ENS Cachan
M1 mathématiques Arithmétique - 2012-2013

Exercices - Feuille 5

Équation fonctionnelle de ζ

I. Formule de la sommation de Poisson

Dans cette feuille, les fonctions concernées sont suffisamment bonnes telles que l'on peut échanger $\sum_{\mathbb{Z}}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}$ etc... on admet ces faits provenant de l'analyse.

1. Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ décroissante rapidement à l'infini on définit son transformé de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x t} dx.$$

Soit $g(x) = e^{-\pi x^2}$, vérifier que

$$\hat{g}(t) = e^{-\pi t^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x+it)^2} dx.$$

2. Montrer que $G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x+it)^2} dx$ ne dépend pas de t. Admettons le fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$, alors $G(t) = G(0) = 1$ et $\hat{g}(t) = e^{-\pi t^2}$.

3. Pour un nombre réel $\lambda > 0$, on pose $f^\lambda(x) = f(\lambda x)$. Montrer que $\widehat{f^\lambda}(t) = \hat{f}(t/\lambda)/\lambda$. En déduire que le transformé de Fourier de $x \mapsto e^{-\pi u x^2}$ est $t \mapsto u^{-1/2} e^{-\pi t^2/u}$ pour $u \in \mathbb{R}_{>0}$.

4. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ et 1-périodique, on sait que sa série de Fourier converge simplement vers lui-même, autrement dit $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n x}$ avec $a_n = \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx$. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction décroissante rapidement à l'infini, la somme $F(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(x+m)$ est convergente absolument, elle est alors une fonction 1-périodique. Montrer que $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{h}(n) e^{2\pi i n x}$, en particulier on a la *formule de la sommation de Poisson* :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{h}(n)$$

5. Pour un nombre réel positif $u > 0$, en posant $h(x) = e^{-\pi u x^2}$, déduire que $u^{1/2}\theta(u) = \theta(1/u)$ où $\theta(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 u}$.

II. Équation fonctionnelle de ζ

1. Pour $s \in \mathbb{C}$ avec $Re(s) > 0$ on définit la fonction Gamma comme

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^s \frac{dt}{t}.$$

Comme l'intégral converge absolument, c'est une fonction holomorphe sur le demi-plan $Re(s) > 0$. Montrer que $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ pour $Re(s) > 0$.

2. Pour $-1 < Re(s) \leq 0$ on définit $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$, elle est une fonction méromorphe et elle a un pôle simple en $s = 0$. Alors $\Gamma(s)$ est définie sur $Re(s) > -1$. Pour $-2 < Re(s) \leq -1$ on définit

$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+2)}{s(s+1)}$, elle a des pôles simples en $s = 0, -1$. On répète et on trouve une fonction méromorphe $\Gamma(s)$ sur $\mathbb{C}$, elle a des pôles simples en $s = 0, -1, -2, -3\ldots$

3. On sait que la fonction zêta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ est bien définie pour $Re(s) > 1$, et que de plus elle a une continuation méromorphe sur $Re(s) > 0$ avec un pôle simple en $s = 1$. On pose $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$, elle est alors méromorphe sur $Re(s) > 0$ avec un pôle simple en $s = 1$. En suivant les étapes ci-dessous, on va montrer l'équation fonctionnelle pour ξ (ainsi une équation fonctionnelle pour ζ) $\xi(s) = \xi(1-s)$. On obtient donc une continuation méromorphe $\xi(s)$ (ainsi pour $\zeta(s)$) sur le plan $\mathbb{C}$ satisfaisant $\xi(s) = \xi(1-s)$, et de plus elle a deux pôles simples en $s = 0$ et $s = 1$.

a) Montrer que pour $Re(s) > 1$

$$2\xi(s) = \int_0^{+\infty} (\theta(u) - 1)u^{s/2} \frac{du}{u}.$$

b) En écrivant $\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$, montrer que

$$\xi(s) + \frac{1}{s(1-s)} = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} (\theta(u) - 1)(u^{\frac{1-s}{2}} + u^{\frac{s}{2}})\frac{du}{u}$$

pour $Re(s) > 1$.

c) Conclure qu'il existe une continuation méromorphe de ξ sur le plan complex telle que $\xi(s) = \xi(1-s)$, et de plus ξ n'a que deux pôle simple en $s = 0, 1$.

4. Déduire que $\zeta(s) = 0$ pour $s = -2, -4, -6\ldots$

5. Soit $s = s_0$ est une autre racine de $\zeta(s)$, montrer que $Re(s_0) = 1/2$. Bonne chance!