

Exercices - Feuille 1

I. "Chinese remainder theorem"

1. Soient m_1, \dots, m_r des entiers positifs deux à deux premiers. Montrer qu'il existe un nombre entier e_1 tel que $e_1 \equiv 1 \pmod{m_1}$ et $e_1 \equiv 0 \pmod{m_j} \forall j \neq 1$. En déduire que pour tout entier x_i , il existe un entier x tel que $x \equiv x_i \pmod{m_i}$ pour tout i .
2. m_i comme ci-dessus, $f \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $f(X) \equiv 0 \pmod{m_1 \dots m_r}$ a une solution dans \mathbb{Z} si et seulement si $f(X) \equiv 0 \pmod{m_i}$ a une solution dans \mathbb{Z} pour tout i .

II. Extensions quadratiques

Soit d un entier qui n'est pas un carré. On fixe \sqrt{d} une racine carrée de d dans \mathbb{C} . Posons $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{u + v\sqrt{d} : u, v \in \mathbb{Q}\}$. Un *corps quadratique* est une extension de \mathbb{Q} de degré 2.

1. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est un corps quadratique. Montrer que tout corps quadratique est de cette forme. Est-ce que l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}$ est galoisienne? Quel est son groupe de Galois, et comment il agit sur les éléments de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$?
2. Soient d et d' des entiers non carrés. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{d'})$ sont égaux si et seulement si d/d' est un carré dans \mathbb{Q} . En déduire que tout corps quadratique est isomorphe à $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ avec un entier $d \neq 0, 1$ sans facteur carré et uniquement déterminé.
3. Soit $Q(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible sur \mathbb{Q} . Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. Montrer que le corps de décomposition de Q est $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$. Quelles sont les valeurs possibles de $\Delta \pmod{4}$?
4. Réciproquement, étant donné d un entier sans facteur carré, donner un polynôme quadratique Q dont son corps de décomposition est $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Montrer que si $d \equiv 1 \pmod{4}$ (resp. $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$) tout tel polynôme est de discriminant divisible par d et qu'on peut choisir Q unitaire et de discriminant d (resp. $4d$), notons Q_d un tel polynôme.

III. Entiers quadratiques

1. Soit α une racine de Q_d . Posons $\mathcal{O}_d = \mathbb{Z}[\alpha] = \{x_1 + x_2\alpha : x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que c'est un anneau de corps de fraction égal à $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
2. Montrer que tout polynôme unitaire à coefficients entiers qui a une racine dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ a une racine dans \mathcal{O}_d . En déduire que toute racine $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ d'un polynôme unitaire à coefficients dans \mathcal{O}_d vérifie $x \in \mathcal{O}_d$. (On dit que \mathcal{O}_d est *intégralement clos*). Cette propriété est-elle vérifiée si on remplace \mathcal{O}_d par $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$?
3. Considérons $N : \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \rightarrow \mathbb{Q}$ défini par $N(x_1 + x_2\sqrt{d}) = x_1^2 - dx_2^2$. Montrer que $N(x)N(y) = N(xy)$ et $N(\mathcal{O}_d) \subset \mathbb{Z}$.
4. Montrer que $N(x) = \pm 1$ si x est inversible dans \mathcal{O}_d . Déterminer \mathcal{O}_d^\times lorsque $d < 0$. (Le cas $d > 0$ est beaucoup plus difficile, voir le cours.)
5. Montrer que $\mathcal{O}_{-5} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Dans cet anneau, déterminer les diviseurs de $2, 3, 1 + \sqrt{-5}$ et $1 - \sqrt{-5}$. Montrer que ces nombres sont premiers dans \mathcal{O}_{-5} . Cet anneau est-il principal? Est-il factoriel?

IV. Réduction modulo p

1. Soit p un nombre premier. Notons $\bar{Q}_d \in \mathbb{F}_p[X]$ la réduction de Q_d modulo p . Notons k_p le corps de décomposition de \bar{Q}_d , montrer que k_p/\mathbb{F}_p est de degré $f_p = 1$ ou 2 . Quel est son groupe de Galois G_p ? Que l'on peut dire sur une extension finie de \mathbb{F}_p ? Montrer que $f_p = 1$ si et seulement si $x \mapsto x^p$ est l'identité sur k_p ou encore, pour $p \neq 2$, si et seulement si d est un carré modulo p . Pour $p = 2$, donner un contre-exemple pour la dernière équivalence.