$$D_T^L = D^L + \sqrt{-1}\, T\, c(\mu^M) : \Omega^{0,*}(M,L)^G$$

$$\operatorname{Ind}(D_T^L)^G = \operatorname{Ind}(D^L)^G \in \cancel{R(G)}\ \mathbb{Z} \quad \forall T \cancel{\in \mathbb{R}} \geq 0$$

$$\Big\downarrow T\to\infty$$

$$\operatorname{Ind}(D^{L_G})$$

<u>Théorème</u> soit U voisinage ouvert G-inv de $\mu^{-1}(0)$
alors $\exists C>0, b>0$ t.q $\forall T\geq 1$, $\forall s\in \Omega^{0,*}(M,L)$
$\operatorname{supp} s \subset M\setminus U$, on a

$$\langle F_T^L s, s\rangle \geq C\left(\|s\|_1^2 + (T-b)\|s\|_0^2\right).$$

$$F_T^L = \underbrace{D_T^{L,2}} + 2\sqrt{-1}\, T \sum_i \mu_i L_{V_i}.$$

$\rightsquigarrow F_T^L$ le coeff de T dans F_T^L est d'ordre 0.

$$F_T^L = D_T^{L,2} : \Omega^{0,*}(M,L)^G$$

$T\to\infty$ localisation analytique de Bismut-Lebeau

Localisation? ($Jg^M = N_{Y/M}$)

$Y = \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$

$g^M \quad \xrightarrow{J} Jg^M \quad \Omega^{0,*}(M, L)$

$\Omega^{0,*}(M_G, L_G)$

Sur $Y = \mu^{-1}(0)$, décomp ON

$$TM|_Y = T^H Y \oplus g^M \oplus J g^M$$

N_J

$M_G = G \backslash Y$

$$g^M_x = \{ K^M_x \in T_x M,\ K \in g \}$$

$T^H Y$ J-inv. induit J_G str. presque complexe sur M_G

$$\rightsquigarrow \left(T^{H(1,0)} Y\right)_G \longrightarrow T^{1,0} M_G \ ?$$

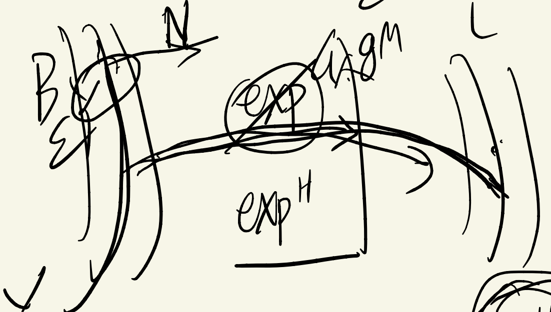
$$\mathscr{C}^\infty(Y, \Lambda(T^{H*(0,1)} Y) \otimes L)^G \simeq \mathscr{C}^\infty(M_G, \Lambda(T^{*(0,1)} M_G) \otimes L)$$

D_G? $\qquad D^{L_G}$

$N_J \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = N_J^{1,0} \oplus N_J^{0,1}$

$$\Lambda(T^{*(0,1)} M)|_Y = \Lambda(T^{H*(0,1)} Y) \otimes \Lambda(N_J^{*(0,1)})$$

Pour $\varepsilon > 0$; $B_\varepsilon = \{ Z \in N_{Y/M},\ |Z| < \varepsilon \}$ $\leftarrow Jg^M$



Sur $U \supset \mu^{-1}(0)$, $T^H U = (g^M)^\perp$; $X = U/G$.

