Théorème (Bochner-Kodaira-Nak-

$$\square^E = \bar{\square}^E + [\sqrt{-1} R^E, \Lambda].$$

Rappel : E fibre v. hol., h^E

$\downarrow$

(X, ω) variété kähler.

$\rightsquigarrow \nabla^E$ conn de chern $\rightsquigarrow R^E$

$$\nabla^E = (\nabla^E)^{1,0} + \underbrace{(\nabla^E)^{0,1}}_{\bar{\partial}^E}$$

$$\square^E = [(\nabla^E)^{1,0}, (\nabla^E)^{1,0*}].$$

$$\bar{\square}^E = [\bar{\partial}^E, \bar{\partial}^{E*}]$$

Soit D op. de Dirac spin^c. associé

$\Lambda(T^{*(1,0)}X)\otimes E = E'$

$D=\sqrt{2}(\bar\partial^E+\bar\partial^{E*})$ sur $\Omega^{r,q}(X,E)$.

$=\Omega^{0,q}(X,E')$

$D^2=2\,\square^E$

D symétrique

$\langle D^2 s, s\rangle = \langle Ds, Ds\rangle = \|Ds\|^2_{L^2}$

≥ 0

Si $[\sqrt{-1}R^E,\Lambda]\big|_{\Omega^{r,q}} > 0 \Rightarrow \ker D\big|_{\Omega^{r,q}} = 0$

$\rightsquigarrow H^{r,q}(X,E)=0$.

<u>Def.</u> Soit L un fibré en droite hol. est positive sur une Var. compacte X si $\exists\ h^L$ sur L. t.q

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^L \text{ défini une forme kähle}$$

sur X.

Dans ce cas $\rightsquigarrow \sqrt{-1}\, R^L = 2\pi\omega$.

$L = \omega = \sqrt{-1}\, w^k \wedge \bar{w}^k$, $\Lambda = -\sqrt{-1}\, i_{\bar{w}_j} i_{w_j}$

$$[\omega, \Lambda] = \sum_{j,k} [w^k \wedge \bar{w}^k, i_{\bar{w}_j} i_{w_j}]$$

$$= \underline{w^k \wedge \bar{w}^k}\, i_{\bar{w}_j} i_{w_j} - i_{\bar{w}_j} i_{w_j} w^k \wedge \bar{w}^k$$

$$= \swarrow - i_{\bar{w}_j} \bar{w}^k \delta_{jk} + i_{\bar{w}_j} \bar{w}^k w^k i_{w_j} \delta_{jk} - w^k i_{w_j}$$

$$= -i_{\bar{w}_k} \bar{w}^k + w^k i_{w_k} \, [\, \delta_{jk} - \underline{\bar{w}^k \wedge i_{\bar{w}_j}}$$

$$w^k \wedge i_{w_k} - i_{\bar{w}_k} \bar{w}^k \Big|_{\Omega^{r,q}} = r - (n-q)$$

$n = \dim X$ $\qquad \underline{w^{i_1} \cdots \wedge w^{i_r}} \wedge \underline{\underline{\bar{w}^{j_1} \cdots \bar{w}^{j_q}}}$

$$= r + q - n$$

Donc si $s \in \ker D \cap \Omega^{r,q}(X, L)$

$$0 = \|Ds\|^2_{L^2} = \underbrace{\langle \bar{\Box}^{E} s, s \rangle}_{\|\nabla^{E,1,0} s\|^2_{L^2} + \|(\nabla^{E})^{1,0*} s\|^2_{L^2} \geq 0} + 2\pi (r+q-n) \|s\|^2_{L^2}$$

<u>Théorème</u> (Kodaira-Nakano).

Si L un fibré en droites pos sur X alors pour $r+q > n$, on

$$H^{r,q}(X, L) = 0 \qquad H^{0,q}(X, \Lambda^r(T^{*(1,0)}_X) \otimes L)$$

<u>Dem</u> : Théorie de Hodge $\qquad \overset{\shortparallel}{H^{r,q}}(X, L)$

$$\ker D|_{\Omega^{r,q}} = H^{r,q}(X, L)$$

Th. (Kodaira) L fibre en droites pos sur X. E f. v. hol. sur X. alors

$\exists p_0 \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq p_0$, on a

$$H^{0,q}(X, L^p \otimes E) = 0 \quad \forall q > 0$$

<u>Dem</u>: $K_X = \Lambda^n(T^{*(1,0)}X)$.

$$K_X \otimes K_X^* = \mathbb{C} \quad \text{canoniquement}$$

$$\underline{H^{0,q}(X, L^p \otimes E) = H^{n,q}(X, L^p \otimes E \otimes K_X^*)}$$

$$[\sqrt{-1} R^{L^p \otimes E \otimes K_X^*}, \Lambda]\Big|_{\Omega^{n,q}} = 2\pi p \underline{[\omega, \Lambda]} + \underbrace{\sqrt{-1}[R^{E \otimes K_X^*}, \Lambda]}_{\text{borné}}$$

$$[\omega, \Lambda]\Big|_{\Omega^{n,q}} = q > 0 \quad \underline{\text{si } q > 0}$$

$$\exists p_0 \text{ t.q. } \forall p > p_0, \ [\sqrt{-1} R^{L^p \otimes \cdots}, \Lambda]\Big|_{\Omega^{n,q}} > 0, \ \underline{\text{si } q > 0}$$

