Feuille d'exercices n° 5

Compléments de topologie. Compacité

Exercice 1. Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de dimension 2×2 et $GL_2(\mathbb{R}) \subset M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles. Montrer que $GL_2(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ partout dense dans $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Les espaces suivants sont-ils compacts ?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leqslant x \leqslant 2\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x - 1)^2 + y^4 < 3\}$
4. $D = \partial C = \overline{C} \setminus \overset{\circ}{C}$
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, \ xy \geqslant 1\}$
6. $F = \partial E$

Exercice 3. Soit $F =]0, 1[$. Montrer que F est lui-même un fermé borné de F, mais n'est pas compact.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé. Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ une partie compacte et $Y \subset E$ une partie. On suppose que $f : X \to Y$ est une bijection continue. Montrer que f est un homéomorphisme.

Exercice 5. On dit que $f : A \to B$ est *localement bornée* si, pour tout $x \in A$, il existe une boule ouvert $B(x, r)$ telle que f est bornée sur $A \cap B(x, r)$.

1. Montrer que toute fonction bornée est localement bornée.
2. Réciproquement, montrer qu'il existe des fonctions localement bornées mais non bornées.
3. On suppose que A est compact et que f est localement bornée sur A. Montrer que f est bornée (f n'est pas supposée continue).

Exercice 6. Soit X un espace compact. On considère une suite décroissante de fermés non vides $(F_n)_{n\geqslant 0}$ de X. Soit U un ouvert de X tel que $F := \bigcap_{n\geqslant 0} F_n \subset U$. Montrer que U contient l'un des F_n .

Exercice 7. On considère l'espace $E = B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Soit δ_n la fonction caractéristique du singleton $\{n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On définit ainsi une suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E. Déterminer l'ensemble Λ des valeurs d'adhérences de la suite $(\delta_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 8. Soit X un compact ayant au moins deux éléments distincts. Construire une suite de X qui n'admet pas de limite dans X.

Exercice 9. Soient X et Y deux parties compactes. On considère $\mathcal{C}(X \times Y)$ l'espace des fonctions continues de $X \times Y$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{A}$ le sous-espace formé par les fonctions décomposables, c'est-à-dire les fonctions ϕ qui s'écrivent sous la forme $\phi = \sum_{i\in I} f_i(x)g_i(y)$ où I est un ensemble fini d'indices, f_i et g_i sont des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur X et Y respectivement. En utilisant le théorème de Stone-Weierstrass, montrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X \times Y)$.

Exercice 10. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ est compact. On considère une partie infinie $X = \{e^{\frac{2\pi i}{n}} | n \geqslant 1\} \subset S^1$ munie de la topologie induite par S^1. Montrer que X n'est pas fermée, mais X est discrète (tout point de X est un ouvert de X).