

## Feuille d'exercices n° 11

### Séries de Fourier

**Exercice 1.** Calculer le développement des fonctions  $f$   $2\pi$ -périodiques telles que :

- $f(x) = \pi - |x|$  sur  $] -\pi, \pi[$ .
- $f(x) = \pi - x$  sur  $]0, 2\pi[$ .
- $f(x) = x^2$  sur  $]0, 2\pi[$ .
- $f(x) = \max(0, \sin x)$ .
- $f(x) = |\sin x|^3$ .

**Exercice 2.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -périodique continue par morceaux. Que peut-on dire des coefficients de Fourier de  $f$  si l'on a

- $f(x + \pi) = f(x)$  ?
- $f(x + \pi) = -f(x)$  ?

**Exercice 3.**

a) Pour tout  $y$  de  $[0, \pi]$  on définit la fonction  $f_y$ ,  $2\pi$ -périodique et impaire, par :

$$f_y(x) = \begin{cases} x(\pi - y) & \text{si } x \in [0, y] \\ y(\pi - x) & \text{si } x \in [y, \pi] \end{cases}$$

Soit  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  le développement en série de Fourier de  $f_y$ .

- Déterminer  $a_n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .
  - Calculer  $b_n$  en fonction de  $y$  et  $n$ .
  - Etudier la convergence ponctuelle de la série de Fourier  $f_y$ .
- b) On pose  $\Omega = [0, \pi]^2$  et  $F$  la fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $F(x, y) = f_y(x)$ .
- Calculer  $\iint_{\Omega} F(x, y) dx dy$ .
  - En déduire la valeur de  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}$  en fonction de  $\pi$ .
- c) On pose :  $s = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$ . Comparer  $s$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^4}$ . En déduire que  $s = \frac{\pi^4}{90}$ .

**Exercice 4.**

- Donner le développement en série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $]0, 2\pi[$  par  $f(x) = e^{ax}$  avec  $a \in \mathbb{R}$  non nul. Étudier la convergence simple, uniforme de la série de Fourier.
- Calculer  $\sum_{n \geq 1} \frac{a}{a^2 + n^2}$ .
- Que vaut  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} \frac{a}{a^2 + n^2}$  ? Remarquer que la série ne converge pas normalement sur  $[0, +\infty[$ .

**Exercice 5.**

- Développer en série de Fourier la fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  telle que  $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$  pour  $0 \leq x < 2\pi$ .
- Donner les développements en série de Fourier de  $f(x+1)$  et  $f(x-1)$ .
- Calculer  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ .
- Calculer  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ .

**Exercice 6 (Inégalité de Wirtinger).** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $2\pi$ -périodique de classe  $C^1$  telle que  $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$  et  $f(0) = f(2\pi)$ .

Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f^2(t)dt \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t)dt$$

et déterminer les cas d'égalité.

**Exercice 7.** Soient  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $2\pi$ -périodique, définie par

$$f(\pi) = 0 \text{ et } \forall t \in ]-\pi, \pi[ \quad f(t) = \sin(\alpha t)$$

a) Déterminer la série de Fourier de  $f$ ; étudier sa convergence simple et uniforme.

b) En déduire  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - \alpha^2}$ .

**Exercice 8.** Soit  $f$  l'application  $2\pi$ -périodique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$\forall t \in ]-\pi, \pi[ \quad f(t) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{t^2}{4}$$

a) Déterminer la série de Fourier de  $f$ ; étudier sa convergence.

b) En déduire  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ .

c) Étudier la convergence et la somme de la série obtenue en dérivant terme à terme la série de Fourier de  $f$ .

**Exercice 9.** Soit  $f$  l'application  $2\pi$ -périodique et impaire de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$\forall t \in [0, \pi] \quad f(t) = \pi t - t^2$$

a) Déterminer la série de Fourier de  $f$ ; étudier sa convergence et sa somme.

b) On définit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g''(t) = f(t) \text{ et } g(0) = g(\pi) = 0$$

Montrer que  $g$  est  $2\pi$ -périodique et impaire. Déterminer sa série de Fourier.

c) En déduire  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^6}$  et  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^{10}}$ .

**Exercice 10.** Le but de cet exercice est de résoudre le problème différentiel défini par

$$\begin{cases} y'' + y = |\sin(x)| \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

où  $y$  est une fonction inconnue de la variable réelle  $x$ .

a) Montrer que (1) admet une unique solution, notée  $s$ , définie sur  $\mathbb{R}$ .

b) Soit  $f$  la fonction  $2\pi$  périodique définie sur  $[0, 2\pi]$  par  $f(x) = |\sin(x)|$ .

i) Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction  $f$ .

ii) Étudier la convergence simple de la somme de la série obtenue en a).

c) On pose pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $x$  réel  $u_n(x) = \frac{\cos(2nx)}{(1-4n^2)^2}$ .

i) Montrer que la série de fonctions de terme général  $u_n$  est simplement convergente sur  $\mathbb{R}$ .

On pose alors

$$g(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2nx)}{(1-4n^2)^2}$$

- ii) Etablir que  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - iii) Calculer, pour tout  $x$  réel, la valeur de  $g(x) + g''(x)$ .
  - iv) En utilisant l'égalité de Parseval, calculer  $g(0)$ .
- d) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $x$  réel

$$s(x) = a \cos(x) + b \sin(x) + g(x)$$

est une solution de (1).