Feuille d'exercices n° 6

Espaces complets, suites de Cauchy.

Exercice 1. Soit X un ensemble, et $E = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions bornées sur X. Montrer que E, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$, est un espace de Banach.

Exercice 2 (fermés emboîtés). Soit X une partie complète d'un evn.

1. Montrer que l'intersection décroissante d'une suite $(F_n)_{n \geqslant 0}$ de parties fermées, non vides de X et dont le diamètre tend vers 0, a une intersection non vide.
2. Trouver un contre-exemple lorsqu'on ne suppose plus les parties F_n fermées, ou lorsque X n'est plus supposée complète.

Exercice 3. Soit ℓ_∞ l'espace des suites bornées à valeurs complexes, indexées par $\mathbb{N}$. Si $u \in \ell_\infty$, on note $\big(u(n)\big)_{n \geqslant 0}$ la suite des valeurs complexes que prend u. On munit ℓ_∞ de la norme infinie

$$\|u\|_\infty = \sup\big\{|u(n)| \;:\; n \geqslant 0\big\}\,.$$

1. Montrer que ℓ_∞ est un espace complet.
2. Soit E l'ensemble des suites complexes indexées par $\mathbb{N}$ et tendant vers 0. Montrer que E est un sous-espace vectoriel fermé de ℓ_∞ . En déduire que E est complet lorsqu'on le munit de la norme infinie.

Exercice 4 (théorème de point fixe à paramètre). Soit Λ une partie d'un evn, et soit X une partie complète d'un evn E. On considère une application continue $f : \Lambda \times X \to X$, $(\lambda, X) \in \Lambda \times X \mapsto f(\lambda, x) \in X$, qu'on suppose k-contractante en x uniformément en λ, c'est-à-dire qu'il existe un réel $k \in]0, 1[$ tel que

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \forall (x, y) \in X \times X \quad \|f(\lambda, x) - f(\lambda, y)\| \leqslant k\|x - y\|\,.$$

1. Montrer que pour chaque $\lambda \in \Lambda$, il existe un unique point fixe x_λ de $f(\lambda, \cdot)$.
2. Montrer que l'application $\Lambda \to X$ définie par $\lambda \mapsto x_\lambda$ est continue.

Exercice 5. Soit $X = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour f dans X on définit

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|dt\,.$$

1. Vérifier que N_1 définit une norme sur X.
2. Dans cette question on montre que (X, N_1) n'est pas complet.
   (a) Soit la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par $f_n(t) = \inf\big(\frac{1}{\sqrt{t}}, n\big)$ sur $[0, 1]$. Montrer que $(f_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy.
   (b) Montrer par l'absurde que sa limite n'existe pas dans X.

Exercice 6. Soit ℓ^1 l'espace des suites à valeurs complexes, indexées par $\mathbb{N}$, et absolument convergentes, c'est-à-dire telles que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u(n)| < \infty\,.$$

On munit ℓ^1 de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par :

$$\forall u \in \ell^1 \quad \|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u(n)|\,.$$

Montrer que $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ est complet.

Exercice 7. Soient E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et L le sous-ensemble de E formé des applications lipschitziennes. Pour f dans L on pose

$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{x \neq y}\left(\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}\right)$$

a) Montrer que L est un sous-espace vectoriel de E.

b) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur L.

c) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy dans $(L, \|\cdot\|)$.

  i) Montrer que la suite $(f_n(0))$ est convergente.

  ii) En déduire que la suite (f_n) converge uniformément dans E.

  iii) Si f est la limite uniforme de $(f_n)_n$, montrer que $f \in L$ et montrer que f est aussi la limite de $(f_n)_n$ pour la norme $\|\cdot\|$. Conclure que $(L, \|\cdot\|)$ est un espace complet.

Exercice 8. On dit qu'une partie d'un espace vectoriel normé X est *précompacte* si pour tout $\varepsilon > 0$, X admet un recouvrement fini par des boules ouvertes de rayon ε. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est compact.
2. X est complet et précompact.

Exercice 9. Soit ℓ^2 l'espace des suites à valeurs réelles, indexées par $\mathbb{N}$, et telles que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u(n)^2 < \infty\,.$$

On munit ℓ^2 de la norme $\|\cdot\|_2$ définie par :

$$\forall u \in \ell^2 \quad \|u\|_2 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} u(n)^2\right]^{1/2}.$$

Montrer que $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ est complet.

Exercice 10. * (Théorème de Baire)

1. Soit X une partie complète d'un evn. Soit $V_n (n \in \mathbb{N})$ une famille d'ouverts denses de X. Montrer que $V = \cap_{n\geqslant 0} V_n$ est dense dans X.
2. Admettons qu'il existe une bijection $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Considérons $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ une partie non-complète de $\mathbb{R}$. Trouver une famille d'ouverts denses V_n de X telle que $V = \cap_{n\geqslant 0} V_n$ n'est pas dense dans X.
3. Soit X un espace complet. Soit F_n une famille de fermés de X telle que $X = \cup_{n\geqslant 0} F_n$. Montrer qu'il existe n et un ouvert U non-vide de X tels que $U \subset F_n$.
4. Soit X un evn qui admet une base dénombrable $B = \{e_n | n \in \mathbb{N}\}$ (*comparer avec la notion d'une base hilbertienne*). Montrer que X n'est jamais complet.