Existence et régularité

Soit (X, g^{TX}) variété riem compacte, $\begin{matrix}(E, h^E)\\ \downarrow \\ X\end{matrix}$

∇^E con herm.

$Q \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathrm{End}(E))$ herm : $Q(x)^* = Q(x)\ \forall x \in X$

<u>Def</u>. Laplacien généralisé H.

$$H = \Delta^E + Q : \mathcal{C}^\infty(X, E) \circlearrowleft$$

Soit H ci-dessus alors $H : H^1(X,E) \longrightarrow H^{-1}(X,E)$

<u>Prop</u>. S'il existe $c_0 > 0$ t.q. $Q > c_0 \mathrm{Id}_E$ alors
$H : H^1(X,E) \longrightarrow H^{-1}(X,E)$ est bijective.

<u>Dem</u> : $$\langle Hs, s \rangle = \underbrace{\|\nabla^E s\|^2_{L^2}}_{\geq C\|s\|_1^2} + \underbrace{\langle Qs, s\rangle}_{> c_0}$$

$s \in H^k(X,E)$: $$\|s\|_k^2 = \sum_{i=0}^{k} \|\underbrace{\nabla^E \cdots \nabla^E}_{i} s\|^2_{L^2}$$

$$\Rightarrow \|Hs\|_{-1} \geq C\|s\|_1.$$

<u>Thm</u> a) si $u \in H^1(X,E)$ et $Hu \in H^{k-1}(X,E)$ pour $k \geq 0$
alors $u \in H^{k+1}(X,E)$. b) $\exists\, C > 0$ t.q. $\forall s \in H^{k+1}(X,E)$

$$\|s\|^2_{k+1} \leq C\|Hs\|^2_k + C\|s\|^2_k.$$

<u>Dem</u> : On peut supposer que $Q > c_0\, Id_E$ après ajouter une constante à H.

$$H : H^1(X,E) \longrightarrow H^{-1}(X,E) \text{ est bijective.}$$

- si $u \in H^1(X,E)$, $Hu \in H^{-1}(X,E)$, on a

$$\|u\|_1 \leq C \|Hu\|_{-1}.$$

- Induction sur k.

$u \in H^1(X,E)$, $f = Hu \in H^{k-1}(X,E) \Rightarrow u \in H^{k+1}(X,E)$

. vrai pour $k=0$ et $\|s\|^2_{k+1} \leq C\|Hs\|^2_k + C\|s\|^2_k$ $\forall s \in H^{k+1}(X,E)$

• On suppose que c'est vrai pour k,

On demande si c'est vrai pour $k+1$.

<u>C'est local</u> : $\forall \varphi \in C_0^\infty(X)$. $H(\varphi u) = \varphi Hu + \underbrace{[H,\varphi]}_{\text{op diff d'ordre 1}} u$ $\qquad \overset{H\varphi - \varphi H}{\shortparallel}$

Donc $Hu \in H^k(X,E)$, $u \in H^{k+1}(X,E) \Rightarrow H(\varphi u) \in H^k(X,E)$

Si je demontre que $\varphi u \in H^{k+2}$ $\rightsquigarrow u \in H^{k+2}$.

. Partition de l'unité.

Maintenant $U \subset \mathbb{R}^m$ borné carte locale $\varphi \in C_0^\infty(U)$,

- $u \in H^{k+1}(U, \mathbb{C}^m)$, $Hu \in H^k(U, \mathbb{C}^m)$, supp $u \subset U$.

on doit montrer que $\qquad |^{k+2}(U, \mathbb{C}^m)$

Rq : sur $U \subset \mathbb{R}^m$ metrique euclidien ; mais comme carte local, on doit utiliser metrique induit

la norme de sobolev equiv.

On applique $\|s\|^2_{k+1} \leq C\|Hs\|^2_k + C\|s\|^2_k$ $\quad \forall s \in H^{k+1}(U)$

à $D_{j,h} u(x) = \frac{1}{h}\left[T_{j,h} u(x) - u(x)\right] = \frac{1}{h}\left[u(x+he_j) - u(x)\right]$

$\{e_j\}$ base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\qquad = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_j}(x + the_j)\, dt$

$$\|D_{j,h}u\|_{k+1}^2 \leq C\|HD_{j,h}u\|_{k-1}^2 + C\underbrace{\|D_{j,h}u\|_k^2}_{\|u\|_{k+1}^2}$$

$$\sum_{|\alpha|\leq k}\left\|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}D_{j,h}u\right\|_{L^2}^2 = \sum_{|\alpha|\leq k}\|\underbrace{D_{j,h}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}}u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{k+1}^2.$$

$$D_{j,h}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}u = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}u(x+the_j)\,dt$$

$$\leq C\|D_{j,h}Hu\|_{k-1}^2 + C\|[H, D_{j,h}]u\|_{k-1}^2 + C\|u\|_{k+1}^2$$

<u>Lemme</u> quand $h\to 0$, $[H, D_{j,h}]$ est une famille bornée d'opérateur d'ordre 2.