$$\underline{\mathcal{C}^\infty}(X, \Lambda^q(T^{*(0,1)}X) \otimes L^p \otimes E \otimes \underbrace{K_X}_{n,0.} \otimes K_X^*)$$

$$= \mathcal{C}^\infty(X, \underbrace{\Lambda^n(T^{*(1,0)}X) \otimes \Lambda^q(T^{*(0,1)}X)} \otimes L^p \otimes E \otimes K_X^*)$$

$$= \underline{\Omega^{n,q}}(X, L^p \otimes E \otimes K_X^*)$$

$\bar\partial$ sur $\Omega^{0,q}(X, L^p \otimes E)$

$= \bar\partial$ sur $\Omega^{n,q}(X, L^p \otimes E \otimes K_X^*)$

$$\rightsquigarrow H^{0,q}(X, L^p \otimes E) = H^{n,q}(X, L^p \otimes E \otimes K_X^*)$$

§. Estime elliptique et decomposition de Hodge

<u>Rappel</u>. Transf de Fourier sur L^1 et L^2

$f \in L^1(\mathbb{R}^m)$

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \underbrace{(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m}} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x)\,dx \qquad x \cdot \xi$$

$\mathcal{F}^* f(\xi) = \hat{f}(-\xi)$. trans. de Fourier inverse

<u>Théorème</u> : soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, alors

$$\mathcal{F}^*(\mathcal{F}(f))(x) = f(x)$$

$$\langle \mathcal{F}^* f, g \rangle = \langle f, \mathcal{F} g \rangle$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f \bar{g}\, dx$$

$$\leadsto \underline{\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2}^2} = \|f\|_{L^2}^2 \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{F}$ se prolonge continuement de $L^1 \cap L^2$ en une isometrie surjective de L^2 à L^2.

Car $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^m)$.

Notation $x \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\alpha_m}$$

$$x^\alpha = \prod_j x_j^{\alpha_j}. \qquad x \cdot \xi = \sum_j x_j \xi_j$$

$$|\alpha| = \sum_j \alpha_j.$$

Def : L'espace de schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}),\ x^\beta \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u \text{ borné } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^m \right\}.$$

Pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

$$\langle \mathcal{F} f, g \rangle = \langle f, \mathcal{F}^* g \rangle.$$

et $\mathcal{F} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$

Dem $\widehat{\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$.

$$\widehat{x^\alpha f}(\xi) = \left(i \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha \hat{f}(\xi) \Rightarrow \mathcal{F} f \in \mathcal{S}$$

Prop. : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^m)$.

Dem : $C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \subset L^2(\mathbb{R}^m)$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, l'espace de sobolev $H^k(\mathbb{R}^m)$

$$H^k(\mathbb{R}^m) = \left\{ u \in L^2,\ \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u \in L^2 \ \forall |\alpha| \leq k \right\}$$

Pour $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$, $f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\varphi \to f(\varphi) = \left\langle (-1)^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\varphi, u \right\rangle$$

$$\left(= \left\langle \varphi, \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u \right\rangle . \right)$$ si $u \in C_0^\infty$.

Th de Riesz

si $\exists C > 0$ t.q $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$

$$|f(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{L^2}$$

$$\rightsquigarrow \exists !\, \psi \in L^2(\mathbb{R}^m) \text{ t.q } \langle \varphi, \psi \rangle = f(\varphi).$$

Dans ce cas, on dit $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u \in L^2(\mathbb{R}^m)$, et on def

$$\psi = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u \in L^2(\mathbb{R}^m).$$

<u>Lemme</u> : Si $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{N}^m$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u \in L^2 \iff (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) \in L^2.$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u\right) =$$

<u>Dem</u> : Si $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u \in L^2$, alors $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$,

$$\langle \varphi, \mathcal{F}\tfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}u\rangle = \langle \mathcal{F}^*\varphi, \tfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}u\rangle \overset{def}{=} \langle (-1)^\alpha \tfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\mathcal{F}^*\varphi, u\rangle$$

$$= \langle \mathcal{F}^*((-i\xi)^\alpha\varphi), u\rangle = \langle (-i\xi)^\alpha\varphi, \hat{u}\rangle$$

$$\rightsquigarrow |\langle \varphi, (i\xi)^\alpha \hat{u}\rangle| \le C\|\varphi\|_{L^2} \rightsquigarrow \xi^\alpha \hat{u} \in L^2.$$

Riesz.

inverse si $\xi^\alpha \hat{u} \in L^2 \rightsquigarrow$

$$|\langle \mathcal{F}^*\varphi, \mathcal{F}\tfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}u\rangle| \le C\|\varphi\|_{L^2} \rightsquigarrow \tfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}u \in L^2 \quad //$$

__Théorème__ Si $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$

$$u \in H^k(\mathbb{R}^m) \iff (1+|\xi|^2)^{k/2}\hat{u} \in L^2.$$

__Dem__ : $u \in H^k(\mathbb{R}^m) \iff (i\xi)^\alpha \hat{u} \in L^2 \ \forall |\alpha| \le k$

$$\iff (1+|\xi|^2)^k |\hat{u}|^2 \in L^1.$$

norme de Sobolev $\| \ \|_k$ sur H^k

$$\|u\|_k^2 = \sum_{|\alpha|\le k} \left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u \right\|_{L^2}^2 .$$

$\rightsquigarrow$ $\exists C>0$: $\frac{1}{C} \left\| (1+|\xi|^2)^{k/2} \hat{u} \right\|_{L^2} \le \|u\|_k \le C \left\| (1+|\xi|^2)^{k/2} \hat{u} \right\|_{L^2}$.

