi: U\to\mathbb{C}$ et posons $\varphi_*\omega=\alpha dz$. Alors $(\varphi_1)_*\,\omega_1=\alpha dz$ et $(\widetilde{\varphi_1})_*\,\omega_{-1}=\overline{\alpha(\overline{w})}dw$. Puisque $*$ agit sur les $(0,1)$-formes comme la multiplication par $\frac{i}{2}$, sur obtient que

$$(\widetilde{\varphi_1})_*\left(\omega_{-1}\wedge*\overline{\omega_{-1}}\right)=\overline{\alpha(\overline{w})}dw\wedge\frac{i}{2}\alpha(\overline{w})\,d\overline{w}=|\alpha(\overline{w})|^2\,\frac{i}{2}dw\wedge d\overline{w}$$

Posons $\mu=\lambda_\varphi\frac{i}{2}dz\wedge d\overline{z}$. L'expression de μ_{-1} dans la carte φ_{-1} est $\varphi_{-1*}\mu_{-1}=\lambda_\varphi(-\overline{z})\,\frac{i}{2}dz\wedge d\overline{z}$. $\widetilde{\varphi_1}$ est aussi une carte définie sur $j(U_1)=U_{-1}$ et le changement de cartes de $\widetilde{\varphi_1}$ à φ_{-1} est l'application Φ qui à $w\in\widetilde{\varphi_1}(U_{-1})=\overline{U}$ associe le nombre $\Phi(w)$ définie par

$$\begin{aligned}\Phi(w) &= \widetilde{\varphi_1}\left(\left(\varphi_{-1}\right)^{-1}(w)\right)=\left(\overline{\varphi_1}\circ j\right)\left(\varphi^{-1}(-\overline{w}),-1\right)\\ &= \overline{\varphi_1\left(\varphi^{-1}(-\overline{w}),1\right)}=\overline{\varphi\left(\varphi^{-1}(-\overline{w})\right)}=-w.\end{aligned}$$

Ainsi, pour $w \in \mathbb{D}^- \cup [-1,1]$,

$$\begin{aligned}
\left((\widetilde{\varphi_1})_* \mu_{-1}\right)_w &= \left((\widetilde{\varphi_1})^{-1}\right)^* \varphi_{-1}^* \varphi_{-1*}\mu_{-1} = \left(\varphi_{-1} \circ (\widetilde{\varphi_1})^{-1}\right)^* \varphi_{-1*}\mu_{-1} \\
&= \left(\Phi^{-1}\right)^* \varphi_{-1*}\mu_{-1} = \left(\Phi^{-1}\right)^* \left(\lambda_\varphi(-\overline{z}) \frac{i}{2} dz \wedge d\overline{z}\right) \\
&= \lambda_\varphi(\overline{w}) \frac{i}{2} dw \wedge d\overline{w} = (\varphi_{1*}\mu_1)_{\overline{w}}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\left((\widetilde{\varphi_1})_* \widehat{h}(\omega_{-1})\right)(w) &= \frac{(\widetilde{\varphi_1})_* (\omega_{-1} \wedge *\overline{\omega_{-1}})}{\varphi_{-1*}\mu_{-1}}(w) = \frac{|\alpha(\overline{w})|^2}{\lambda(\overline{w})} \\
&= (\varphi_1)_* \left(\widehat{h}(\omega_1)\right)(\overline{w})
\end{aligned}$$

On en déduit que $\widehat{h}(\omega_{-1}) \circ \widetilde{\varphi_1}^{-1} = \widehat{h}(\omega_1) \circ (\varphi_1)^{-1} \circ c$ et donc $(\widetilde{\varphi_1})_* f_{-1} = (\varphi_1)_* f_1 \circ c$ (ce qui, au passage, livre $f_{-1} = f_1 \circ j$). Dérivant deux fois cette relation et en utilisant que $d\overline{\partial} = -d\partial$, on obtient finalement que $j^*\widehat{\Theta} = -\widehat{\Theta}$ et donc que $\int_{M_1} \widehat{\Theta} = \int_{M_{-1}} \widehat{\Theta}$, ce qui achève la preuve du théorème. ■