Soit $\nabla^{T^H U} = \pi^* \nabla^{TX}$ con sur $T^H U$. induit par ∇^{TX}. con L.C.

$$\left(\begin{array}{l} \underline{\exp^H}: \quad t \longrightarrow x_t = \exp^H_y(tW) \subset U \\ \text{t.q. } x_t|_{t=0} = y,\ \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = W,\ \underline{\frac{dx}{dt} \in T^H U, \text{ et}} \\ \qquad \nabla^{T^H U}_{\frac{dx}{dx}} \frac{dx}{dx} = 0 \end{array} \right.$$

le relèvement de $\underline{\text{géodésique } \bar{x}_t \text{ sur } (X, g^{TX})}$

$N_{Y/M} \supset \underline{B_\varepsilon \ni (y, Z)} \longrightarrow \exp^H_y(Z) \in M$.

identification G-equiv. de vois B_ε de Y dans N à $\mathcal{U}_\varepsilon$ vois de Y dans M.

Pour $x=(y,z)\in \mathcal{U}_\varepsilon$, on identifie $(\Lambda(T^{*(0,1)}M)\otimes L)_x$ a $(\Lambda T^{*(0,1)}M \otimes L)_y$ par transp. parall. pr. a $\nabla^{\mathcal{L}^*}$ le long $t\longrightarrow (y,tz)$. $\pi_N : N \longrightarrow Y$

$$(\Lambda(T^{*(0,1)}M)\otimes L)|_{\mathcal{U}_\varepsilon} = \pi_N^*((\Lambda(T^{*(0,1)}M)\otimes L)|_Y)$$

$\underline{\text{Def}}$: $\theta\in\mathbb{N}$, E^θ (resp $\mathbb{E}^\theta$, resp F^θ) l'esp de section G-inv de $\Lambda(T^{*(0,1)}M)\otimes L$ sur M, (resp π_N^* sur N : resp $\Lambda(T^{*(0,1)}Y)\otimes L|_Y$ sur Y).

$$\left(\mathbb{E}^0 : \langle s_1, s_2\rangle = \int_Y\left(\int_N \langle s_1, s_2\rangle(y,z)\,dv_N(z)\right)dv_Y(y)\right.$$

$F^0 \longleftrightarrow \Omega^{0,*}(M_G, L_G)$

$\underline{\text{Def}}$: $\forall T>0$, soit I_T :

$$\sigma\in F^0 \longrightarrow (I_T\sigma)(y,z) = \alpha_T^{-1/2}\,\rho(z)\exp\left(-\frac{T}{2}|d\mu_y(z)|^2\right)\sigma(y) \in \mathbb{E}^0 \in E^0$$

$$\alpha_T(y) = \int_{N_y} e^{-T|d\mu_y(z)|^2}\rho(z)\,dv_N(z),$$

$|d\mu_y(z)|^2 \geq c|z|^2$

$\rho(z) = \gamma\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right)$, $\quad \gamma(a) = 1$ si $a \leq \frac{1}{2}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0$ si $a \geq 1$

$dv_M(y,z) = k(y,z)\, dv_N(y)\, dv_{Y_y}(y)$.

$k(y,0) = 1$.

<u>Def</u> :

$\sigma \in F^0 \longrightarrow J_T \sigma = k^{-1/2} I_T \sigma \in E^0$

inj isométrique !

Soit $E^0_T = J_T(F^0)$

$E^{0,\perp}_T = \left(E^0_T\right)^\perp \subset E^0$.

$E^0 = E^0_T \oplus E^{0,\perp}_T$.

Soit $\bar{P}_T$, $\bar{P}_T^\perp$ les proj orth de E^0 à E^0_T, $E^{0,\perp}_T$.

Soit $A_{T,1} = \bar{P}_T D_T^L \bar{P}_T$, $A_{T,2} = \bar{P}_T D_T^L \bar{P}_T^{\perp}$

$A_{T,3} = \bar{P}_T^{\perp} D_T^L \bar{P}_T$, $A_{T,4} = \bar{P}_T^{\perp} D_T^L \bar{P}_T^{\perp}$.

$$D_T^L = \begin{array}{cc} E_T^0 & E_T^{0,\perp} \\ \left[\begin{matrix} \underbrace{A_{T,1}} & \underbrace{A_{T,2}} \\ \underbrace{A_{T,3}} & \underbrace{A_{T,4}} \end{matrix}\right] \end{array} \begin{matrix} E_T^0 \leftarrow \underline{G\text{-inv}} \\ E_T^{0,\perp} \end{matrix}$$

<u>Idée</u> : $A_{T,1} \xrightarrow{T\to\infty} D_G^L \rightsquigarrow D^L G$

symbol principal.

