Université Paris Diderot
UFR de mathématiques

Licence de mathématiques-informatique
L3 – *Analyse*

Feuille d'exercices n° 1

Révisions: majorants et bornes supérieures. Fonctions

Points de cours : majorant et minorant

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On appelle :
- *Majorant* de A tout nombre M tel que $a \leq M$ pour tout $a \in A$. S'il existe, il n'est pas unique puisque tout $M' \geq M$ est aussi un majorant.
- *Minorant* de A tout nombre m tel que $m \leq a$ pour tout $a \in A$. S'il existe, il n'est pas unique puisque tout $m' \leq m$ est aussi un minorant.

On dit que :
- A est *majorée* si A admet un majorant.
- A est *minorée* si A admet un minorant.
- A est bornée si A est majorée et minorée.

Exercice 1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont majorés, minorés, bornés ?

(i) $\{4 + 3n \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$
(ii) $\{1/n \ : \ n = 1, 2, \ldots\}$
(iii) $\{1/2^n \ : \ n = 0, 1, 2, \ldots\}$
(iv) $\{3 + (-1)^n \cdot 2 \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$
(v) $\{x^2 \ : \ x \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On pose $|A| = \{|x| \ : \ x \in A\}$. Montrer que A est bornée si et seulement si $|A|$ est majorée.

Exercice 3. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $A + a = \{x + a \ : \ x \in A\}$. On fixe $a \in \mathbb{R}$. Montrer que A est majorée si $A + a$ est majorée. Montrer que A est bornée si et seulement si $A + a$ est bornée.

Exercice 4. L'image d'une partie bornée par une fonction continue est-elle une partie bornée de $\mathbb{R}$? Donner une démonstration dans l'affirmative, ou un contre-exemple dans la négative. Même question pour l'image réciproque d'une partie bornée par une fonction continue.

Point de cours : plus petit et plus grand élément

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On appelle *maximum* de A, aussi appelé *plus grand élément de* A et noté $\max A$, tout nombre M tel que :

1. $M \in A$; et
2. M est un majorant de A.

On appelle *minimum de* A, aussi appelé *plus petit élément de* A et noté $\min A$, tout nombre m tel que :

1. $m \in A$; et
2. m est un minorant de A.

Exercice 5. On suppose que A admet un plus grand élément. Montrer qu'un tel élément est unique.

Exercice 6. Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet-elle un plus grand élément ?

Exercice 7. Montrer que toute partie finie de $\mathbb{R}$ admet un plus grand et un plus petit élément.

Exercice 8. Parmi les parties majorées ou minorées de l'exercice 1, indiquer quelles sont celles qui admettent un plus grand ou un plus petit élément, et donner sa valeur le cas échéant.

Exercice 9. Caractériser tous les intervalles de $\mathbb{R}$ qui admettent un plus petit élément.

Exercice 10. Déterminer $\max\{xe^{-x} \;:\; x \geq 0\}$. Déterminer $\sup\{\arctan x \;:\; x \in \mathbb{R}\}$.

Point de cours : borne supérieure et borne inférieure

Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$. On appelle *borne supérieure* de A, et on note $\sup A$, le plus petit des majorants de A :

$$\sup A = \min\{x \in \mathbb{R} \;:\; \forall a \in A \quad a \leq x\}.$$

Puisque le minimum est unique s'il existe, la borne supérieure est donc unique. On définit dualement la borne inférieure d'une partie minorée de $\mathbb{R}$ comme le plus grand de ses minorants.
On rappelle le théorème fondamental de l'analyse réelle : *toute partie majorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.* Notez la différence avec la notion de *plus grand élément*, qui n'existe pas nécessairement pour toute partie majorée. De même, *toute partie minorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne inférieure*, nécessairement unique, notée $\inf A$.

Exercice 11.
Déterminer les bornes supérieures et les bornes inférieures des ensembles majorés ou minorés de l'exercice 1.

Exercice 12 (caractérisation de la borne supérieure). Soit $A \neq \emptyset$ une partie majorée de $\mathbb{R}$. Montrer que les caractérisations suivantes de M sont équivalentes :

(i) $M = \sup A$

(ii) $A \leq M$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad A \leq x \Rightarrow M \leq x$.

(iii) $A \leq M$ et $\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \epsilon < x \leq M$.

Exercice 13. Soit $x \geq 0$ un nombre réel. Supposons que $\forall \epsilon > 0$ on a $x < \epsilon$. Montrer que $x = 0$.

Exercice 14. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que A admet un plus grand élément. Montrer qu'alors $\sup A = \max A$. En particulier, on a donc $\sup A \in A$.
2. Dans le cas général, a-t-on toujours $\sup A \in A$?

Exercice 15. Soient A et B deux parties majorées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A + B$ est majorée, de plus $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2. Montrer que $A \cup B$ est majorée et déterminer $\sup(A \cup B)$.
3. Si $A \subseteq B$, montrer que $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Exercice 16. Soient A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer $\sup(\alpha A)$ et $\inf(\alpha A)$.

Exercice 17. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $\alpha = \sup(A)$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers α.

Exercice 18 (intervalles de $\mathbb{R}$). On appelle *intervalle* de $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivante :

$$\forall a, b \in I \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad a < x < b \Rightarrow x \in I.$$

En utilisant les notations habituelles $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$, etc, déterminer la forme des intervalles de $\mathbb{R}$.

Fonctions : images directes et réciproques

Exercice 19. Soit $f : X \to Y$ une application. Soient A et A' des parties de X, B et B' des parties de Y. Montrer que

$$A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')$$
$$B \subset B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$$

Exercice 20. Soient $f : X \to Y$ une application, A une partie de X et B une partie de Y. Montrer les assertions suivantes :

(a) $A \subset f^{-1}(f(A))$ avec égalité si et seulement si f est injective.

(b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ avec égalité si et seulement si f est surjective.

Exercice 21. Soient $f : X \to Y$ une application et $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ deux familles de sous-ensembles de X et Y respectivement. Montrer les assertions suivantes :

(a) $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

(b) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ pour $I \neq \varnothing$.

(c) $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

(d) $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ pour $J \neq \varnothing$.

Exercice 22. Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective.

(ii) Pour tout famille $(A_i)_{i\in I}$, $I \neq \varnothing$, de parties de X, $f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

(iii) Pour toutes parties A et B de X, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 23. Soient $f : X \to Y$ une application, A une partie de X et B une partie de Y. Montrer les assertions suivantes :

(a) $f^{-1}(Y\backslash B) = X\backslash f^{-1}(B)$.

(b) $f(X\backslash A) \subset Y\backslash f(A)$ si f est injective ; $f(X\backslash A) \supset Y\backslash f(A)$ si f est surjective.