Def : Pour $s \ge 0$,

$$H^s(\mathbb{R}^m) = \{ u \in L^2, \ (1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{u} \in L^2 \}.$$

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}|^2 \, d\xi .$$

Prop : $(H^s(\mathbb{R}^m), \| \ \|_s)$ est un espace de Hilbert.

Dem : Si $\{u_j\}$ suite de Cauchy dans H^s,

$\rightsquigarrow$ $(1+|\xi|^2)^s \hat{u}_j(\xi)$ suite de Cauchy dans L^2 $\rightarrow v \in L^2$

Prend $u = \mathcal{F}^*\left((1+|\xi|^2)^{-s/2} v \right)$, alors $u_j \xrightarrow{H^s} u$.

__Lemme :__ Pour $s>0$, $H^s(\mathbb{R}^m)$ est la complétion de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ pour la norme $\| \, \|_s$.

__Dem :__ Si $u \in H^s(\mathbb{R}^m)$, $\rightsquigarrow (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2$.

soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. $\chi(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi|<1 \\ 0 & |\xi|>2 \end{cases}$

$$v_{R,\delta} = \mathcal{F}^*\left(\chi\left(\tfrac{\cdot}{R}\right)(\hat{u} * \rho_\delta)\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m).$$

__Def.__ $\varphi * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy$

$\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\int \rho \, dx = 1$, $\rho_\delta(x) = \delta^{-m}\rho\left(\frac{x}{\delta}\right)$.

__Lemme__ $\forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}^m)$, $\varphi * \rho_\delta \in L^2$ et $\xrightarrow[\delta\to 0]{L^2} \varphi$

__Dem.__ $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ dense dans L^2

$$\|v_{R,\delta} - u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^s \underbrace{\left|\chi\left(\tfrac{\xi}{R}\right)(\hat{u}*\rho_\delta)(\xi) - \hat{u}(\xi)\right|^2}_{\chi\left(\frac{\xi}{R}\right)(\hat{u}*\rho_\delta - \hat{u}) + \left(\chi\left(\frac{\xi}{R}\right)-1\right)\hat{u}} d\xi$$

$$\leq 2\int_{\mathbb{R}^m} (\quad)^s \left|\chi\left(\tfrac{\xi}{R}\right)(\hat{u}*\rho_\delta - \hat{u})\right|^2 + \int_{\mathbb{R}^m} (\quad)^s \left|\left(\chi\left(\tfrac{\xi}{R}\right)-1\right)\hat{u}\right|^2.$$

$$\leq 2(1+R^2)^s \underbrace{\|\hat{u}*\rho_\delta - \hat{u}\|_{L^2}^2}_{\delta\to 0 \;\searrow\; 0} + 2\underbrace{\int_{|\xi|>R} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi}_{R\to\infty \;\searrow\; 0} \to 0.$$

$u \in C^k$, $\|u\|_{C^k} = \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \sum_{|\alpha|\le k} \left|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u\right|$.

Théorème (plongement de sobolev)

$\forall s > \frac{m}{2} + k$, $\exists C_{s,k} > 0$ t.q.

(*) $\|u\|_{C^k} \le C_{s,k} \|u\|_s$. $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$

Donc $\exists$. plong. continue.

$$H^s(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^m)$$

et (*) vrai pour $\forall u \in H^s$.

Dem: On commence par $k=0$

Pour $x \in \mathbb{R}^m$.

$$|u(x)| = \left|(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{ix\cdot\xi} \hat{u}(\xi) d\xi\right|$$

$$\le (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{|\hat{u}(\xi)| d\xi \, (1+|\xi|^2)^{s/2}} \cdot \underbrace{(1+|\xi|^2)^{-s/2}}$$

$$\rightsquigarrow |u(x)|^2 \le (2\pi)^{-m} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}|^2 d\xi}_{\|u\|_s^2} \cdot \underbrace{\int (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi}_{<\infty \text{ si } s > \frac{m}{2}}$$

$$\le C_{s,0} \|u\|_s^2.$$

$$\left\|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u(x)\right\|^2 \le (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^{-(s-|\alpha|)}\, d\xi \,\cdot \int_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^{s-|\alpha|} \Big|\underbrace{\widehat{\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u}(\xi)}_{(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)}\Big|^2 d\xi$$

$\le C_{s,\alpha} \|u\|_s^2$ si $s-|\alpha| > \frac{m}{2}$.

Donc $\|u\|_{C^k} \le C_{s,k} \|u\|_s \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Pour $u \in H^s(\mathbb{R}^m)$, prend $u_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ t.q.

$u_j \longrightarrow u$ dans $H^s(\mathbb{R}^m)$.

u_j cauchy pour $\|\ \|_s$

$\Longrightarrow$ u_j cauchy pour $\underbrace{\|\ \|_{C^k}}$ complete.

donc $u_j \longrightarrow u_0$ dans C^k, $u_j \to u \in L^2 \Rightarrow u_0 = u$.