$A_{T,2}$, $A_{T,3}$ négligeable

$A_{T,4}$ inversible, $\underline{s} \in E_T^{0,\perp} \cap E^1 = E_T^{1,\perp}$

$$\|A_{T,4} s\|^2 \geq c\left(\|s\|_1^2 + (T-b)\|s\|_0^2\right)$$

$\rightsquigarrow$ si $\operatorname{supp} s \subset M \setminus U_\varepsilon \rightsquigarrow s \in E_T^{0,\perp}$

déjà fait ! Théorème

Def : Sur $\pi_N^*\left(\Lambda\left(T^{*(0,1)}Y\right)\otimes\Lambda\left(N_J^{*(0,1)}\right)\otimes L|_Y\right)$ sur N,

$n = \dim X$

$n_0 = \dim U$

$$D^H = \sum_{i=1}^{2\dim M_U} c(e_i)\,\nabla^{\pi_N^*\Lambda^{0,\bullet}}_{e_i^H} \qquad \{e_i\} \text{ repère ON de } T^H Y$$

$$D^N = \sum_{i=2(n-n_0)+1}^{2n-n_0} c(e_i)\,\nabla^{\pi_N^*\Lambda^{0,\bullet}}_{e_i} \qquad \{e_i\} \text{ rep. ON de } g^{TN} = N_J g^M|_Y$$

$\leftarrow \frac{\partial}{\partial e_i}$

$$\underline{B} = \sum_{i=1}^{n_0} c(e_i')\,\nabla^{\Lambda^{0,\bullet}}_{e_i'} \qquad \text{rep. ON de } g^M|_Y$$

Def : $\mathbb{E}(\varepsilon)$ (resp. $\mathbb{E}$) l'espace de section $\mathcal{C}^\infty$ de $\pi_N^*\left(\Lambda\left(T^{*(0,1)}M\right)\otimes L|_Y\right)$ sur B_ε. (resp sur l'esp total $N_{Y/M}$).

Lemme : sur $\mathbb{E}(\varepsilon)^4$, B agit comme un ~~tenseur~~ $\rightsquigarrow$ opérateur bornée.

<u>Dem</u> : $\{V_i^M\}_{i=1}^{n_0}$ sont linéaire indep. sur $\mathcal{U}_{\varepsilon_0}$ et engendré $g^M|_{M_\varepsilon}$ donc

$$e_j' = \sum_i \varphi_{ji}(x) V_i^M \rightsquigarrow \text{sur } \mathbb{E}(\varepsilon)^4$$

$$B = \sum_{ij} \varphi_{ji}(x) c(e_j') \underbrace{\left(-L_{V_i} + \nabla^{g^{0,*}}_{V_i^M}\right)}_{\text{est un tenseur !}}$$

<u>Def</u> : Pour $T>0$, $f \in \mathbb{E}(\varepsilon)$, on pose

$$(F_T f)(y,z) = f\left(y, \frac{z}{\sqrt{T}}\right), \quad (y,z) \in B_{\varepsilon\sqrt{T}}$$

<u>Th</u> : Quand $T \to \infty$, sur $\mathbb{E}(\varepsilon)^4$, on a

tenseur

$$F_T R^{1/2} D^L R^{-1/2} F_T^{-1} = \sqrt{T} D^N + D^H + B|_Y + M|_Y + \frac{1}{\sqrt{T}}\left(|z|^2 \partial^N + |z| \partial^H + |z|\right).$$

$$F_T\, c(\mu^M)_{(y,Z)}\, F_T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{T}}\, c(\nabla_Z \mu^M)_y + \frac{1}{2T}\, c(\nabla_Z \nabla_Z \mu^M)_y$$