$$\|[H, D_{j,h}]u\|_{k-1} \leq C\|u\|_{k+1}. \quad \forall k\geq 0,\ u\in H^{k+1}(X,E),\ \operatorname{supp} u\subset U.$$

<u>Dém</u>: D'abord, pour $\varphi\in \mathcal{C}^\infty(U)$, $l\in\mathbb{N}$, $\exists C>0$ t.q.

$$\|[\varphi, D_{j,h}]v\|_l \leq C\|v\|_l \quad \forall v\in H^l(X,E),\ \operatorname{supp} v\subset U.$$

$$([\varphi, D_{j,h}]v)_x = \varphi(x)\frac{1}{h}[u(x+he_j) - \cancel{u(x)}] - \frac{1}{h}[\varphi(x+he_j)u(x+he_j) - \cancel{\varphi(x)u(x)}]$$

$$= -\frac{1}{h}(\varphi(x+he_j) - \varphi(x))u(x+he_j) = -(D_{j,h}\varphi)\,\tau_{j,h}u\ (x).$$

Pour $H = a_{kl}(x)\frac{\partial}{\partial x_k\partial x_l} + b_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k} + C(x)$, $a, b, c\in\mathcal{C}^\infty(U, \operatorname{End}(\mathbb{C}^m))$.

on a $\left[\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}, D_{j,h}\right] = 0$

$$[H, D_{j,h}] = \sum[a_{kl}, D_{j,h}]\frac{\partial}{\partial x_k\partial x_l} + [b_k, D_{j,h}]\frac{\partial}{\partial x_k} + [C, D_{j,h}]$$

donc $\|[H, D_{j,h}]u\|_{k-1} \leq \left\|[a_{kl}, D_{j,h}]\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l}u\right\|_{k-1} + \cdots$

$$\leq C\|u\|_{k+1} \quad //$$

Donc $\|D_{j,h}u\|_{k+1}^2 \leq C\|Hu\|_k^2 + C\|u\|_{k+1}^2.$

prend $h\to 0$ on trouve $\frac{\partial}{\partial x_j}u\in H^{k+1}(U, E)$.

et $\|u\|_{k+2}^2 \leq C\|H\|_k^2 + C\|u\|_{k+1}^2$. //

Cor. Si $u \in L^2(X,E)$, et $Hu \in H^{k-1}(X,E)$, pour $k \geq 0$, alors $u \in H^{k+1}(X,E)$

Dem : On doit montrer que si $u \in L^2$, $Hu \in H^{-1}(X,E)$, alors $u \in H^1$

Pour $Q > C_0 Id$ soit $w \in H^1(X,E)$ t.q $Hu = Hw$.

alors $w_0 = u - w \in L^2(X,E)$ et $Hw_0 = 0$

On doit montrer que $w_0 = 0$

mais $w_0 \in L^2 \subset H^{-1}$, $\exists v \in H^1(X,E)$ t.q $Hv = w_0$

Par Th., $v \in H^2(X,E)$. Donc $\|w_0\|^2_{L^2} = \langle Hv, w_0 \rangle = \langle v, Hw_0 \rangle = 0$

$\Rightarrow w_0 = 0$ //

Théorème : Si X compacte, alors le spectre $\mathrm{spec}(H)$ de H est discret et les sections propre de H sont une base complète de $L^2(X,E)$. c.à.d. $\exists \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ base ON de $L^2(X,E)$. t.q $H\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$, $-\infty < \lambda_1 \leq \cdots \leq$ et $\dim \mathrm{Ker}(H - \lambda_j) < \infty$, $\varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(X,E)$.

Dem : $Q > C_0 Id_E$. $C_0 > 0$.

On a montrer que $H : H^1(X,E) \to H^{-1}(X,E)$ est bij.

et $\|Hs\|_{-1} \geq c\|s\|_1$

Donc $H^{-1} : H^{-1}(X,E) \to H^1(X,E)$ est bien def et bornée.

Donc $H^{-1} : L^2 \longrightarrow H^1 \underset{\text{Rellich}}{\subset} L^2$ est une app compacte.

Donc $\exists \varphi_j \in L^2(X,E)$ base ON t.q $H^{-1}\varphi_j = \lambda_j^{-1}\varphi_j$ et $\lim_{j\to\infty} \lambda_j^{-1} = 0$.

$\Rightarrow H\varphi_j = \lambda_j \varphi_j \xrightarrow{\text{cor}} \varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(X,E) \Leftarrow \varphi_j \in H^k \ \forall k$.