Comme $\|u_j\|_{C^k} \le C_{s,k} \|u_j\|_s \xrightarrow[j\to\infty]{} \|u\|_{C^k} \le C_{s,k}\|u\|_s$.

Lemme $\forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}^m)$, $\varphi * \rho_\delta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$

et $\varphi * \rho_\delta \xrightarrow[L^2]{\delta \to 0} \varphi$.

<u>Dem</u>: $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$. $(\psi * \rho_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\psi(y)}_{\in L^1_{loc}} \underbrace{\rho_\delta(x-y)}_{\mathcal{C}_0^\infty} dy$

$$\|\varphi * \rho_\delta\|_{L^2}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^m} dx \Big(\int |\psi(y)|^2 \rho_\delta(x-y)\, dy \Big) \underbrace{\int \rho_\delta(x-y)\, dy}_{1}$$

$P \; \mathcal{C}^\infty$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} |\psi(y)| \underbrace{\int \rho_\delta(x-y)\, dx}_{1}\, dy$$

$= \|\psi\|_{L^2}^2$.

Pour $\varphi \in L^2$ fixé. Prend $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ t.q

$$\|\varphi - f\|_{L^2} \leq \varepsilon/3$$

alors $f * \rho_\delta \xrightarrow[\delta \to 0]{\mathcal{C}^\infty} f$. en particulier dans L^2.

$$\|\varphi * \rho_\delta - \varphi\|_{L^2} = \|\varphi * \rho_\delta - f * \rho_\delta + f * \rho_\delta - f + f - \varphi\|$$

$$\leq \|f * \rho_\delta - f\|_{L^2} + \|(\varphi - f) * \rho_\delta\|_{L^2} + \|f - \varphi\|_{L^2}$$

$$\leq \|f * \rho_\delta - f\|_{L^2} + 2\|\varphi - f\|_{L^2} \overset{\delta \to 0}{<} \varepsilon \quad //$$

si $0 < s' < s$, alors $H^s \hookrightarrow H^{s'}$

<u>Prop</u>: $\forall \varepsilon > 0$, $\forall u \in H^s(\mathbb{R}^m)$, on a

$$\|u\|_{s'}^2 \leq \varepsilon^{-\frac{s'}{s-s'}} \|u\|_0^2 + \varepsilon \|u\|_s^2.$$

<u>Dem</u>: $$\|u\|_{s'}^2 = \int_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^{s'} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \left(|\hat{u}(\xi)|^2\right)^{\underbrace{1-\frac{s'}{s}}_{\alpha}} \cdot \left((1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2\right)^{\frac{s'}{s}} d\xi$$

• Pour $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta > 0$,

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b \quad \forall a, b > 0.$$

$$a^\alpha b^\beta = \left(\varepsilon^{-\frac{\beta}{\alpha}} a\right)^\alpha (\varepsilon b)^\beta \leq \alpha \varepsilon^{-\frac{\beta}{\alpha}} a + \beta \varepsilon b.$$

Prend $\alpha = 1 - \frac{s'}{s}$, $\beta = \frac{s'}{s}$. //

Théorème (Lemme de Rellich). Soit $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \in H^s(\mathbb{R}^m)$ et $\operatorname{supp} u_j \subset B(0,1)$ et $\exists\ C>0$ t.q.

$$\|u_j\|_s \leq C \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

alors $\forall\, s'<s$, $\exists$ ss. $\{u_{\varphi(j)}\}$ qui est Cauchy pour la norme $\|\ \|_{s'}$ donc converge dans $H^{s'}(\mathbb{R}^m)$.

Reformulation si U est borné $\subset \mathbb{R}^m$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, l'inclusion $j : H_0^{k+1}(U) \hookrightarrow H_0^k(U)$ est compacte. c.a.d. j envoy un ensemble borné de $H_0^{k+1}(U)$ à un sousensemble rel. compact de $H_0^k(U)$.

• Si $U \subset \mathbb{R}^m$ ouvert.

$$H^k(U) = \left\{ u \in L^2(U),\ \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u \in L^2(U) \right\}.$$

$H_0^k(U)$ complétion de $C_0^\infty(U)$ pour $\| \ \|_k$

$$\|u\|_k^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u \right\|_{L^2}^2 . \quad \forall u \in H^k(U).$$

$$H_0^k(U) \subset H^k(U). \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$H_0^k(U) \subset H_0^k(\mathbb{R}^m) = H^k(\mathbb{R}^m).$$

mais $H^k(U) \not\subset H^k(\mathbb{R}^m)$.

pas canonique

Théorème (Lemme de Rellich)

$\{u_j\}_{j=0}^{\infty} \in H^s(\mathbb{R}^m)$, et $\operatorname{supp} u_j \subset B(0,1)$ et $\exists C>0$ t.q

$$\|u_j\|_s \leq C \quad \forall j \qquad \underline{s>0}$$

alors $\forall_{0<s'<s}$, $\exists$ $\{u_{\varphi(j)}\}$ ss suite de $\{u_j\}$ t.q. $\{u_{\varphi(j)}\}$ cauchy pour $\| \ \|_{s'}$, converge dans $H^{s'}(\mathbb{R}^m)$

<u>Dem</u> : $\varphi * u(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x-y)u(y)dy$. $\quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$, $u \in L^1$.

