

Feuille d'exercices n° 2

Topologie

Exercice 1. Dans \mathbb{R} muni de la distance usuelle préciser si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, ou ni ouverts ni fermés :

$$]1, 3[; [2, 3[;]-\infty, 8] ; [2, 8] \cup]9, 10] ; [1, 2] \cup \{\frac{1}{n} : n \geq 1\} ; [-1, 0] \cup \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}.$$

Parmi les parties de \mathbb{R} suivantes, indiquer lesquelles sont voisinages de 1 :

$$[1, 3[;]1, 4[; [0, 5[.$$

Exercice 2. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite convergente de limite a dans un evn E . Montrer que l'ensemble $\{a\} \cup \{x_n : n \geq 0\}$ est un fermé de E .

Exercice 3. Soit $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la suite d'applications continues définies par $f_n(x) = 0$ pour $x \in [0, n]$, $f_n(x) = x - n$ pour $x \in [n, n + 1]$, et $f_n(x) = 1$ pour $x \in [n + 1, +\infty[$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 4.

- Montrer que le fermé $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ est une intersection (infinie) de certains ouverts de \mathbb{R} .
- Montrer que l'ouvert $]0, 1[$ est une réunion (infinie) de certains fermés de \mathbb{R} .
- En déduire, dans \mathbb{R} , que tout fermé est une intersection de certains ouverts, et que tout ouvert est une réunion de certains fermés.

Exercice 5 (normes sur \mathbb{R}^n). Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un élément de \mathbb{R}^n . On considère les trois normes suivantes dans \mathbb{R}^n :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|).$$

- Montrer qu'il existe des constantes réelles strictement positives C_1, C_2 et C_3 telles que

$$\|x\|_\infty \leq C_1 \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \leq C_3 \|x\|_\infty.$$

- On se place dans \mathbb{R}^2 .

- Tracer les boules ouvertes $B(0, 1)$ dans \mathbb{R}^2 pour les normes ci-dessus.
- Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 1/2\}$. Montrer que A est un fermé de \mathbb{R}^2 pour \mathbb{R}^2 munit de l'une quelconque des trois normes ci-dessus.
- Montrer que le demi-plan $\{(x, y) : y > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ est ouvert pour \mathbb{R}^2 munit de l'une quelconque des trois normes ci-dessus.

Exercice 6 (inégalité triangulaire inversée). Soit E un evn. Montrer que l'inégalité suivante est valide pour tous points $x, y \in E$:

$$\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|.$$

Exercice 7. Soit $V = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On définit pour $f \in V$

$$N(f) = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

1. Montrer que N est une norme sur l'espace vectoriel V .
2. On suppose que $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de V qui tend vers 0 pour la norme uniforme. Montrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0 pour la norme N .

Exercice 8 (distance d'un point à une partie). Soit E un evn. Pour $x \in E$ et A une partie non vide de E , on pose

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\},$$

et on appelle ce nombre *distance de x à A* .

1. Montrer que le nombre $d(x, A)$ est bien défini.
2. On suppose que $x \in A$. Montrer que $d(x, A) = 0$.
3. On suppose que $d(x, A) = 0$. Montrer que $x \in \bar{A}$.
4. Soit x un élément de E qui n'appartient pas à la boule ouverte $B(a, r)$. Montrer que $d(x, B(a, r)) \geq d(a, x) - r$.
5. Soient $x, y \in E$ et soit A une partie non vide de E . Montrer que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.
6. Montrer que $d(x, A) = d(x, \bar{A})$.
7. Montrer que si A est fermé alors il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) = d(x, A)$.

Exercice 9 (intérieur et adhérence). Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Déterminer l'intérieur et l'adhérence de I .

Exercice 10. Pour les parties A de \mathbb{R}^2 suivantes, préciser \bar{A} et $\overset{\circ}{A}$.

1. $\{(x, y) : x = 0, 0 < y < 1\}$
2. $\{(x, y) : 0 \leq x < 3, -1 \leq y \leq 3\}$
3. $\{(x, y) : y < x^2 + 1\}$
4. $\{(x, y) : y < x^2 + 1\} \cup \{(x, y) : y = 0\}$