Lemme 46 *Soit M une surface de Riemann à bord. On note κ le nombre de composantes connexes du bord de M et $\widehat{M}$ le double de M. Le genre $g(\widehat{M})$ et la caractéristique d'Euler de $\overline{M}$ sont liés au genre $g(M)$ de M par les formules*

$$g(\widehat{M}) = 2g(M) + \kappa - 1 \quad \& \quad \chi\left(\overline{M}\right) = 2 - 2g(M) - \kappa. \tag{74}$$

Preuve. On se donne une triangulation T de M. Lorsque α est une composante connexe de $\gamma = bM$, sur note Σ_γ l'ensemble des sommets d'éléments de T qui résident sur γ et A_γ celui des arrêtes d'éléments de T qui sont incluses dans γ. On pose $\Sigma^b = \underset{\gamma \in \mathcal{C}}{\cup} M_\gamma$ et $A^b = \underset{\gamma \in \mathcal{C}}{\cup} T_\gamma$ où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des composantes connexes de bM. Pour chaque $\gamma \in \mathcal{C}$, $|\Sigma_\gamma| = |A_\gamma|$ et supposant, quitte à changer de triangulation, que les ensembles $\underset{t \in T,\ T \cap M_\gamma \neq \varnothing}{\cup}$ sont deux à deux disjoints lorsque γ décrit $\mathcal{C}$, sur obtient $\left|\Sigma^b\right| = \left|A^b\right|$. Enfin, sur note $\sigma(T)$ le nombre de sommets de T, $a(T)$ le nombre d'arrêtes de T, $f(T)$ le nombre de faces de T et sur pose $\widetilde{M} = \widehat{M} \backslash \overline{M}$. On note $\widetilde{T}$ la triangulation de $\widetilde{M}$ obtenue comme symétrique de T, c'est-à-dire celle obtenue en faisant agir sur T l'involution naturelle de $\widehat{M}$. $\widehat{T} = T \cup \widetilde{T}$ est alors une triangulation de $\widehat{M}$. Par définition de la caractéristique d'Euler d'une surface, il vient alors

$$\begin{aligned}
\chi(\widehat{M}) &= \sigma\left(\widehat{T}\right) - a\left(\widehat{T}\right) + f\left(\widehat{T}\right) \\
&= \left[2\left(\sigma(T) - \Sigma^b\right) + \Sigma^b\right] - \left[2\left(a(T) - A^b\right) + A^b\right] + 2f(T) \\
&= \left[2\sigma(T) - \Sigma^b\right] - \left[2a(T) - A^b\right] + 2f(T) \\
&= 2\sigma(T) - 2a(T) + 2f(T) = 2\chi\left(\overline{M}\right).
\end{aligned}$$

On sait grâce à la théorie usuelle des surfaces de Riemann compactes que $\chi(\widehat{M}) = 2 - 2g(\widehat{M})$. D'où $g(\widehat{M}) = 1 - \chi(M)$. Notons M' la surface obtenu en rattachant κ disques conformes le long des composantes connexes de γ. Alors $\chi(M') = \chi(M) + \kappa$ et par définition, $g(M) = g(M')$. On obtient donc

$$\chi\left(\overline{M}\right) = \chi(M') - \kappa = 2 - 2g(M) - \kappa$$

et

$$g(\widehat{M}) = 1 - (2 - 2g(M) - \kappa) = 2g(M) + \kappa - 1.$$

■

Nous avons besoin d'un dernier lemme avant de prouver le théorème 6.

Lemme 47 *Soit Q une surface de Riemann nodale à bord qui est un quotient d'une surface de Riemann à bord S. Pour $q \in \operatorname{Sing} \overline{Q}$, on note $\nu(q)$ le nombre de branches de $\overline{Q}$ en q. Alors les caractéristiques d'Euler de $\overline{S}$ et $\overline{Q}$ sont liées par la relation*

$$\chi\left(\overline{S}\right) = \chi\left(\overline{Q}\right) + \sum_{q \in \operatorname{Sing} \overline{Q}} (\nu(q) - 1).$$