$$D^L_T \qquad + \frac{1}{T^{3/2}}\, O(|Z|^3)$$

$$F_T\, k^{-1/2}\left(D^L + \sqrt{-1}\, T\, c(\mu^M)\right) k^{1/2}\, F_T^{-1}$$

$$= \sqrt{T}\left(D^N + c\left((\nabla_Z \mu^M)_y\right)\right) + D^H + B|_Y + M|_Y$$

$$+ \frac{1}{2}\, c\left(\nabla_Z \nabla_Z \mu^M\right)_y + \frac{1}{\sqrt{T}}\, O\left(|Z|^2 \partial^N + |Z|\partial^H + |Z| + |Z|^3\right)$$

$$\mathcal{H} = |\mu|^2.$$

$$2\mu^{M} = X_{\mathcal{H}} = -J(d\mathcal{H})^*,$$

$d\mu:\ N = J\mathfrak{g}^M_{|Y} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ bijective, $\mu = 0$ sur Y

$\rightsquigarrow \mathcal{H}$ est une fonction de Morse-Bott sur B_ε

et $D^2_y \mathcal{H} = 2\langle d\mu\,\cdot, d\mu\,\cdot\rangle$ est positive! sur $N_{Y/M} \times N_{Y/M}$

$$(\nabla_Z \mu^M)_y = -\frac{1}{2}\, D^2_y \mathcal{H}\left(Z, \frac{\partial}{\partial Z_j}\right) J \frac{\partial}{\partial Z_j}$$

Soit $\{f_j = \frac{\partial}{\partial z_j}\}$ une base ON de N_y t.q

$$\mathcal{H}(y,z) = \sum_{j=1}^{n_0} a_j z_j^2 + O(|z|^3).$$

$a_j > 0$.

$$\rightsquigarrow (\nabla_z \mu^M)_y = -a_j z_j \underbrace{J \frac{\partial}{\partial z_j}}_{g^M}$$

Donc

dérivée partiel usuel

$$\left(D^N + T\sqrt{-1}\, c(\nabla_z \mu^M)_y = \sum_{i=1}^{n_0} c(f_i) \overbrace{\nabla_{f_i}} \right.$$
$$\left. - T\sqrt{-1} \sum_j a_j z_j c(J f_j). \right.$$

$N_J = g^M \oplus \underbrace{J g^M}_{V}$

Problème model : $\Lambda(N_J^{*(0,1)})$

$(W, J, \langle\ \rangle)$ e. v. J-inv. $J \in \mathrm{End}(W)$, $J^2 = -\mathrm{Id}$.

$W = \underbrace{V} \oplus JV \rightsquigarrow \Lambda(W^{*(0,1)})$ fibré vectoriel sur V

Soit $\{f_j\}$ base ON de V, $\{J f_j\}$ base ON de JV.

$$D^V = \sum_j c(f_j)\nabla_{f_j} : \mathcal{C}^\infty(V, \Lambda W^{*(0,1)}) \circlearrowleft$$

Soit $a_j > 0$, $\{y_j\}$ coordonnée sur V assoc à $\{f_j\}$

Pour $T > 0$, on pose

$$D^V_T = D^V - \sqrt{-1}\,T \sum_j a_j y_j\, c(Jf_j).$$

Prop : l'oscillateur harmonique

$$D^{V,2}_T = \Delta - \sqrt{-1}\,T \sum_j a_j\, c(f_j) c(Jf_j) + T^2 \sum_i a_j^2 y_j^2.$$

Th : Pour $T > 0$,

$$\ker D^V_T = \mathbb{C} \exp\left(-\frac{T}{2} \sum_i a_i y_i^2\right),$$

et $\exists C > 0$, t.q. $\operatorname{spec}(D^{V,2}_T) \subset \{0\} \cup [CT, +\infty)$

$$\Lambda W^{*(0,1)} = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{j>0} \Lambda^j W^{*(0,1)}$$

$$e = e^{1,0} + e^{0,1}$$

$$\sqrt{-1}\, c(e)\, c(Je) = 4\, e^{1,0*} \wedge i_{e^{0,1}} - |e|^2 .$$

$$\rightsquigarrow D_T^{V,2} = \underbrace{\Delta - T \sum_j a_j + T^2 \sum_j a_j^2 y_j^2}_{\Delta_T} + 4T \sum_j a_j f^{1,0*}_j \wedge i_{f^{0,1}_j}$$