Th (decom de Hodge) H Laplacien generalisé,

a) $\forall k \geq 0$, $H : H^k(X, \mathcal{E}) \to H^{k-2}(X, \mathcal{E})$ est bien-def et on a $\mathrm{Ker}(H|_{H^k}) \subset \mathcal{C}^\infty(X, \mathcal{E})$ qui est dim fini.

donc $\mathrm{Ker}(H|_{H^k})$ ne dep pas k.

b). $\mathcal{C}^\infty(X, \mathcal{E}) = \ker H \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(H|_{\mathcal{C}^\infty(X,\mathcal{E})})$

$$H^k(X, \mathcal{E}) = \mathrm{Ker}(H) \oplus \mathrm{Im}(H|_{H^{k+2}})$$

et $\mathrm{Im}(H|_{H^{k+2}})$ est fermé dans $H^k(X, \mathcal{E})$.

$\rightsquigarrow$ H est un op de Fredholm:

Def op de Fredholm : $H : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$; $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ Hilbert si $\mathrm{Im}\, H$ fermé et $\ker H$, $\mathrm{coker} H$ dim $< \infty$.

Dem : a) si $s \in H^k(X, \mathcal{E})$, $k \geq 0$. $Hs = 0$, alors $s \in H^l$ $\forall l$. $\overset{\text{Sob}}{\Rightarrow} s \in \mathcal{C}^\infty$. $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Ker}(H|_{H^k})$ ne dep pas k!

b) On a $L^2(X, \mathcal{E}) = \underbrace{\ker H}_{\text{dim fini}} \overset{\perp}{\oplus} (\ker H)^\perp$.

On doit montrer

$$(\ker H)^\perp = \mathrm{Im}(H|_{H^2(X,\mathcal{E})})$$ donc $\mathrm{Im} H|_{H^2}$ fermé

- $\ker H \cap \mathrm{Im}(H|_{H^2}) = \{0\}$

si $u \in \underbrace{\ker H \cap \mathrm{Im}(H|_{H^2})}_{\subset \mathcal{C}^\infty(X, \mathcal{E})}$, alors $\exists v \in H^2$ t.q $u = Hv$.

donc $\langle u, u \rangle = \langle u, Hv \rangle = \langle Hu, v \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$.

- $(\ker H)^\perp \subset \mathrm{Im}(H|_{H^2})$

si $u \in (\ker H)^\perp$ alors $u = \sum a_j \varphi_j \in L^2$ et $a_j = 0$ si $\lambda_j = 0$ $\quad \lambda = \inf \lambda_j$

Prend $v = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} a_j \varphi_j$, $\|v\|^2 = \sum_j \lambda_j^{-2} |a_j|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} \sum |a_j|^2 < +\infty$

et $Hv \overset{\lim}{=} \sum_{j\le k} \frac{1}{\lambda_j} a_j H_j \varphi_j \overset{\lim_{k\to\infty}}{=} \sum_{j\le k} a_j \varphi_j = u \in L^2$

$\overset{\text{Th.}}{\Rightarrow} v \in H^2$.

Donc $L^2 = \ker H \oplus \underbrace{\mathrm{Im}(H|_{H^2})}_{\text{fermé}}$.

D'où pour $u \in L^2 \cap \underbrace{\mathcal{C}^\infty(X,E)}_{=\mathcal{C}^\infty}$, on peut décompose

$$u = u_0 + u_1, \quad \text{avec } Hu_0 = 0,\ u_1 \in \mathrm{Im}\,H.$$

mais $u_0 \in \mathcal{C}^\infty \Rightarrow u_1 \in \mathcal{C}^\infty$ et $u_1 = H\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_1 \in H^2$.

$\Rightarrow \tilde{u}_1 \in \mathcal{C}^\infty$

$\rightsquigarrow C^\infty = \ker H \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(H|_{\mathcal{C}^\infty})$.

• Si $u \in H^k(X,E)$, $U = u_0 + u_1$, $Hu_0 = 0$ $\Rightarrow u_1 \in H^k$

$u_1 = H\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_1 \in H^2$ $\Rightarrow \tilde{u}_1 \in H^{k+2}$.

$\Rightarrow H^k(X,E) = \ker H \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(H|_{H^{k+2}})$.

<u>Cor</u>: Soit X une variété riem compacte, alors

$$\Omega^j(X) = \mathcal{H}^j \oplus \mathrm{Im}\,d \oplus \mathrm{Im}\,d^*, \quad \mathcal{H}^j = \ker D|_{\Omega^j}.$$

$$\ker d = \mathcal{H} \oplus \mathrm{Im}\,d.$$

en particulier $H^j(X,\mathbb{R}) \simeq \mathcal{H}^j$ dim fini.

<u>Dem</u>: $D = d + d^*$, d^* l'adj de d. $\underline{D^2 = dd^* + d^*d}$.

