Université Paris Diderot
UFR de mathématiques

Licence de mathématiques-informatique
L3 – *Analyse*

Feuille d'exercices n$^{\mathrm{o}}$ 4

Applications linéaires continues

Exercice 1. Soit $V = C^0([0,1],\mathbb{R})$. On considère la norme sur V définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|\,.$$

1. Montrer que les applications $\Phi_1, \Phi_2 : V \to \mathbb{R}$ définies par

$$\Phi_1(f) = \int_0^1 f(t)\,dt\,, \quad \Phi_2(f) = f(x_0) \quad (\text{avec } x_0 \in I)$$

   sont des formes linéaires continues et calculer leurs normes d'opérateurs.
2. Qu'en est-il lorsque V est muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$?

Exercice 2. Soit ℓ^∞ l'espace des suites réelles bornées $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$, muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n\geqslant 0} |x_n|$. On considère l'application $\Phi : \ell^\infty \to \ell^\infty$ définie par $\Phi(x) = y$ avec

$$\forall n \geqslant 0 \quad y_n = \frac{x_n}{n+1}\,.$$

1. Montrer que Φ est une application linéaire continue, et calculer sa norme d'opérateur.
2. Montrer que Φ est injective mais n'est pas surjective.
3. Mêmes questions pour $y_n = \frac{x_n}{3n+2}$.

Exercice 3. Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$. On considère les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E définies comme à l'exercice 1. On désigne par $\mathcal{B}_1$ et par $\mathcal{B}_\infty$ l'ensemble des parties de E bornées pour $\|\cdot\|_1$ et pour $\|\cdot\|_\infty$ respectivement. Justifier si les relations $\mathcal{B}_\infty \subset \mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_\infty$ sont vraies ou fausses.

Exercice 4. On utilisera sans démonstration l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivante, valable pour toutes suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels :

$$\sum_{n\geqslant 0} |u_n v_n| \leqslant \Big(\sum_{n\geqslant 0} u_n^2\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{n\geqslant 0} v_n^2\Big)^{\frac{1}{2}}\,.$$

On considère l'espace ℓ^2 des suites numériques $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ de carré sommable, c'est-à-dire telles que

$$\sum_{n\geqslant 0} x_n^2 < \infty\,.$$

On admettra que la formule $\|x\|_2 = \Big(\sum_{n\geqslant 0} x_n^2\Big)^{\frac{1}{2}}$ définit une norme sur ℓ^2.

1. Soit $x, y \in \ell^2$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n y_n$ est absolument convergente.
2. On fixe $y \in \ell^2$ et on considère l'application $\Phi : \ell^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(x) = \sum_{n\geqslant 0} x_n y_n\,.$$

   Montrer que Φ est continue et calculer sa norme d'opérateur.
3. Soit ℓ^1 l'espace des suites numériques $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ absolument convergentes muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{n\geqslant 0} |x_n|$. Montrer que $\ell^1 \subset \ell^2$, et que l'application $\Psi : \ell^1 \to \ell^2$ définie par $\Psi(x) = x$ pour tout $x \in \ell^1$ est une application linéaire continue. Calculer la norme d'opérateur de Ψ.