Université Paris Diderot
UFR de mathématiques

Licence de mathématiques-informatique
L3 – *Analyse*

Feuille d'exercices n° 5

Compléments de topologie. Compacité

Exercice 1. Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de dimension 2×2 et $GL_2(\mathbb{R}) \subset M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles. Montrer que $GL_2(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ partout dense dans $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit $a > 0$ un réel. Soit la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ et $g = f|_{[a,+\infty[}$.

a) Montrer que f n'est pas uniformément continue.

b) Montrer que g est uniformément continue.

Exercice 3. Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Montrer que f est bornée si elle est uniformément continue.
2. Réciproquement, toute fonction bornée et continue sur $]0, 1]$ est-elle uniformément continue ? Justifier dans l'affirmative, ou donner un contre-exemple dans la négative.

Exercice 4. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application continue définie par : $f_n(x) = 0$ pour $x \in [0, n]$, $f_n(x) = x - n$ pour $x \in [n, n + 1]$, et $f_n(x) = 1$ pour $x \in [n + 1, +\infty[$.

1. Montrer que f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5. On dit qu'une application $f : A \to B$ est *fermée* si l'image directe de tout fermé de A par f est un fermé de B. Montrer que $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\pi_1(x, y) = x$ n'est pas une application fermée.

Exercice 6. Les espaces suivants sont-ils compacts ?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leqslant x \leqslant 2\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x - 1)^2 + y^4 < 3\}$
4. $D = \partial C = \overline{C} \setminus \overset{\circ}{C}$
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0,\ xy \geqslant 1\}$
6. $F = \partial E$

Exercice 7. Soit $F =]0, 1[$. Montrer que F est lui-même un fermé borné de F, mais n'est pas compact.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel normé. Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ une partie compacte et $Y \subset E$ une partie. On suppose que $f : X \to Y$ est une bijection continue. Montrer que f est un homéomorphisme.

Exercice 9. On dit que $f : A \to B$ est *localement bornée* si, pour tout $x \in A$, il existe une boule ouvert $B(x, r)$ telle que f est bornée sur $A \cap B(x, r)$.

1. Montrer que toute fonction bornée est localement bornée.
2. Réciproquement, montrer qu'il existe des fonctions localement bornées mais non bornées.
3. On suppose que A est compact et que f est localement bornée sur A. Montrer que f est bornée (f n'est pas supposée continue).

Exercice 10. Soit X un espace compact. On considère une suite décroissante de fermés non vides $(F_n)_{n\geqslant 0}$ de X. Soit U un ouvert de X tel que $F \subset U$. Montrer que U contient l'un des F_n .

Exercice 11. On considère l'espace $E = B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Soit δ_n la fonction caractéristique du singleton $\{n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On définit ainsi une suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E. Déterminer l'ensemble Λ des valeurs d'adhérences de la suite $(\delta_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 12. Soit X un compact ayant au moins deux éléments distincts. Construire une suite de X qui n'admet pas de limite dans X.

Exercice 13. Soient X et Y deux parties compactes. On considère $\mathcal{C}(X \times Y)$ l'espace des fonctions continues de $X \times Y$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{A}$ le sous-espace formé par les fonctions décomposables, c'est-à-dire les fonctions ϕ qui s'écrivent sous la forme $\phi = \sum_{i\in I} f_i(x)g_i(y)$ où I est un ensemble d'indices finis, f_i et g_i sont des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur X et Y respectivement. En utilisant le théorème de Stone-Weierstrass, montrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X \times Y)$.