$\sigma(D)$, $\sigma(d)$. $\quad d = \sum e^j \wedge \nabla^{\wedge}_{e_j}$.

$$\sigma(d)(df)s = \lim_{t\to\infty} t^{-1} e^{-itf} \, \underline{de^{itf}} s = \sqrt{-1}\, df \wedge$$

$$\sigma(d^*)(df) = -\sqrt{-1}\, i_{df}$$

$$\sigma(D)(\xi) = \sqrt{-1}(\xi\wedge - i_\xi), \quad \sigma(D^2) = |\xi|^2_{g^{T^*X}} \mathrm{Id}_{\Lambda^\cdot(T^*X)}$$

Donc $\Omega^j(X) = \ker(D^2) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,D^2 = \ker D^2 \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,d \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(d^*)$

$\because$ $\operatorname{Im} d \cap \operatorname{Im} d^* = \{0\}$, , $\operatorname{Im} d \cap \ker D^2 = 0$.

$\operatorname{Im} d \subset \ker d$.

$$\langle D^2 s, s\rangle = \langle dd^* + d^*d\, s, s\rangle = \|ds\|_{L^2}^2 + \|d^*s\|_{L^2}^2$$

$\Rightarrow \ker D^2 = \ker d \cap \ker d^*$. //

Prop. Si R est un op differentiel d'ordre 2, formell auto-adj sur (E, h^E) et $\sigma(R)(\xi) = |\xi|^2_{g^{T^*X}} \mathrm{Id}_E \quad \forall \xi \in T^*X$ alors R est un Laplacien generalise associé à $\tilde{\nabla}^E$ herm. c.à.d

$$R = \tilde{\Delta}^E + Q_2.$$

$\tilde{\Delta}^E$ Laplacien ass à $\tilde{\nabla}^E$, $Q_2 \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathrm{End}(E))$ hermitien

Dem: Si ∇^E con herm $\rightsquigarrow \Delta^E$

$$\Delta^E S = -\sum_i \left(\nabla^E_{e_i} \nabla^E_{e_i} S - \nabla^E_{\nabla^{TX}_{e_i} e_i} S\right) \quad e_i \text{ repère ON de } TX.$$

$$\sigma(\Delta^E)(\xi) = |\xi|^2_{g^{T^*X}} \mathrm{Id}_E.$$

$\rightsquigarrow Q_0 = R - \Delta^E$ est un op diff d'ordre 1, symétrique

On identifie T^*X à TX via g^{TX}

$\sigma(Q_0)(\xi) \in \mathrm{End}(E_x)$ lineaire en $\xi \in T^*_x X$

$\sqrt{-1}\, a_x = \sigma(Q_0)_x \in T^*X \otimes \mathrm{End}(E)$

$$Q_1 = Q_0 - \sum_i \underbrace{a_x(e_i)}_{\in \mathrm{End}(E_x)} \nabla^E_{e_i} \quad \text{Op. diff d'ord } 0.$$

$$\underset{\uparrow \deg 1}{\sigma_1}(Q_1)(\xi) = \sigma(Q_0)(\xi) - \underbrace{a_x(e_i)\langle \sqrt{-1}\xi, e_i\rangle}_{\sqrt{-1}\, a_x(\xi)}$$

$$= 0$$

$$\rightsquigarrow Q_1 \in C^\infty(X, \mathrm{End}(E)).$$

$$\langle Q_0 s_1, s_2\rangle_{L^2} \underset{\uparrow R,\ \Delta^E \text{ sym}}{=} \langle s_1, Q_0 s_2\rangle_{L^2}.$$

$$t^{-1}\langle e^{-itf} Q_0 e^{itf} s_1, s_2\rangle = \langle s_1, e^{-itf} Q_0 e^{itf} s_2\rangle.$$

$t \to \infty$

$$\langle \sigma(Q_0)(df) s_1, s_2\rangle = \langle s_1, \sigma(Q_0)(df) s_2\rangle$$

$\sigma(Q_0)(x,\xi) = \sigma(Q_0)(x,\xi)^*$, $\sqrt{-1}\langle a_x, \xi\rangle = \sigma(Q_0)(\xi)$.

$\rightarrow a(x,e_i) = -a(x,e_i)^*$. antisymétrique !

$\tilde{\nabla}^E = \nabla^E - \frac{1}{2} a_x(\cdot)$ est une connexion herm sur (E, h^E).

$R = \Delta^E + Q_0 = -\sum_i \left((\nabla^E_{e_i})^2 - \nabla^E_{\nabla^{TX}_{e_i} e_i} \right) + a(e_i) \nabla^E_{e_i} + Q_1$

$= -(\tilde{\nabla}^E_{e_i})^2 + \tilde{\nabla}^E_{\nabla^{TX}_{e_i} e_i} + Q_2$, $Q_2 \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathrm{End}(E))$.