$$(2\pi)^{\frac{m}{2}}\widehat{\varphi u} = \hat{\varphi} * \hat{u}, \quad \widehat{\varphi * u} = (2\pi)^{\frac{m}{2}}\hat{\varphi}\cdot\hat{u}.$$

On suppose $\operatorname{supp} u \subset B(0,1)$, et $\varphi \equiv 1$ sur $B(0,1)$. $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$

alors $u = \varphi u$. et

$$(2\pi)^{\frac{m}{2}}\hat{u}(\xi) = \hat{\varphi} * \hat{u}(\xi) = \int \varphi(\xi - \eta)\hat{u}(\eta)d\eta$$

$$(2\pi)^{\frac{m}{2}} \frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\varphi(\xi-\eta)\hat{u}(\eta)d\eta$$

$$(2\pi)^m \left|\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\hat{u}(\xi)\right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^m}(1+|\eta|^2)^{-s}\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\varphi(\xi-\eta)\right|^2 d\eta \int (1+|\eta|^2)^s |\hat{u}(\eta)|^2 d\eta$$

$$\leq C_\alpha(\xi)\|u\|_s^2$$

- Applique pour $\{u_j\}$. $\|u_j\|_s \leq C$, $\operatorname{supp} u_j \subset B(0,1)$. Donc $\forall R>0$.

$\forall \alpha$, $\left\{\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\hat{u}_j\right\}_{j\geq 1}^{\infty}$ est uniform borné pour $\xi \in \bar{B}(0,R)$

donc uniforme equicontinue sur $\bar{B}(0,R)$.

Par le Th d'Arzela-Ascoli, $\exists$ sous suite $\{u_{\varphi(j)}\}$ qui est unif Cauchy sur les sous-ensemble compacte.

Fixé $r>0$.

$$\|u_{\varphi(j)} - u_{\varphi(k)}\|_{s'} = \int_{|\xi|>r} + \int_{|\xi|\le r} (1+|\xi|^2)^{s'} |\hat{u}_{\varphi(j)}(\xi) - \hat{u}_{\varphi(k)}(\xi)|^2 d\xi$$

$= I + II$

Pour $|\xi|>r$, $(1+|\xi|^2)^{s'} \le (1+r^2)^{-(s-s')}(1+|\xi|^2)^{s}$

$$I \le \|u_{\varphi(j)} - u_{\varphi(k)}\|_s^2 \, (1+r^2)^{-(s-s')} \underset{\|u_j\|_s < C}{\le} 4C^2(1+r^2)^{-(s-s')} \le \varepsilon/2$$

$\forall \varepsilon>0$ prend r grand

$$II \le C(r) \sup_{|\xi|\le r} |\hat{u}_{\varphi(j)} - \hat{u}_{\varphi(k)}(\xi)|^2 \le \varepsilon/2$$

$\exists N$ t.q. $\forall j,k > N$.

$\rightsquigarrow \{u_{\varphi(j)}\}$ suite de cauchy dans $H^{s'}(\mathbb{R}^m)$ //

reformulation. si U borné ouvert. alors $\forall k \in \mathbb{N}$ l'inclusion $j : H_0^{k+1}(U) \hookrightarrow H_0^k(U)$ est compacte.

__Def__ : H un operateur differentiel d'ordre k sur $\mathbb{R}^m$ ssi

$$H = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

et $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^l, \mathbb{C}^q))$ et $\exists \alpha$ t.q $|\alpha| = k$ et $a_\alpha \not\equiv 0$.

Symbol principal de H $\quad \sigma(H)(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)(\sqrt{-1}\xi)^\alpha$; $x \in \mathbb{R}^m$, $\xi \in \mathbb{R}^m$

symbol total $\quad a(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x)(\sqrt{-1}\xi)^\alpha$

__Def__ : Un opérateur differentiel H est elliptique sur $U \subset \mathbb{R}^m$ ssi $\sigma(H)(x,\xi) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^l)$ est invertible $\forall \xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, x \in U$

__Ex__ : $\Delta = -\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Laplacien. $\sigma(\Delta)(x,\xi) = |\xi|^2$

$$= -\sum_j (\sqrt{-1}\xi_j)^2$$

__Th__ (Estimé elliptique)

Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ ouvert borné, H un op elliptique k-ord sur $\bar{U}$, alors $\forall q \in \mathbb{N}$, $\exists C_1, C_2 > 0$ t.q

$$\|u\|_{k+q} \leq C_1 \|Hu\|_q + C_2 \|u\|_{k+q-1} \quad \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$$

Dem. a) $\forall x_0 \in \mathbb{R}^m$, on note

$$H_{x_0}(x) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x_0) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

$a(x_0, \xi) = \sigma(H)(x_0,\xi) + \deg \le k-1$

$|\sigma(H)(x_0,\xi)|^2 \ge C_1(x_0) |\xi|^{2k}$

$$|\widehat{H_{x_0} u}(\xi)|^2 = \langle a(x_0,\xi)\hat{u}(\xi),\ a(x_0,\xi)\hat{u}(\xi)\rangle$$