Δ_T l'osillateur harmonique. $|_{\Lambda^{0,0}} = 0$

$$\ker \Delta_T = \mathbb{C} \exp\Big(-\frac{T}{2} \sum_j a_j y_j^2\Big). \qquad |_{\Lambda^{0,>0}} > 4 \inf a_j > 0$$

$$\operatorname{Spec} \Delta_T = \Big\{ T \sum a_j k_j,\ k_j \geq 0 \Big\}.$$

$$\sigma \in F^0 = \mathcal{C}^\infty(Y, \Lambda(T^{H*(0,1)} Y) \otimes L)^G .$$

$$J_T \sigma(y,z) = k^{1/2} \alpha_T^{-1/2} \rho(z) \exp\Big(-\frac{T}{2} |d\mu_y(z)|^2\Big) \sigma(y)$$

Pour $T>0$, $J_T^{-1} A_{T,1} J_T$ est un op. diff d'ordre 1 auto-adj agissant sur F^0

Th : a) quand $T \to \infty$

$$J_T^{-1} A_{T,1} J_T = D_G^L + O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right).$$

$$\sigma(D_G^L) = \sigma(D^{L_G})$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{Ind}(A_{T,1}) = \mathrm{Ind}(D^{L_G}).$$

Th : $\exists C>0$ t.q $\forall T \geq 1$, $\forall s \in E_T^{1,\perp}$, $s' \in E_T^1$

On a $$\|A_{T,2} s\|_{E^0} \leq C\left(\frac{\|s\|_{E^1}}{\sqrt{T}} + \|s\|_{E^0}\right).$$

$$\|A_{T,3} s'\|_{E^0} \leq C\left(\frac{\|s'\|_{E^1}}{\sqrt{T}} + \|s'\|_{E^0}\right).$$

$$E^1 = E_T^1 \oplus E_T^{1,\perp} \leftarrow E_T^{0,\perp} \cap E^1.$$

<u>Théoreme</u> $\exists \varepsilon > 0$, $C > 1$, $b > 0$ t.q $\forall T \geq 1$

B_ε

$\forall S \in E^{1,1}_T$ on a

$$\| D^{\perp}_T S \|^2_{\underbrace{\mathcal{E}^0}_{0}} \geq C \left(\|S\|^2_{\underbrace{\mathcal{E}^1}_{1}} + \underbrace{(T-b)\|S\|^2_{\mathcal{E}^0}}_{0} \right)$$

<u>Rq</u>. si $\operatorname{supp} S \subset M \setminus B_\varepsilon \rightsquigarrow S \in E^{1,1}_T$.

Théoreme déjà fait.

si $\operatorname{supp} S \subset B_\varepsilon$. deve de Taylors.

$D^H + \sqrt{-1}\, T\, c(\cancel{V}U^H)$ | ker dim 1.

$(\cancel{ker})^{\perp}$ spec $\geq CT$.

$$\| A_{T,4} S \|^2_0 \geq C \left(\|S\|^2_1 + (T-b)\|S\|^2_0 \right)$$

$T \to \infty$ positive

$$\rightsquigarrow \mathrm{Ind}(D^L_T)^G \xrightarrow{T\to\infty} \mathrm{Ind}(D^{L_G})$$

<u>Th</u> $([Q,R]=0)$ c.a.d.

$$\rightsquigarrow \mathrm{Ind}(D^L) = \sum_{\gamma\in\Lambda^*_+} \underbrace{\mathrm{Ind}(D^{L_\gamma})}_{\in\,\mathbb{Z}} \cdot V^G_\gamma .$$