$= \tilde{\Delta}^E + Q_2$.. comme $R, \tilde{\Delta}^E$ sym $\rightarrow Q_2$ sym ou herm

---

Soit (X, J) une variété complexe compacte, g^{TX} métrique riem J-inv. Soit (E, h^E) un fibré vectoriel hol herm.

$D = \sqrt{2}\,(\bar\partial^E + \bar\partial^{E*})$ Lap de Kodaira.

$D^2 = 2\,(\bar\partial^E \bar\partial^{E*} + \bar\partial^{E*} \bar\partial^E) = 2\,\square^E$

local: repère $E|_U$
ou trivialis.

$t^{-1} e^{-itf}\, \bar\partial^E e^{itf} s = \sqrt{-1}\,\bar\partial f \wedge s + O(1) \rightsquigarrow \sigma(\bar\partial^E)(df) = \sqrt{-1}\,\bar\partial f \wedge$

$\sigma(\bar\partial^{E*})$ $\langle e^{-itf} \bar\partial^E e^{itf} s_1, s_2 \rangle = \langle s_1, e^{-itf} \bar\partial^{E*} e^{itf} s_2 \rangle \rightsquigarrow$

$$\sigma(\bar\partial^{E*})(df) = (\sigma(\bar\partial^E)(df))^* = -\sqrt{-1}\, i_{\bar\partial f}$$

$$\wedge \sqrt{-1}\,\bar\partial f$$

df via g^{TX}

$$\sigma(D)(df) = \sqrt{2}\sqrt{-1}(\bar\partial f\wedge - i_{\bar\partial f}) = \sqrt{-1}\, c(\nabla f)$$

$$\sigma(D^2)(df) = (\sigma(D)(df))^2 = -c(\nabla f)^2 = |df|^2_{g^{T^*X}} \mathrm{Id}_{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes E}$$

Donc $D^2 = 2\square^E$ est un Lap generalisé. et

$$\langle D^2 s, s\rangle = \|\bar\partial^E s\|^2_{L^2} + \|\bar\partial^{E*} s\|^2_{L^2}$$

$$\Rightarrow \ker \square^E = \ker \bar\partial^E \cap \ker \bar\partial^{E*}.$$

Th (decom de Hodge) On a la decom orth.

$$\Omega^{0,j}(X,E) = \ker\square^E + \mathrm{Im}(\bar\partial^E|_{\Omega^{0,j-1}}) \oplus \mathrm{Im}(\bar\partial^{E*}|_{\Omega^{0,j+1}})$$

$$\ker(\bar\partial^E|_{\Omega^{0,j}}) = \ker\square^E \oplus \mathrm{Im}(\bar\partial^E|_{\Omega^{0,j-1}}).$$

$$\rightsquigarrow H^{0,j}(X,E) \simeq \ker\square^E = \ker\bar\partial^E\cap\ker\bar\partial^{E*} \quad \text{dim fini.}$$

Dem: $2\square^E$ un Lap généralisé pour le fibré $\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes E$

$$\Omega^{0,j}(X,E) = \ker(D^2|_{\Omega^{0,j}}) \oplus \mathrm{Im}(D^2|_{\Omega^{0,j}})$$

$$D^2 = \bar\partial\bar\partial^{E*} + \bar\partial^*\bar\partial$$

$$= \ker(D^2|_{\Omega^{0,j}}) \underset{\oplus}{+} \mathrm{Im}(\bar\partial^E|_{\Omega^{0,j-1}}) \underset{\oplus}{+} \mathrm{Im}(\bar\partial^{E*}|_{\Omega^{0,j+1}}),$$

$\bullet$ $\underset{u_1\in}{\ker\bar\partial^E} \perp \underset{u\in}{\mathrm{Im}\,\bar\partial^{E*}}$, $u = \bar\partial^{E*}v$, $\langle u_1, u\rangle = \langle u_1, \bar\partial^* v\rangle = \langle \bar\partial^E u_1, v\rangle = 0$

• $\ker D^2 + \mathrm{Im}\,\bar\partial^E \subset \ker \bar\partial^E$ $\uparrow (\bar\partial^E)^2 = 0$

$\rightsquigarrow \Omega^{0,\bullet}(X,E) = \ker \bar\partial^E \oplus \mathrm{Im}\,\bar\partial^{E*}$.

et $\ker D^2 + \mathrm{Im}\,\bar\partial^E = \ker \bar\partial^E$ sinon $\Omega^{0,\bullet} \not\hookrightarrow \ker \bar\partial^E \oplus \mathrm{Im}\,\bar\partial^{E*} \subset \Omega^{0,\bullet}$.