$\deg \le 2k-1$

$$\ge \langle \overbrace{\sigma(H)^*(x_0,\xi)\,\sigma(H)(x_0,\xi)}^{2k}\hat{u}(\xi), \hat{u}(\xi)\rangle - \tilde{C}_0(x_0)(1+|\xi|^2)^{k-\frac12}|\hat{u}(\xi)|^2$$

$$\ge C_1(x_0)|\xi|^{2k}|\hat{u}(\xi)|^2 - \tilde{C}_0(x_0)(1+|\xi|^2)^{k-\frac12}|\hat{u}(\xi)|^2$$

$$\|H_{x_0}u\|_q^2 = \int_{\mathbb{R}^m}(1+|\xi|^2)^q|\widehat{H_{x_0}u}|^2 d\xi$$

$$\ge \int_{\mathbb{R}^m} C_1(x_0)(1+|\xi|^2)^{k+q}|\hat{u}|^2 - C_0'(x_0)\int_{\mathbb{R}^m}(1+|\xi|^2)^{q+k-\frac12}|\hat{u}|^2$$

$$\ge C_1(x_0)\|u\|_{k+q}^2 - C_0'(x_0)\|u\|_{k+q}\|u\|_{k+q-1}$$

$$\ge \frac{C_1(x_0)}{2}\|u\|_{k+q}^2 - C_0(x_0)\|u\|_{k+q-1}^2$$

$$\|u\|_q = \sum_{|\beta|\le q}\left\|\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}u\right\|_{L^2}$$

b) Si $u \in C_0^\infty(B(x_0,\delta_{x_0}), \mathbb{C}^l)$

$$\|(H-H_{x_0})u\|_q \le \sum_{|\alpha|\le k}\left\|(a_\alpha(x)-a_\alpha(x_0))\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}u\right\|_q \le C \sup_{x\in B}|a_\alpha(x)-a_\alpha(x_0)|_{C^q} \cdots \|u\|_{k+q}$$

on prend $\delta_{x_0} > 0$ petit.

$$\|(H-H_{x_0})u\|_q \le \frac{\sqrt{C_1(x_0)}}{4}\|u\|_{k+q}$$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}^m$, $\exists \delta_{x_0} > 0$ t.q $\forall u \in C_0^\infty(B(x_0,\delta_{x_0}), \mathbb{C}^l)$

$$\|Hu\|_q \ge \|H_{x_0}u\|_q - \|(H-H_{x_0})u\|_q \ge \frac{\sqrt{C_1(x_0)}}{4}\|u\|_{k+q} - C\|u\|_{k+q-1}$$

c) $\{B(x_j,\delta_{x_j})\}_{j=1}^N$ recouvrement de $\bar{U}$, φ_j partition de l'unité

$$\|u\|_{k+q} \le \sum_j\|\varphi_j u\|_{k+q} \le C'\sum_j\|H\varphi_j u\|_q + C_2\sum_j\|\varphi_j u\|_{k+q-1}$$

$\leq C' \sum_j \|\varphi_j H u\|_q + C_3 \|u\|_{k+q-1}$

$H\varphi_j = \varphi_j H + [H, \varphi_j] \leftarrow$ op diff d'ordre $\leq k-1$

$\underset{\sum \varphi_j = 1}{\leq} C' \|Hu\|_q + C_3' \|u\|_{k+q-1}$

$\|u\|_{k+q} \leq C \|Hu\|_q + C_1 \|u\|_{k+q-1} \quad \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(U, \mathbb{C}^l)$

- L'espace de Sobolev sur variétés

Soit X variété $\mathcal{C}^\infty$, E, F fibré vectoriel complexes
$$\downarrow$$
$$X$$

Def. un op $\mathbb{C}$-linéaire $H : \mathcal{C}^\infty(X, E) \to \mathcal{C}^\infty(X, F)$ est un op différentiel d'ordre k si sur chaque carte locale $U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$, $E|_U \simeq U \times \mathbb{C}^l$, $F|_U = U \times \mathbb{C}^r$.

$\forall s \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C}^l) = \mathcal{C}^\infty(U, E)$

$$Hs = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha},$$

$a_\alpha(x) \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^l, \mathbb{C}^r))$, et $\exists$ carte t.q. $a_\alpha(x) \not\equiv 0$ $\exists \alpha$ et $|\alpha| = k$.

Def : pour $f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$,

$$\sigma(H)_x(df) = \lim_{t \to \infty} e^{-itf}(H e^{itf} \cdot)\, t^{-k}.$$

$df \in T_x^* X \simeq \xi$

$$e^{-itf}(H(e^{itf} s))_x t^{-k} = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) (\sqrt{-1}\, df)^\alpha s + O\left(\tfrac{1}{t}\right)$$

$\sigma(H)(df)$ ne dep pas le choix de carte locale.

$\sigma(H): T^*_x X \longrightarrow \mathrm{Hom}(E,F)_x$ bien défini ! Symbol principal

H est elliptique ssi $\sigma(H)(\xi) \in \mathrm{Hom}(E_x, F_x)$ est inversible $\forall x \in X$, $\xi \in T^*_x X \setminus \{0\}$

$\Downarrow$ $rk(E) = rk(F)$.

<u>EX</u>: Soit g^{TX} métrique riem sur X, ∇^{TX} con L.C.

