Feuille d'exercices n° 10

Espaces de Hilbert

Exercice 1. Soit $H = \ell^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ muni de la norme usuelle

$$\|u\| = \Big(\sum_{m\geqslant 1} |u(m)|^2\Big)^{1/2}.$$

On définit une suite $(x_n)_n$ d'éléments de H par la donnée, pour chaque entier n, du terme général $\big(x_n(m)\big)_{m\geqslant 1}$. Déterminer si les suites suivantes d'éléments de H ont une limite dans H, et déterminer leur limite dans ce cas.

(i) $x_n = (\frac{1}{n}, 0, 0, 0, \ldots), \quad n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) $x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots), \quad n \in \mathbb{N}^*$.

(iii) $x_n = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \ldots), \quad n \in \mathbb{N}^*$.

(iv) $x_n(m) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \qquad n, m \in \mathbb{N}^*$.

(v) $x_n(m) = \frac{1}{m} + \frac{1}{nm^3}, \quad n, m \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace fermé de H, non réduit à $\{0\}$. On note p la projection orthogonale de H sur F. Montrer les faits suivants :

i) $p \circ p = p$.

ii) $\forall (x, y) \in H^2,\ \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$.

iii) $\|p\| = 1$.

Exercice 3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on note M_n le sous espace-vectoriel de $\ell^2(\mathbb{N})$ formé des suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tells que $\sum_{k=0}^n x_k = 0$.

a) Montrer que l'application $(x_k)_k \mapsto \sum_{k=0}^n$ est linéaire continue de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{C}$. Que peut-on en déduire sur M_n ? En conclure que $\ell^2(\mathbb{N}) = M_n \oplus M_n^\perp$.

b) Soit $E = \{(x_k)_k | x_i = x_j \text{ pour } 0 \leqslant i, j \leqslant n \text{ et } x_k = 0 \text{ pour } k > n\}$.

   i) Montrer que $E \subset M_n^\perp$.

   ii) Montrer que $M_n^\perp = E$.

Exercice 4.

a) Soient H un espace de Hilbert et H_1 un sous-espace vectoriel fermé. Montrer que pour tout $x \in H$ on a $\|x\|^2 = d(x, H_1)^2 + d(x, H_1^\perp)^2$.

b) Soit $a \neq 0$ dans H. Montrer que

$$\forall x \in H \quad d(x, (\mathbb{C}a)^\perp) = \frac{|\langle x, a\rangle|}{\|a\|}$$

c) Plus généralement, si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, montrer que

$$d(x, F^\perp) = \sup_{y\in F,\, \|y\|=1} |\langle x, y\rangle|.$$

d) Calculer :
$$\inf_{a,b,c}\int_{-1}^{1}|x^3-ax^2-bx-c|^2dx \quad \text{et} \quad \sup_{g\in G}\left|\int_{-1}^{1}x^3g(x)dx\right|,$$
où G est le sous-espace défini par :
$$G=\left\{g\in L^2([-1,1],\mathbb{C})\ :\ \int_{-1}^{1}g(x)dx=\int_{-1}^{1}xg(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2g(x)dx=0,\quad \int_{-1}^{1}|g(x)|^2dx=1\right\}.$$

Exercice 5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre totale d'un espace de Hilbert H. Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose $F_n=\mathrm{Vect}\{f_0,\dots,f_n\}$.

1. Montrer qu'il existe une famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on ait :
$$\mathrm{Vect}\{f_0,\dots,f_n\}=\mathrm{Vect}\{e_0,\dots,e_n\}.$$
2. Soit Montrer que pour tout $x\in H$ on a :
$$d(x,F_n)^2=\|x\|^2-\sum_{i=0}^{n}\left|\langle x,e_k\rangle\right|^2.$$
3. Appliquer les questions précédentes pour trouver le minimum de
$$I(a,b)=\int_0^{\pi}(\sin t-at-bt^2)^2\,dt,$$
lorsque (a,b) parcourt $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 (Courbe de Wiener). Soit $H=L^2([0,1])$ et soit $\gamma:[0,1]\to H$ donnée par $\gamma(t)=\mathbf{1}_{[0,t]}$ (fonction caractéristique).

a) Montrer que γ est continue.
b) Si $a<b\leqslant c<d$ montrer que $\gamma(b)-\gamma(a)$ est orthogonal dans H à $\gamma(d)-\gamma(c)$.
c) Montrer que toute famille des éléments deux à deux orthogonaux est une famille linéairement indépendante. En déduire que H est de dimension infinie.
d) Montrer que γ n'est dérivable en aucun point : autrement dit, pour tout $t_0\in[0,1]$ la limite $\lim_{t\to t_0}\dfrac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$ n'existe pas pour la norme de L^2.