Université Paris Diderot
UFR de mathématiques

Licence de mathématiques-informatique
L3 – *Analyse*

Feuille d'exercices n° 2

Topologie

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle préciser si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, ou ni ouverts ni fermés :

$$]1,3[\ ;\quad [2,3[\ ;\quad]-\infty,8]\ ;\quad [2,8]\cup]9,10]\ ;\quad [1,2]\cup\{\frac{1}{n}\ :\ n\geqslant 1\}\ ;\quad [-1,0]\cup\{\frac{1}{n}\ :\ n\geqslant 1\}.$$

Parmi les parties de $\mathbb{R}$ suivantes, indiquer lesquelles contiennent un ouvert contenant 1 :

$$[1,3[\ ;\quad]1,4[\ ;\quad [0,5[.$$

Exercice 2. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite convergente de limite a dans un evn E. Montrer que l'ensemble $\{a\}\cup\{x_n\ :\ n\geqslant 0\}$ est un fermé de E.

Exercice 3. Soit $f_n : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ la suite d'applications continues définies par $f_n(x)=0$ pour $x\in[0,n]$, $f_n(x)=x-n$ pour $x\in[n,n+1]$, et $f_n(x)=1$ pour $x\in[n+1,+\infty[$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4.

a) Montrer que le fermé $[0,1]\subset\mathbb{R}$ est une intersection (infinie) de certains ouverts de $\mathbb{R}$.
b) Montrer que l'ouvert $]0,1[$ est une réunion (infinie) de certains fermés de $\mathbb{R}$.
c) En déduire, dans $\mathbb{R}$, que tout fermé est une intersection de certains ouverts, et que tout ouvert est une réunion de certains fermés.

Exercice 5 (normes sur $\mathbb{R}^n$). Soit $x=(x_1\dots,x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. On considère les trois normes suivantes dans $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^n |x_i|\,,\quad \|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\,,\quad \|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(|x_i|)\,.$$

1. Montrer qu'il existe des constantes réelles strictement positives C_1, C_2 et C_3 telles que
$$\|x\|_\infty\leqslant C_1\|x\|_2\leqslant C_2\|x\|_1\leqslant C_3\|x\|_\infty\,.$$
2. On se place dans $\mathbb{R}^2$.
   (a) Tracer les boules ouvertes $B(0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes ci-dessus.
   (b) Soit $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ |y|\leqslant 1/2\}$. Montrer que A est un fermé de $\mathbb{R}^2$ pour $\mathbb{R}^2$ munit de l'une quelconque des trois normes ci-dessus.
   (c) Montrer que le demi-plan $\{(x,y)\ :\ y>0\}\subseteq\mathbb{R}^2$ est ouvert pour $\mathbb{R}^2$ munit de l'une quelconque des trois normes ci-dessus.

Exercice 6 (inégalité triangulaire inversée). Soit E un evn. Montrer que l'inégalité suivante est valide pour tous points $x,y\in E$:
$$\|x-y\|\geqslant\big|\|x\|-\|y\|\big|\,.$$

Exercice 7. Soit $V=C^0([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit pour $f\in V$
$$N(f)=\int_0^1|f(t)|dt.$$

1. Montrer que N est une norme sur l'espace vectoriel V.
2. On suppose que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de V qui tend vers 0 pour la norme uniforme. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 pour la norme N.

Exercice 8 (distance d'un point à une partie). Soit E un evn. Pour $x \in E$ et A une partie non vide de E, on pose

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| \ : \ a \in A\},$$

et on appelle ce nombre *distance de x à A*.

1. Montrer que le nombre $d(x, A)$ est bien défini.
2. On suppose que $x \in A$. Montrer que $d(x, A) = 0$.
3. On suppose que $d(x, A) = 0$. Montrer que $x \in \bar{A}$.
4. Soit x un élément de X qui n'appartient pas à la boule ouverte $B(a, r)$. Montrer que $d(x, B(a, r)) \geqslant d(a, x) - r$.
5. Soient $x, y \in E$ et soit A une partie non vide de E. Montrer que $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$.

Exercice 9 (intérieur et adhérence). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de I.

Exercice 10. Pour les parties A de $\mathbb{R}^2$ suivantes, préciser $\overline{A}$ et $\mathring{A}$.

1. $\{(x, y) \ : \ x = 0, 0 < y < 1\}$
2. $\{(x, y) \ : \ 0 \leqslant x < 3, -1 \leqslant y \leqslant 3\}$
3. $\{(x, y) \ : \ y < x^2 + 1\}$
4. $\{(x, y) \ : \ y < x^2 + 1\} \cup \{(x, y) \ : \ y = 0\}$