Preuve. Soient π la projection naturelle de S sur Q et T, une triangulation de $\overline{S}$ telle que tout point de $X = \pi^{-1}\left(\operatorname{Sing} \overline{Q}\right)$ est un sommet de T. On peut aussi supposer que T est suffisamment raffinée pour qu'un même triangle de T ne contienne qu'au plus un point de X. On désigne par V l'ensemble des sommets de T, E celui des ses arrêtes et F celui de ses faces. Alors π et T induisent une triangulation naturelle $\pi_* T$ de $\overline{Q}$ dont l'ensemble $\pi_* V$ de ses soumets est $\pi(V \backslash X) \cup \left(\operatorname{Sing} \overline{Q}\right)$. Etant donné que tout triangle de T contient au plus un point de X, $\pi_* T$ et T ont le même nombre de sommet et de faces tandis que

$$|\pi_* V| = |\pi(V \backslash X)| + \left|\operatorname{Sing} \overline{Q}\right| = |V| - |X| + \left|\operatorname{Sing} \overline{Q}\right| = |V| - \sum_{q \in \operatorname{Sing} \overline{Q}} (\nu(q) - 1)$$

Le lemme 46 livre que $\chi\left(\overline{S}\right) = 1 - g(S) - c$. Donc,

$$\begin{aligned}
\chi\left(\overline{S}\right) &= |V| - |E| + |F| \\
&= |\pi_* V| - |E| + |F| + \sum_{q \in \operatorname{Sing} \overline{Q}} (\nu(q) - 1) = \chi\left(\overline{Q}\right) + \sum_{q \in \operatorname{Sing} \overline{Q}} (\nu(q) - 1).
\end{aligned}$$

■

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 6.

Proof of Theorem 6. Soit $j \in \{1, 2\}$ et $q_j^\infty = Q_j \cap \{w_0 = 0\}$. Alors, $p_j = \delta_j + q^\infty \leqslant \delta_j + N_z\left(\partial^\sigma \widetilde{u_0}\right)$. La formule (72) donne donc

$$p \leqslant \delta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \frac{D\partial^\sigma \widetilde{u_0}}{\partial^\sigma \widetilde{u_0}} - \chi\left(\overline{M}\right)$$

Comme $\mathcal{M}$ est un quotient nodal de M par la relation nodale induite par F, on peut appliquer le lemme 47. D'où, $\chi\left(\overline{M}\right) \geqslant \chi\left(\overline{\mathcal{M}}\right)$ et l'inégalité annoncée. Comme mentionné après le théorème 2, $\mathcal{M}$ est calculable à partir de données de bord et comme expliqué précédemment dans cette section avec la formule (70), $\frac{D\partial^\sigma \widetilde{u_0}}{\partial^\sigma \widetilde{u_0}}|_{bM}$ est calculable partir de données de bord disponibles. La preuve est achevée. ■

Références

[1] A. Agaltsov et G. Henkin, *Explicit Reconstruction of Riemann Surface with Given Boundary in Complex Projective Space*, J. Geom. Anal. **25** (2015), no. 4, 2450–2473.

[2] L.V. Ahlfors et L. Sario, *Riemann surfaces*, Princeton Mathematical Series, No. 26, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.

[3] A. Andreotti et C.D. Hill, *E. E. Levi convexity and the Hans Lewy problem. part I and II*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa **26 et 28** (1972), no. 2 et 4, 325–363 et 747–806.

[4] Kari Astala, Lassi Päivärinta, et Matti Lassas, *Calderón's inverse problem for anisotropic conductivity in the plane*, Comm. Partial Differential Equations **30** (2005), no. 1-3, 207–224.

[5] M. Belishev, *The Calderon problem for two dimensional manifolds by the BC-method*, SIAM J. Math. Anal. **35** (2003), no. 1, 172–182.

[6] M. Belishev et V. Sharafutdinov, *Dirichlet to Neumann operator on differential forms*, Bull. Sci. Math. **132** (2008), no. 2, 128–145.

[7] S. Collion, *Transformation d'Abel et formes différentielles algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), no. 12, 1237–1242.

[8] J.-P. Demailly, *Complex analytic and differential geometry*, https ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf.

[9] P. Dolbeault et G. Henkin, *Chaînes holomorphes de bord donné dans* $\mathbb{CP}^n$, Bull. Soc. math. France **125** (1997), 383–445.

[10] P. Griffiths et J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience, New York, 1978.