• $\underset{u_1}{\ker D^2} \perp \underset{u}{\mathrm{Im}\,\bar\partial^E}$. $\ker D^2 = \ker \bar\partial \cap \ker \bar\partial^*$

$\exists v$ t.q $u = \bar\partial^E v$.

$$\langle u_1, u\rangle = \langle u_1, \bar\partial^E v\rangle = \langle \underbrace{\bar\partial^{E*} u_1}_{=0}, v\rangle = 0$$

$\rightsquigarrow \ker \bar\partial^E = \ker D^2 \oplus \mathrm{Im}\,\bar\partial^E$

$$\rightsquigarrow H^{0,\bullet}(X,E) = \frac{\ker(\bar\partial^E|_{\Omega^{0,\bullet}})}{\mathrm{Im}(\bar\partial^E|_{\Omega^{0,\bullet-1}})} = \ker(D^2|_{\Omega^{0,\bullet}}) \text{ dim fini} //$$

§ $[Q,R]=0$!

Soit (X,ω) variété symplectique compacte,

(L, h^L, ∇^L) fibré en droites prequantifié.

$\downarrow$

X

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^L.$$

On choisi $J \in \mathrm{End}(TX)$. $J^2 = -\mathrm{Id}$, compatible à ω.

$g^{TX} = \omega(\cdot, J\cdot) > 0$. metrique riem. J-inv.

Soit $\nabla^{T^{(1,0)}X} = P^{1,0}\, \nabla^{TX} P^{1,0}$, $P^{1,0}: TX\otimes\mathbb{C} \to T^{(1,0)}X$

con sur $T^{(1,0)}X$ $\quad$ ∇^{TX}: con. LC. $\xrightarrow{\quad}$ $\nabla^{\det}$ con herm sur $\det(T^{(1,0)}X)$

$\rightsquigarrow D$ l'opérateur de Dirac spin^c.

$$D = \sum_i c(e_i)\nabla^{cl}_{e_i} : \Omega^{0,\text{pair}/\text{impair}}(X,L) \longrightarrow \Omega^{0,\text{impair}/\text{pair}}(X,L)$$

$\underbrace{e_i}_{\text{repère ON}}$ ∇^{cl} préserve la parité !

$D_+ = D|_{\Omega^{0,\text{pair}}}$, $D_- = D|_{\Omega^{0,\text{impair}}}$,

$D_- = D_+^*$ l'indice de D_+. $\in K(pt)$.

Def : $\mathrm{Ind}(D_+) = \ker D_+ - \ker D_- \left(\simeq \mathbb{C}^{k_1} - \mathbb{C}^{k_2}\right)$

espace vectoriel virtuel dim fini. $\ker D_- = \operatorname{coker} D_+$. $= \mathbb{C}^{k_1-k_2}$ si $k_1 \geq k_2$

$= -\mathbb{C}^{k_2-k_1}$ sinon.

- $\ker D = \ker D^2$. $(= \ker D_+ \oplus \ker D_-)$

$$\langle D^2 s, s\rangle = \langle Ds, Ds\rangle = \|Ds\|^2_{L^2}.$$

$s \in \ker D^2 \Leftrightarrow s \in \ker D$.

Prop : (admit) $\mathrm{Ind}(D_+)$ ne dep pas le choix de J, ∇^L.

C'est une conséquence de • Th de op Fredholm

ou Th d'AS. $\mathrm{Ind}(D_+) = \int_X Td(T^{(1,0)}X)\, ch(L)\, e^{\omega}$.

Soit G un groupe de Lie compact, connexe agissant sur X, L et preserve $h^L, \nabla^L, J \rightsquigarrow \omega, g^{TX}$ G-inv.

restriction topo. toujours existe.

$\rightsquigarrow \nabla^{d}$ est aussi G-inv.

$\rightsquigarrow \forall g \in G,\quad D g s = g D s \quad \forall s \in \Omega^{0,*}(X, L)$.

$\rightsquigarrow$ si $s \in \ker D$, ~~alors~~ $g.s \in \ker D$.

C.à.d. $\ker D_{\pm}$ sont representation complexe de dim finies de G !

$$R(G) = [E - F] \ (= K_G(pt)),$$ E, F rep comp de dim finie de G.

l'anneau de rep. de G.

$$\mathrm{Ind}(D_+) = \ker D_+ - \ker D_- \in R(G).$$

Mais les rep complexe irreductibles de G est paramétrisé par

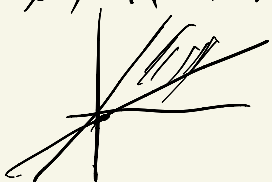
reseau de poids réel

$$\Lambda^*_+ = \Lambda^* \cap \mathfrak{t}^*_+$$

chambre de Weyl positive

On fixé T un tore max de G avec l'alg de Lie $\mathfrak{t}$.

$\Lambda \subset \mathfrak{t}$, $\Lambda = \ker(\exp: \mathfrak{t} \to T)$, $\Lambda^* = \mathrm{Hom}(\Lambda, 2\pi\mathbb{Z})$.