Soit (E, h^E) f.v. herm sur X, ∇^E con herm sur (E, h^E)

Laplacien associé à ∇^E.

$$\Delta^E = -\sum_{i=1}^{m}\left((\nabla^E_{e_i})^2 - \nabla^E_{\nabla^{TX}_{e_i} e_i}\right) \qquad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

e_i repère ON de (TX, g^{TX})

$$= -g^{ij}(x)\left(\nabla^E_{\partial_i}\nabla^E_{\partial_j} - \nabla^E_{\nabla^{TX}_{\partial_i}\partial_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \cdots, \quad g_{ij}(x) = \langle \partial_i, \partial_j\rangle(x).$$

$e_i = (G^{1/2})_{ij}\,\partial_j \rightsquigarrow$ rep ON $\qquad G = (g^{ij})_x = (g_{ij}(x))^{-1}$

$$\sigma(\Delta^E)(\xi) = -g^{ij}\sqrt{-1}\,\xi^j \sqrt{-1}\,\xi^i = |\xi|^2_{g^{T^*X}} \cdot \mathrm{Id}_E.$$

Soit ∇^E con sur $(T^*X)^{\otimes l} \otimes E$ induite par ∇^{TX}, ∇^E

le produit scalaire sur $\mathcal{C}^\infty_0(X,E)$: $\forall s_1, s_2 \in \mathcal{C}^\infty_0$

$$\langle s_1, s_2\rangle = \int_X \langle s_1, s_2\rangle(x)\, dv_X(x) \longleftarrow \|\ \|_{L^2}$$

$$\|s\|_r^2 = \sum_{l=0}^{r} \|\underbrace{\nabla^E \cdots \nabla^E}_{l \text{ fois}} s\|^2_{L^2}$$

$L^2(X,E) = H^0(X,E)$

$U \subset X$ ouvert. $H^r_0(U,E)$ complétion de $\mathcal{C}^\infty_0(U,E)$ par $\|\ \|_r$

Th : Soit $U \subset X$ ouvert rel. compact. $m = \dim X$

a) (Th de plongement de sob.). Si $r > \frac{m}{2} + k$ alors $\exists C > 0$ t.q. si $s \in H_0^r(U, E)$ alors $s \in C^r(U, E)$ et

$$\|s\|_{C^k(X)} \leq C \|s\|_r.$$

b) (Lemm de Rellich) $\forall k \in \mathbb{N}$, l'inclusion $j : H_0^{k+1}(U, E) \to H_0^k(U, E)$ compact.

c) (estimé elliptique) Si $H : \mathcal{C}^\infty(X, E) \to \mathcal{C}^\infty(X, F)$ op elliptique d'ordre k, alors

$$\|s\|_{k+q} \leq C \|Hs\|_q + C_1 \|s\|_{q+k-1} \quad \forall s \in \mathcal{C}_0^\infty(U, E)$$

Def. $\forall k > 0$, $H^{-k}(X, E)$ la completion de $\mathcal{C}_0^\infty(X, E)$ pour la norme

$$\|u\|_{-k} = \sup_{0 \neq s \in H^k(X, E)} \frac{\langle u, s \rangle}{\|s\|_k} \quad \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty.$$

$$\langle u, s \rangle = \int_X \langle u, s \rangle(x) \, dv_X(x)$$

$$\rightsquigarrow \quad H^{-k}(X, E) = (H^k(X, E))^*$$

Prop : Si X compacte, alors pour $k > 0$

$$H^k(X, E) = (H^{-k}(X, E))^*$$

Dem : a) si $X = \mathbb{R}^m$. $E = \mathbb{C}$ pour $l > 0$

$$H^l(\mathbb{R}^m) = \{ u \in L^2, (1+|\xi|^2)^{\frac{l}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2 \}$$

$\forall u \in \mathcal{E}_0^\infty$, $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, $k > 0$

$$\langle u, s \rangle = \int \hat{u}\, \hat{s}\, d\xi \leq \left(\int (1+|\xi|^2)^{-l} |\hat{u}(\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int (1+|\xi|^2)^{l} |\hat{s}(\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\|s\|_l}$$

$$\|u\|_{-l} \overset{\leq}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^{-l} |\hat{u}(\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\uparrow \hat{s} = (1+|\xi|^2)^{-l} \hat{u}(\xi). \rightsquigarrow s \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$$

Cette def est equi à la def. usual de $H^l(\mathbb{R}^m)$

et $H^{-l}(\mathbb{R}^m)^* = H^l(\mathbb{R}^m)$ $\forall l \in \mathbb{N}$. ?

sûrement $H^l(\mathbb{R}^m) \subset H^{-l}(\mathbb{R}^m)^*$ car $|\langle u, s\rangle| \leq \|u\|_{-l} \|s\|_l$

$\supset$? $v \in H^{-l}(\mathbb{R}^m) \rightsquigarrow (1+|\xi|^2)^{-l/2} \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ bijective!

si $u \in H^{-l}(\mathbb{R}^m)^*$, $\forall w \in L^2$, $\widehat{(1+|\xi|^2)^{l/2} w} \in H^{-l}(\mathbb{R}^m)$

$$\langle (1+|\xi|^2)^{l/2} \hat{u}, w \rangle = \langle \hat{u}, (1+|\xi|^2)^{l/2} w \rangle = \langle u, \mathcal{F}^*((1+|\xi|^2)^{\frac{l}{2}} w) \rangle$$

$$\underset{\uparrow u \in H^{l}}{\leq} C \| \mathcal{F}^*((1+|\xi|^2)^{l/2} w) \|_{-l} = C \|w\|_{L^2}.$$

