

Feuille d'exercices n° 3
Applications continues

Exercice 1. On rappelle la définition de la distance d'un point $x \in E$ à une partie A non vide d'un evn E :

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Pour A une partie fixée, montrer que la fonction $x \in E \mapsto d(x, A)$ est lipschitzienne.

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$ l'espace des fonctions continues muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$. Montrer que l'application $f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt$ est 1-lipschitzienne de E dans \mathbb{R} .

Exercice 3. Étudier les limites en $(0, 0)$ des fonctions suivantes :

$$(a) f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (b) \frac{x + 2y}{x^2 + y^2}, \quad (c) \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad (d) \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, \quad (e) \frac{x^2 y}{x^4 + 3y^2}.$$

Exercice 4. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert non vide I de \mathbb{R} et soit $x_0 \in I$.

1. Rappeler les définitions de la limite de f à droite et à gauche en x_0 .
2. Montrer que f est continue en x_0 si et seulement si f admet des limites à droite et à gauche en x_0 , qui sont égales et $= f(x_0)$.

Exercice 5.

1. Trouver un homéomorphisme de $] - 1, 1[$ sur \mathbb{R} , de $] - 1, 1[$ sur $]a, b[$.
2. Soit \mathbb{Z} et \mathbb{Q} les deux parties de \mathbb{R} muni de la norme usuelle. Montrer que ces deux parties ne sont pas homéomorphes.
3. Montrer que si I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et c un point n'appartenant pas à I , les ensembles I et $I \cup \{c\}$ ne sont pas homéomorphes bien qu'en bijection (ce dernier point sera admis).

Exercice 6. On note S^1 le cercle unité dans \mathbb{R}^2 :

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

1. Montrer que S^1 est un fermé de \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que l'application $h : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ définie par $h(t) = (\cos t, \sin t)$ est une application continue et surjective.
3. Montrer que h est une bijection continue de $[0, 2\pi[$ sur S^1 mais n'est pas un homéomorphisme.
4. Montre que la restriction de h à $]0, 2\pi[$, notée $f :]0, 2\pi[\rightarrow S^1 \setminus \{(1, 0)\}$ est un homéomorphisme.

Exercice 7 (application fermée). On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ entre deux parties d'espaces vectoriels normés est *fermée* si l'image d'un fermé de X par f est un fermé de sY .

1. Montrer qu'une fonction polynomiale de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est une application fermée.
2. Montrer que la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, 1/2]$ comme application de \mathbb{R} dans $\{0, 1\}$ est surjective, ouverte, fermée, mais n'est pas continue.
3. Montrer que f est fermée si et seulement si $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.
4. Montrer que f est un homéomorphisme si et seulement si f est une bijection et $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ pour toute partie A de X .

5. Montrer que $pr_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; (x_1, x_2) \mapsto x_1$ n'est pas une application fermée.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , et soit $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x, y) = \frac{f(x^2 + y^2) - f(0)}{x^2 + y^2}.$$

Déterminer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f admet une dérivée au point $(0, 0)$ suivant tout vecteur non nul de \mathbb{R}^2 ; c'est-à-dire, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^2$, la fonction $f_u(t) = f(tu)$ est dérivable en 0. En particulier la fonction f est continue en 0 lorsqu'on la restreint à n'importe quelle direction de \mathbb{R}^2 .
2. Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 10. Mêmes questions que dans l'exercice précédent avec

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Exercice 11 (séparabilité des fermés). Soit X une partie d'un espace vectoriel normé et soient F et G deux fermés non vides disjoints de X .

- a) Montrer que $d(x, F) + d(x, G) > 0$ pour tout $x \in X$.
- b) Pour $x \in X$ on pose

$$f(x) = \frac{d(x, F)}{d(x, F) + d(x, G)}$$

Montrer que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et que $f(x) = 0$ si $x \in F$ et $f(x) = 1$ si $x \in G$.

- c) En déduire qu'il existe des ouverts Ω et Ω' de X tels que

$$F \subset \Omega, G \subset \Omega' \text{ et } \Omega \cap \Omega' = \emptyset$$

Exercice 12. On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$.

- a) Montrer que f n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.
- b) Montrer que f est uniformément continue sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 13. Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est bornée si elle est uniformément continue. Est-ce que la réciproque est vraie ?

Exercice 14. Soient X une partie d'un espace vectoriel normé et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Justifier si les parties de X suivantes sont ouvertes ou fermées.

1. $\{x | f(x) = 8\}$
2. $\{x | f(x) \neq 2\}$
3. $\{x | f(x) < 1\}$
4. $\{x | f(x) \geq 5\}$