Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

MI4– Année 2012/13
L2 Info

Feuille d'exercices n°1 : Arithmétique dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Exercice 1

1. La différence de deux nombres est 538. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 13 et le reste 22. Quels sont ces nombres ?
2. On divise un entier positif a inférieur à 85 par un entier positif b. Le quotient est 3 et le reste est 19. Quelles sont les valeurs possibles de a et b ?

Exercice 2

1. Donner la liste des entiers positifs qui divisent 100.
2. Combien le nombre 6000000 a-t-il de diviseurs positifs ?

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$$x - 1 \mid x + 3 \tag{1}$$
$$x + 2 \mid x^2 + 2 \tag{2}$$

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

$$xy = 3x + 2y \tag{3}$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \tag{4}$$

Exercice 5 Trouver le pgcd et le ppcm de $a = 2^3 \times 3^5 \times 7^2$ et $b = 2 \times 5^2 \times 7^3$.

Exercice 6 Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. On note q le quotient de la division euclidienne de $a - 1$ par b. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le quotient de la division euclidienne de $(ab^n - 1)$ par b^{n+1}.

Exercice 7 On veut démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. On propose les deux méthodes suivantes.

1. Supposons qu'il existe des entiers positifs a, b tels que $\sqrt{3} = a/b$. Montrer que $a/b = 3b/a = (3b - a)/(a - b)$. Vérifier que $0 < 3b - a < a$. En déduire qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) d'entiers positifs tels que pour tout n, $\sqrt{3} = a_n/b_n$ et $a_{n+1} < a_n$, d'où une contradiction.

2. Donner une autre preuve de l'irrationnalité de $\sqrt{3}$ en décomposant a et b en produit de facteurs premiers dans l'égalité $3b^2 = a^2$. [Indication : on regardera en particulier l'exposant de 3 dans la décomposition en facteurs premiers de a et b.

Exercice 8

1. Décomposer $10\,!$ en produit de facteurs premiers.
2. Trouver la plus grande puissance de 2 qui divise $100\,!$ *Indication :* compter le nombre des multiples de 2 qui sont ≤ 100, puis le nombre des multiples de 4, puis le nombre des multiples de 8, etc...
3. Trouver le nombre de zéros qui figurent à la fin de l'écriture décimale de $100\,!$.

Exercice 9 (Nombres de Mersenne)

1. Soient b et n des entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que $b^n - 1$ est multiple de $b - 1$.
2. Soient a et k des entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose que $a^k - 1$ est un nombre premier. Montrer que $a = 2$ et que k est un nombre premier.
3. Soit p un nombre premier tel que $p \leq 7$. Montrer que $2^p - 1$ est un nombre premier.
4. Vérifier que 23 divise $2^{11} - 1$. Conclure que si p est un nombre premier, alors $M_p := 2^p - 1$ n'est pas nécessairement premier.
5. On définit un nombre *parfait* comme un nombre égal à la somme de ses diviseurs propres, c'est-à-dire vérifiant
$$n = \sum_{d \mid n,\, d<n} d \qquad \text{ou encore} \qquad 2n = \sum_{d \mid n} d.$$
Montrer que si $M_p = 2^p - 1$ est premier, alors le nombre $N_p = 2^{p-1} M_p$ est parfait.
6. Montrer que si n est pair et parfait alors il est de la forme N_p. [1]

Exercice 10 (Nombres de Fermat)

1. Soient b et n des entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que si n est impair, alors $b^n + 1$ est multiple de $b + 1$.
2. Montrer que si $2^n + 1$ est un nombre premier, alors n est une puissance de 2.
3. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que $F_0, \ldots, F_4$ sont premiers mais que F_5 est composé (il est divisible par 641).

1. Cette question est plus difficile (le résultat est dû à Euler) ; on ignore s'il existe un nombre parfait impair.

Exercice 11 Soit n un entier positif. Soit $a > 1$ un diviseur entier de $n! + 1$. Montrer que $a > n$. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 12 Soit n un entier ≥ 1. Montrer qu'il existe n nombres entiers consécutifs qui ne sont pas premiers. *Indication :* considérez $(n+1)! + 2,\ (n+1)! + 3, \ldots$

Exercice 13 Soit a et b deux entiers premiers entre eux (i.e. $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$). On suppose que $ab = c^2$. Montrer que a et b sont eux-mêmes des carrés au signe près.