$\overset{\text{Riesz}}{\rightsquigarrow} (1+|\xi|^2)^{l/2} \hat{u} \in L^2 \rightsquigarrow u \in H^l(\mathbb{R}^m)$

b). X compact. $\{U_j\}$ recouvrem de X, $\{\varphi_j\}$ partition de l'unit

$H^{-k}(X, E)^* = H^k(X, E)$. $\forall k > 0$.

on doit montrer $H^{-k}(X, E)^* \subset H^k(X, E)$

Si $\varphi \in H^{-k}(X,E)^*$. $\forall s \in L^2(X,E) \subset H^{-k}(X,E)$ C_0^∞

$$|\varphi(s)| \leq C\|s\|_{-k} \leq C\|s\|_0$$

$\rightsquigarrow \exists!\, u \in L^2(X,E)$ t.q $\forall s \in L^2$, $\varphi(s) = \langle u, s\rangle$

et $\varphi_j u \in H^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^l)^*$?

$\forall s \in H^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^l)$, $s_1 \in H^k(X,E)$

$$\frac{\langle \varphi_j s, s_1\rangle}{\|s_1\|_k} = \frac{\langle s, \varphi_j s_1\rangle}{\|s_1\|_k} \leq \frac{\|\varphi_j s_1\|_k \cdot \|s\|_{-k}}{\|s_1\|_k} \leq C\|s\|_{-k}$$

Donc $\varphi_j s \in H^{-k}(X,E)$ $\|\varphi_j s\|_{-k} \leq C\|s\|_{-k}$

$$|\langle \varphi_j u, s\rangle| = |\langle u, \varphi_j s\rangle| \leq C\|\varphi_j s\|_{-k} \leq C\|s\|_{-k}. \Rightarrow \varphi_j u \in H$$

Par a) $\varphi_j u \in H^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^l)$. $\rightsquigarrow u \in H^k(X,E)$. //

§. Existence et régularité.

Soit (X, g^{TX}) variété riem compacte. Soit (E, h^E) fibré v. herm sur X, ∇^E herm.

Soit $Q \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(E))$ une section hermitienne c.a.d. $Q_x = Q_x^* \ \forall x \in X$.

Def: Laplacien generalisé

$$H = \Delta^E + Q : \mathscr{C}^\infty(X,E) \circlearrowleft$$

Lemme $\langle \Delta^E s_1, s_2\rangle = \langle \nabla^E s_1, \nabla^E s_2\rangle$ $\forall s_1, s_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(X,E)$.

Dem: On pose $\alpha(U) = \langle \nabla^E_U s_1, s_2\rangle$, $\alpha \in \Omega^1_0(X)$.

$$\langle \Delta^E s_1, s_2\rangle_x = -\langle (\nabla^E_{e_j}\nabla^E_{e_j} - \nabla^E_{\nabla^{TX}_{e_j} e_j}) s_1, s_2\rangle$$

$$= \alpha(\nabla^{TX}_{e_j} e_j) - e_j\langle \nabla^E_{e_j} s_1, s_2\rangle + \langle \nabla^E s_1, s_2\rangle$$

$$= -\mathrm{Tr}(\nabla\alpha) + \langle \nabla^E s_1, \nabla^E s_2\rangle_x$$

$$\int \mathrm{Tr}(\nabla\alpha)\, dv_X = 0$$

//.

Soit H un ~~Lap~~. generalisé sur (E, h^E)

alors $H : H^1(X,E) \longrightarrow H^{-1}(X,E)$ bien def.

H^1

(*) $\langle Hs_1, s_2\rangle = \langle \nabla^E s_1, \nabla^E s_2\rangle + \langle Q s_1, s_2\rangle$ $\forall s_1, s_2 \in \cancel{\mathcal{C}^\infty_0}$

Prop. Si $\exists\, c_0 > 0$ t.q. $Q \geq c_0 \mathrm{Id}_E$, alors

$H : H^1(X,E) \longrightarrow H^{-1}(X,E)$ est 1-1 et surj.

Dem: Par (*), si $Q \geq c_0 \mathrm{Id}$. alors

$\underbrace{\langle Hs, s\rangle}_{\|Hs\|_{-1}\|s\|_1 \geq} \geq c\|s\|_1^2$. $\forall s \in H^1$ $\rightsquigarrow \|Hs\|_{-1} \geq c\|s\|_1$

Donc H est inj. et $\mathrm{Im}(H)$ est fermé

car si Hs_j Cauchy dans H^{-1} alors s_j cauchy dans $H^1 \rightarrow s$

$\rightsquigarrow Hs_j \rightarrow Hs$

Si $\mathrm{Im} H \neq H^{-1}(X,E)$ alors $\underset{\neq 0}{\exists u_0} \in H^{-1}(X,E)^* = H^1(X,E)$

t.q. $u_0 \perp \mathrm{Im} H$. c.a.d $\langle Hu, u_0 \rangle = 0 \quad \forall u \in H^1$.

$\uparrow$
Hahn-Ban. prend $u = u_0$ $\rightsquigarrow \langle Hu_0, u_0 \rangle \geq C \|u_0\|_1^2 \Rightarrow u_0 = 0$.

Contr.