Feuille d'exercices n° 3

Applications continues

Exercice 1. On rappelle la définition de la distance d'un point $x \in E$ à une partie A non vide d'un evn E :

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \ : \ a \in A\}\,.$$

Pour A une partie fixée, montrer que la fonction $x \in E \mapsto d(x, A)$ est lipschitzienne.

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$ l'espace des fonctions continues muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$. Montrer que l'application $f \mapsto \int_0^1 |f(t)|dt$ est 1-lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Étudier les limites en $(0, 0)$ des fonctions suivantes :

$$(a)\ f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}\,, \quad (b)\ f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + xy}{x^2 + y^2}\,, \quad (c)\ f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\,, \quad (d)\ f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}\,.$$

Exercice 4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

1. Rappeler les définitions de la limite de f à droite et à gauche en x_0 .
2. Montrer que f est continue en x_0 si et seulement si f admet des limites à droite et à gauche en x_0 , qui sont égales.

Exercice 5.

1. Trouver un homéomorphisme de $]-1, 1[$ sur $\mathbb{R}$, de $]-1, 1[$ sur $]a, b[$.
2. Soit $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ les deux parties de $\mathbb{R}$ muni de la norme usuelle. Montrer que ces deux parties ne sont pas homémorphes.
3. Montrer que si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et c un point n'appartenant pas à I, les ensembles I et $I \cup \{c\}$ ne sont pas homéomorphes bien qu'en bijection (ce dernier point sera admis).

Exercice 6. On note S^1 le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$:

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}\,.$$

1. Montrer que S^1 est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que l'application $h : \mathbb{R} \to S^1$ définie par $h(t) = (\cos t, \sin t)$ est une application continue et surjective.
3. Montrer que h est une bijection continue de $[0, 2\pi[$ sur S^1 mais n'est pas un homéomorphisme.
4. Montre que la restriction de h à $]0, 2\pi[$, notée $f :]0, 2\pi[\to S^1 \setminus \{(1, 0)\}$ est un homéomorphisme.

Exercice 7 (application fermée). On dit qu'une application $f : X \to Y$ entre deux parties d'espaces vectoriels normés est *fermée* si l'image d'un fermé de X par f est un fermé de sY.

1. Montrer qu'une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une application fermée.
2. Montrer que f est fermée si et seulement si $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.
3. Montrer que f est un homéomorphisme si et seulement si f est une bijection et $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ pour toute partie A de X.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et soit $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \frac{f(x^2+y^2) - f(0)}{x^2+y^2}\,.$$

Déterminer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$; c'est-à-dire, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^2$, la fonction $f_u(t) = f(tu)$ est dérivable en 0. En particulier la fonction f est continue en 0 lorsqu'on la restreint à n'importe quelle direction de $\mathbb{R}^2$.
2. Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 10. Mêmes questions que dans l'exercice précédent avec

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 11 (séparabilité des fermés). Soit X une partie d'un espace vectoriel normé et soient F et G deux fermés non vides disjoints de X.

a) Montrer que $d(x,F) + d(x,G) > 0$ pour tout $x \in X$.

b) Pour $x \in X$ on pose

$$f(x) = \frac{d(x,F)}{d(x,F) + d(x,G)}$$

Montrer que $f : X \to \mathbb{R}$ est continue et que $f(x) = 0$ si $x \in F$ et $f(x) = 1$ si $x \in G$.

c) En déduire qu'il existe des ouverts Ω et Ω' de X tels que

$$F \subset \Omega,\ G \subset \Omega' \text{ et } \Omega \cap \Omega' = \varnothing$$

Exercice 12. On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$.

a) Montrer que f n'est pas uniformément continue sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que f est uniformément continue sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 13. Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est bornée si elle est uniformément continue. Est-ce que la réciproque est vraie ?

Exercice 14. Soient X une partie d'un espace vectoriel normé et $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue. Justifier si les parties de X suivantes sont ouvertes ou fermées.

1. $\{x | f(x) = 8\}$
2. $\{x | f(x) \neq 2\}$
3. $\{x | f(x) < 1\}$
4. $\{x | f(x) \geqslant 5\}$