Université Paris Diderot
UFR de mathématiques

Licence de mathématiques-informatique
L3 – *Analyse*

Feuille d'exercices n° 12

Révision

Exercice 1. Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et bornées, muni de la norme de la convergence uniforme, et soit F l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et à support compact. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est son adhérence ?

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé. Si A et B sont deux parties de E, on note $A + B$ l'ensemble $\{a + b, a \in A \text{ et } b \in B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A + B$ est fermé.
2. Donner un exemple de deux fermés de $\mathbb{R}^2$ dont la somme n'est pas fermée.

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$. On considère l'opérateur de dérivation $D : E \to E$, $f \mapsto f'$. Montrer que, quelle que soit la norme N dont on munit E, D n'est jamais une application linéaire continue de (E, N) dans (E, N).

Exercice 4. Déterminer si l'application linéaire $T : (E, N_1) \to (F, N_2)$ est continue dans les cas suivants :

1. $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \| \|_1) \to (E, \| \|_1)$, $f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.
2. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\| \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k \| = \sum_{k \geqslant 0} |a_k|$ et $T : (E, \| \|) \to (E, \| \|)$, $P \mapsto P'$.
3. $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\| \sum_{k=0}^n a_k X^k \| = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et $T : (E, \| \|) \to (E, \| \|)$, $P \mapsto P'$.
4. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\| \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k \| = \sum_{k \geqslant 0} k! |a_k|$ et $T : (E, \| \|) \to (E, \| \|)$, $P \mapsto P'$.
5. $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \right)^{1/2}$, $F = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$
   a) $T : (E, \| \|_2) \to (F, \| \|_1)$, $f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.
   b) $T : (F, \| \|_1) \to (E, \| \|_2)$, $f \mapsto f$.
   c) $T : (F, \| \|_1) \to (E, \| \|_2)$, $f \mapsto fg$ où $0 \neq g \in F$ est fixé.

Exercice 5. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que l'application $I : E \to \mathbb{R}$ définie par $I(f) = \int_a^b f(t)\, dt$ est une forme linéaire continue, et calculer sa norme. Même question pour $E = L^2(a,b)$.

Exercice 6. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\Big| \int_a^b f(t)\, dt \Big| = \int_a^b |f(t)|\, dt\,.$$

Montrer que f est de signe constant sur $[a,b]$.

Exercice 7. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, une fontion continue. On suppose que il n'existe pas d'intervalle ouverte non vide sur laquelle f s'annule. On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que :

$$\forall k \leqslant n \quad \int_a^b t^k f(t)\, dt = 0\,.$$

On souhaite montrer qu'il existe au moins $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a,b]$ où f s'annule en changeant de signe.

1. Traiter le cas $n = 0$.

2. Traiter le cas $n = 1$.
3. Traiter le cas général.

Exercice 8. Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \arctan(nx)e^{-x^n}dx$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}$.

Exercice 9. Le but de cet exercice est de démontrer l'identité

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^n}$$

1. Justifier la convergence de chacun des membres de l'égalité précédente.
2. Pour p et q des entiers naturels, on pose $I(p,q) = \int_0^1 x^p(\ln x)^q dx$; justifier la convergence de cette intégrale.
3. Calculer $I(m,0)$ pour $m \in \mathbb{N}$.
4. En déduire la valeur de $I(p,q)$ pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.
5. En développant $\frac{1}{x^x}$ en série, justifier que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n!}I(n,n)$$

6. Conclure.

Exercice 10 (Fonction Gamma). Pour $x \in \mathbb{R}$ on définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Quel est le domaine de définition de Γ ?
2. a) Pour $k \geqslant 1$ et $0 < A < B < +\infty$ on pose

$$g_k(t) = \begin{cases} t^{A-1}e^{-t}|\ln t|^k & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{B-1}e^{-t}|\ln t|^k & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

   Démontrer que g_k est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   b) En déduire que Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition et calculer $\Gamma^{(k)}$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n+1)$ pour n un entier et un équivalent de Γ en 0.
4. a) Justifier que, pour tout $u < -1$, $\ln(1-u) \leqslant -u$.

   b) Pour $x > 0$, on pose

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}(1-t/n)^n & \text{si } t \in]0,n[\\ 0 & \text{si } t \geqslant n \end{cases}$$

   Démontrer que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \Gamma(x)$.
5. En déduire que pour $x > 0$ on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$$

6. En utilisant des intégrations par parties successives, conclure que, pour tout $x > 0$, o n a

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$