$\mathfrak{t}^*$

Soit V_γ^G la rep irred de G de poid le plus haut $\gamma \in \Lambda_+^*$. Alors

$$\mathrm{Ind}(D_+) = \bigoplus_{\gamma \in \Lambda_+^*} Q(L)_\gamma \, V_\gamma^G$$

$$Q(L)_\gamma \in \mathbb{Z}$$

<u>Question</u> calculer $Q(L)_\gamma \in \mathbb{Z}$ de façon géométrique.

Indice equivariante : Pour $g \in G$.

$$\mathrm{Ind}(D_+)(g) = \mathrm{Tr}\big|_{\ker D_+}(g) - \mathrm{Tr}\big|_{\ker D_-}(g)$$

caractère de $\mathrm{Ind}(D_+)$ fonction sur G

<u>Th</u> (Atiyah - Bott - Segal - Singer) AS equivariante

$$\mathrm{Ind}(D_+)(g) = \sum_j \int_{X_j^g} Td_g(T^{1,0}X)\, ch_g(L).$$

$$X^g = \{x \in X,\ g.x = x\} \qquad X^g = \bigcup_j X_j^g.$$

g change $\rightsquigarrow$ X^g change ! le terme à droite est singulier sur chaque composante.

pas trivial de trouver $Q(L)_\gamma$ à partir de Th AS équiv

L'application moment $\mu : X \to \mathfrak{g}^*$.

$$K^X = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} e^{tK}.x$$

$$2\pi\sqrt{-1}\langle \mu, K\rangle = \nabla^L_{K^X} - L_K$$

On suppose que G agit librem. sur $\mu^{-1}(0)$

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(0) & \hookrightarrow & X \leftarrow (L, h^L, \nabla^L), \omega ; J \\ \downarrow G & & \\ X_G = G \backslash \mu^{-1}(0) & \leftarrow & (L_G, h^{L_G}, \nabla^{L_G}) \\ , \omega_G, J_G & & \end{array}$$

on a $\omega_G = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^{L_G}$.

$\rightsquigarrow D_+^{L_G} : \Omega^{0,\text{pair}}(X_G, L_G) \to \Omega^{0,\text{impair}}(X_G, L_G)$.

<u>Conjeture</u> de Guillemin-Sternberg (1982).

$$Q(L)_{\gamma=0} = \operatorname{Ind}(D_+^{L_G})$$

$\parallel$ $\dim (\operatorname{Ind}(D_+^L))^G \leftarrow$ partie G-invariant de $\operatorname{Ind}(D_+^L)$.

$= \dim (\operatorname{Ker} D_+^L)^G - \dim (\operatorname{Ker} D_-^L)^G$.

<u>Slogan</u> (quantification commute à la reduction)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "R"'] & \operatorname{Ind} D_+^L \in R(G) \arrow[dr, "R"] & \\ X_G \arrow[r, "Q"] & \operatorname{Ind}(D_+^{L_G}) \in \mathbb{Z} \arrow[r, phantom, "\overset{?}{=}"] & (\operatorname{Ind} D_+)^G \end{tikzcd}$$

$[Q, R] = 0$

- Si $G=T$ tore, Meinrenken 1995
  M. Vergne
- G général   Meinreken. coupture symplectique 1998 + Asegui
  Y. Tian - Weiping Zhang pure analytique

Rq : a) Si G agit localement libre sur $\mu^{-1}(0)$
X_G est un orbifold, symplectique, $\mathrm{Ind}(D_+^{L_G})$ bien def

b) sans l'hypothèse sur librement de l'action G sur $\mu^{-1}(0)$, par l'argument de perturbation, $\mathrm{Ind}(D^{L_G})$ encore bien defini.

- $\gamma \neq 0$?

Astuce de changement d'echelle. $(F_\gamma, \nabla^{F_\gamma}, h^{F_\gamma})$

Prend $\gamma \in \Lambda^*_+$. $\mathcal{O}_\gamma = G\cdot\gamma$, ω_γ.

$$\omega_\gamma(K_1^{\mathcal{O}_\gamma}, K_2^{\mathcal{O}_\gamma})_\xi = (\xi, [K_1, K_2]) \quad \forall K_1, K_2 \in \mathfrak{g}, \ \xi \in \mathcal{O}_\gamma.$$

l'app moment $J : \mathcal{O}_\gamma \longrightarrow \mathfrak{g}^*$
$\xi \longmapsto \xi$

$\mathcal{O}_\gamma$ Kähler, F_γ hol et ∇^{F_γ} connexion de chern

Th. (Borel-Weil-Bott)

$H^{0,0}(\mathcal{O}_\gamma, F_\gamma^*) = (V_\gamma^G)^* \leftarrow$ dual $\quad V_\gamma^G$ rep irred. de poid

$H^{0,j}(\mathcal{O}_\gamma, F_\gamma^*) = 0 \quad \forall j > 0. \quad$ le plus haut γ.

