Feuille d'exercices n° 11

Séries de Fourier

Exercice 1 (fonctions périodiques). Soit $f : S^1 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un couple de points $x, y \in S^1$ symétriques par rapport au centre tel que $f(x) = f(y)$. (*Généralisation en dimension 2 : sur la terre, il existe un couple de points symétriques par rapport au centre où les températures et les pressions sont respectivement la même.)

Exercice 2. Calculer le développement en séries de Fourier des fonctions f 2π-périodiques telles que :

a) $f(x) = \pi - |x|$ sur $]-\pi, \pi[$.

b) $f(x) = \pi - x$ sur $]0, 2\pi[$.

c) $f(x) = x^2$ sur $]0, 2\pi[$.

d) $f(x) = \max(0, \sin x)$.

e) $f(x) = |\sin x|^3$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique continue par morceaux. Que peut-on dire des coefficients de Fourier de f si l'on a

1. $f(x + \pi) = f(x)$?
2. $f(x + \pi) = -f(x)$?

Exercice 4.

a) Pour tout y de $[0, \pi]$ on définit la fonction f_y, 2π-périodique et impaire, par :

$$f_y(x) = \begin{cases} x(\pi - y) & \text{si } x \in [0, y] \\ y(\pi - x) & \text{si } x \in [y, \pi] \end{cases}$$

Soit $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geqslant 1}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ le développement en série de Fourier de f_y.

i) Déterminer a_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

ii) Calculer b_n en fonction de y et n.

iii) Etudier la convergence ponctuelle de la série de Fourier f_y.

b) On pose $\Omega = [0, \pi]^2$ et F la fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = f_y(x)$.

i) Calculer $\iint_\Omega F(x, y)dxdy$.

ii) En déduire la valeur de $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^4}$ en fonction de π.

c) On pose : $s = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^4}$. Comparer s et $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(2n)^4}$. En déduire que $s = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 5.

a) Donner le développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$ non nul. Étudier la convergence simple, uniforme de la série de Fourier.

b) Calculer $\sum_{n \geqslant 1} \frac{a}{a^2+n^2}$.

c) Que vaut $\lim_{a \to +\infty} \sum_{n \geqslant 1} \frac{a}{a^2+n^2}$? Remarquer que la série ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

Exercice 6.

a) Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique f telle que $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ pour $0 \leqslant x < 2\pi$.

b) Donner les développements en série de Fourier de $f(x + 1)$ et $f(x - 1)$.

c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.

d) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Exercice 7 (Inégalité de Wirtinger). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ et $f(0) = f(2\pi)$.
Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f^2(t)dt \leqslant \int_0^{2\pi} f'^2(t)dt$$

et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 8. Soient $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique , définie par

$$f(\pi) = 0 \text{ et } \forall t \in]-\pi, \pi[\quad f(t) = \sin(\alpha t)$$

a) Déterminer la série de Fourier de f ; étudier sa convergence simple et uniforme.

b) En déduire $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2-\alpha^2}$.

Exercice 9. Soit f l'application 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall t \in]-\pi, \pi[\quad f(t) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{t^2}{4}$$

a) Déterminer la série de Fourier de f ; étudier sa convergence.

b) En déduire $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

c) Etudier la convergence et la somme de la série obtenue en dérivant terme à terme la série de Fourier de f.

Exercice 10. Soit f l'application 2π-périodique et impaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall t \in [0, \pi] \quad f(t) = \pi t - t^2$$

a) Déterminer la série de Fourier de f ; étudier sa convergence et sa somme.

b) On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g''(t) = f(t) \text{ et } \quad g(0) = g(\pi) = 0$$

Montrer que g est 2π-périodique et impaire. Déterminer sa série de Fourier.

c) En déduire $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^6}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^{10}}$.

Exercice 11. Le but de cet exercice est de résoudre le problème différentiel défini par

$$\begin{cases} y'' + y = |\sin(x)| \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x.

a) Montrer que (1) admet une unique solution, notée s, définie sur $\mathbb{R}$.

b) Soit f la fonction 2π périodique définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = |\sin(x)|$.

  i) Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f.

  ii) Etudier la convergence simple de la somme de la série obtenue en a).

c) On pose pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x réel $u_n(x) = \frac{\cos(2nx)}{(1-4n^2)^2}$.

i) Montrer que la série de fonctions de terme général u_n est simplement convergente sur $\mathbb{R}$. On pose alors

$$g(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos(2nx)}{(1-4n^2)^2}$$

ii) Etablir que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

iii) Calculer, pour tout x réel, la valeur de $g(x) + g''(x)$.

iv) En utilisant l'égalité de Parseval, calculer $g(0)$.

d) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout x réel

$$s(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + g(x)$$

est une solution de (1).