Feuille d'exercices n° 7

Mesure et fonctions intégrables

1 Cardinalité

Exercice 1. Parmi les ensembles infinis suivants, déterminer lesquels sont dénombrables :

1. $\mathbb{C}[X] = \{$polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}\}$.
2. $\mathbb{Q}$.
3. $\{$nombres premiers$\}$.
4. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue}\}$.
5. $\mathbb{Q}[X]$.
6. $\{$nombres algébriques$\}$ (on rappelle que $\alpha \in \mathbb{C}$ est un nombre algébrique si α est racine d'un polynôme $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$).

2 Intégration

Exercice 2. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est-il un borélien de $\mathbb{R}$? Quels sont les boréliens de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{Q}$?
2. Donner un exemple de borélien de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue strictement positive finie et qui ne contient aucun intervalle ouvert non vide.
3. Plus généralement, si A est un borélien de $\mathbb{R}$, trouver un borélien $A' \subset A$ ne contenant aucun ouvert non vide et tel que $\lambda(A') = \lambda(A)$.
4. Tout borélien de $\mathbb{R}$ est-il réunion dénombrable d'intervalles ?
5. Trouver une suite décroissante de boréliens A_n de $\mathbb{R}$ avec :
$$\lambda\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \neq \lim_{n\to+\infty} \lambda(A_n)\,.$$
Pourquoi, dans un tel exemple, a-t-on nécessairement $\lambda(A_n) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?
6. Soit $0 < \varepsilon < 1$. Existe-t-il un ouvert dense dans $[0, 1]$ de mesure de Lebesgue inférieure à ε ?

Exercice 3. Toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ admet-elle une limite en $+\infty$? Que vaut cette limite si elle existe ?

Exercice 4. Soit μ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que toute droite de $\mathbb{R}^2$ est de mesure nulle.

Exercice 5. Soit $(\mu_i)_{i\in I}$ une famille de mesures positives sur un espace mesurable $(X, \mathcal{F})$. Montrer que $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mu(A) = \sum_{i\in I} \mu_i(A)$$
est une mesure positive sur $(X, \mathcal{F})$.

Exercice 6. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions telles que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $f = g$ presque partout sur $[-n, n]$. Montrer que $f = g$ presque partout sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 (Fubini pour les familles sommables). Soit $(\alpha_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres réels ou complexes.

1. On suppose que les $\alpha_{i,j}$ sont tous $\geqslant 0$. Montrer que

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\alpha_{i,j}=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\alpha_{i,j}=\sum_{(i,j)\in I\times J}\alpha_{i,j}\,.$$

2. Dans le cas général où les $\alpha_{i,j}$ sont à valeurs complexes, montrer que l'une des trois familles

$$(\alpha_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}\,,\qquad \Big(\sum_{j\in J}\alpha_{i,j}\Big)_{i\in I}\,,\qquad \Big(\sum_{i\in I}\alpha_{i,j}\Big)_{j\in J}\,,$$

   est sommable si et seulement si les deux autres le sont, et si elles le sont on a alors l'égalité :

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\alpha_{i,j}=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\alpha_{i,j}=\sum_{(i,j)\in I\times J}\alpha_{i,j}\,.$$

Exercice 8.

1. Soit $\sum a_n$ une série à termes réels positifs, avec $(a_n)_{n\geqslant 0}$ décroissante. Montrer que $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.
2. Montrer que si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors $\lim_{t\to\infty} tf(t) = 0$.
3. Tout fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissante et vérifiant $\lim_{t\to\infty} tf(t) = 0$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 9 (intégrales de Riemann et de Bertrand). Pour quelles valeurs des paramètres $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \geqslant 0$ les intégrales suivantes sont-elles finies :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x}dx,\qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x}dx\,.$$

Ces intégrales sont appelées *intégrales de Riemann* pour $\beta = 0$, *intégrales de Bertrand* pour $\beta > 0$.

Exercice 10.

1. En écrivant $\int_0^a = \int_0^1 + \int_1^a$ montrer que la limite suivante existe :

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx\,.$$

2. Étudier pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\,,$$

   et montrer que la fonction $\frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.