[11] B. Gutarts, *The inverse boundary value problem for the two-dimensional elliptic equation in anisotropic media*, J. Math. Stat. Allied Fields **1** (2007), no. 1, HTML files.

[12] R. F. Harvey, *Holomorphic chains and their boundaries*, Proc. Symp. Pure Math. **30** (1977), 309–382.

[13] R. F. Harvey et H. B. Lawson, *Boundaries of complex analytic varieties, i*, Ann. of Math. **102** (1975), 233–290.

[14] G. Henkin, *The Abel-Radon transform and several complex variables*, Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1992) (Princeton Princeton Univ. Press, ed.), Ann. of Math. Stud., no. 137, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995, pp. 223–275.

[15] ———, *Abel-Radon transform and applications*, The legacy of Niels Henrik Abel, Springer, Berlin, 2004, pp. 567–584.

[16] G. Henkin et V. Michel, *On the explicit reconstruction of a Riemann surface from its Dirichlet-Neumann operator*, Geom. Funct. Anal. **17** (2007), no. 1, 116–155.

[17] ———, *Inverse conductivity problem on Riemann surfaces*, J. Geom. Anal. **18** (2008), no. 4, 1033–1052.

[18] ———, *Inverse Dirichlet-to-Neumann problem for nodal curves*, Russian Math. Surveys **67** (2012), no. 6, 1069–1089.

[19] ———, *Problème de Plateau complexe feuilleté. Phénomènes de Hartogs-Severi et Bochner pour des feuilletages CR singuliers*, Bull. Soc. Math. France **142** (2014), no. 1, 95–126.

[20] ———, *Bishop-Runge approximations and inversion of the Riemann-Klein theorem*, Mat. Sb. **206** (2015), no. 2, 149–174. MR 3354975

[21] G. Henkin et R. Novikov, *On the reconstruction of conductivity of a bordered two-dimensional surface in* $\mathbb{R}^3$ *from electrical current measurements on its boundary*, J. Geom. Anal. **21** (2011), no. 3, 543–587.

[22] G. Henkin et M. Santacesaria, *On an inverse problem for anisotropic conductivity in the plane*, Inverse Problems **26** (2010), no. 9, 095011, 18.

[23] ———, *Gelfand-Calderón's inverse problem for anisotropic conductivities on bordered surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Int. Math. Res. Not. IMRN (2012), no. 4, 781–809.

[24] R. Kohn et M. Vogelius, *Determining conductivity by boundary measurements*, Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), no. 3, 289–298.

[25] R. V. Kohn et M. Vogelius, *Identification of an unknown conductivity by means of measurements at the boundary*, Inverse problems (New York, 1983), SIAM-AMS Proc., vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984, pp. 113–123.

[26] M. Lassas et G. Uhlmann, *On determining a Riemannian manifold from the Dirichlet-to-Neumann map*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **34** (2001), no. 5, 771–787.

[27] C. Laurent-Thiébaut, *Formule des résidus et théorème de plemelj un une variété de stein*, Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1985.

[28] J. Lee et G. Uhlmann, *Determining anisotropic real-analytic conductivities by boundary measurements*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), no. 8, 1097–1112.

[29] A. Nachman, *Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem*, Ann. of Math. (2) **143** (1996), no. 1, 71–96.

[30] R. Novikov, *A multidimensional inverse spectral problem for the equation* $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **22** (1988), no. 4, 11–22, 96.

[31] M. Rosenlicht, *Generalized Jacobian varieties*, Ann. of Math. (2) **59** (1954), 505–530.

[32] V. Sharafutdinov et C. Shonkwiler, *The complete Dirichlet-to-Neumann map for differential forms*, J. Geom. Anal. **23** (2013), no. 4, 2063–2080.

[33] J. Sylvester, *An anisotropic inverse boundary value problem*, Comm. Pure Appl. Math. **43** (1990), 201–232.

[34] Michael E. Taylor, *Partial differential equations II. Qualitative studies of linear equations*, first ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 116, Springer, New York, 2011.

[35] Dror Varolin, *Riemann surfaces by way of complex analytic geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 125, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[36] J. Wood, *A simple criterion for local hypersurfaces to be algebraic*, Duke Math. J. **51** (1984), no. 1, 235–237.