<u>Th de Hodge.</u> $\quad H^{0,j}(\mathcal{O}_\gamma, F_\gamma^*) = \ker\left(D^{F_\gamma^*}\big|_{\Omega^{0,j}(\mathcal{O}_\gamma, F_\gamma^*)}\right)$

$$(V_\gamma^G)^* = \operatorname{Ind}\left(D_+^{F_\gamma^*}\right) = \ker\left(D^{F_\gamma}_{\Omega^{0,\text{pair}}}\right) - \ker\left(D^{F_\gamma^*}\big|_{\Omega^{0,\text{impair}}}\right)$$

Sur $\begin{matrix} \swarrow L & \swarrow F_\gamma^* \\ X \times \mathcal{O}_\gamma & \end{matrix} \qquad \mathcal{L} = L \otimes F_\gamma^*$

$$D^{\mathcal{L}} = D^L + D^{F_\gamma^*} \circlearrowleft \Omega^{0,*}(X \times \mathcal{O}_\gamma, \mathcal{L}) = \Omega^{0,*}(X, L) \otimes \Omega^{0,*}(\mathcal{O}_\gamma, F_\gamma^*)$$

$$\ker(D_+^{\mathcal{L}}) = \ker D_+^L \otimes \ker D_+^{F_\gamma^*} \oplus \ker D_-^L \otimes \ker D_-^{F_\gamma^*}$$

$$\ker(D_-^{\mathcal{L}}) = \quad + \quad - \qquad - \quad +$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{Ind}(D_+^{\mathcal{L}}) = \operatorname{Ind}(D_+^L) \otimes \operatorname{Ind}(D^{F_\gamma^*}) \in R(G).$$

$$= \underbrace{\operatorname{Ind}(D_+^L)} \otimes (V_\gamma^G)^*$$

$$(\operatorname{Ind} D_+^{\mathcal{L}})^G = \bigoplus_\nu Q(L)_\nu \Big(\underbrace{V_\nu^G \otimes (V_\gamma^G)^*}_{\delta_{\nu\gamma}}\Big)^G = Q(L)_\gamma.$$

moment $\quad X \times \mathcal{O}_\gamma$

$$\theta(x,\xi) \doteq \mu(x) - y(\xi) = \mu(x) - \xi$$

$$\theta^{-1}(0) = \{(x,\xi) \in X \times \mathcal{O}_\gamma,\ \mu(x) = \xi\}.$$

$$G \backslash \theta^{-1}(0) = X_\gamma \leftarrow L_\gamma = \mathcal{L}_G.$$

On applique $[Q,R]=0$ pour $\theta = 0$.

(on suppose que G agit libre sur $\theta^{-1}(0)$)

$$Q(L)_\gamma = Q(\mathcal{L})_{t=0} = \mathrm{Ind}(D_+^{\mathcal{L}_G}) = \mathrm{Ind}(D^{L_\gamma}).$$

<u>Th</u> (reformulation de $[Q,R]=0$)

(X,ω) variété sym compacte, (L,∇^L) preq.
G groupe de Lie compact connexe agit sur X, L et ω est G-inv. alors

$$\underbrace{\mathrm{Ind}(D_+^L)}_{\text{dim finie}} = \bigoplus_{\gamma\in\Lambda_+^*} \underbrace{\mathrm{Ind}(D^{L_\gamma})}_{\in\mathbb{Z}} V_\gamma^G \in R(G).$$

$\exists\, \gamma$ fini t.q $\mathrm{Ind}(D^{L_\gamma})\neq 0$

<u>Rq</u> a) si X est non-compacte, pour que le forme à droite bien def., on doit suppose que $\mu: X\to \mathfrak{g}^*$ propre $\longrightarrow X_\gamma$ compact $\forall\, \gamma\in\Lambda_+^*$

le terme à gauche, D^L n'est plus Fredholm. on doit le remplace par $\mathrm{Ind}(\sigma_{L,\mu}^X)$ l'indice d'un op transversallement elliptique.

<u>conj Vergne</u> (ICM plenière 2006) + ..

$$\mathrm{Ind}(\sigma_{L,\mu}^X) = \bigoplus_{\gamma\in\Lambda_+^*} \mathrm{Ind}(D^{L_\gamma}) V_\gamma^G.$$

resolu par Ma – W. Zhang sous μ : propre

b) Si (X, ω) Kähler. $\begin{array}{c} L \\ \downarrow \\ X \end{array}$ hol preq.

Th. Teleman, Zhang.

$$H^{0,j}(X,L)^G \simeq H^{0,j}(X_G, L_G).$$

Si $j=0$ c'est G.S (1982)

c) On va le dem. par la methode de Tian-Zhang : Localisation analytique de Bismut – Lebeau.