Université Paris Diderot
UFR de mathématiques

Licence de mathématiques-informatique
L3 – *Analyse*

Feuille d'exercices n° 8

Intégration : théorèmes de convergence

Exercice 1. Montrer que les suites suivantes sont bien définies et calculer leurs limites.

a) $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx.$

b) $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{1+x^n} dx.$

c) $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{ne^{-x}}{n\sqrt{x}+1} dx$ (on rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

d) $u_n = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1+nx^3}{(1+x^2)^n} dx.$

e) $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} |\cos x|^{\frac{1}{n}} e^{-x} dx$

f) $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} |\cos x|^n e^{-x} dx$

Exercice 2. Étudier l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{ne^{-nt}}{\sqrt{1+t}} dt$ et montrer qu'il n'existe pas de fonction $h(t)$ telle que

$$\frac{ne^{-nt}}{\sqrt{1+t}} \leqslant h(t) \quad \text{p.p}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $\displaystyle\int_0^1 h(t)dt < \infty$.

Exercice 3. Pour $n > 0$ montrer que chaque intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{ne^{-x}}{\sqrt{1+n^2x^2}} dx$$

est finie et $\lim_{n\to\infty} I_n = +\infty$.

Exercice 4. Soient a et b deux réels strictement positifs. Pour $x > 0$ on pose

$$f(x) = \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}$$

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(a+nb)^2}$$

Exercice 5. Soit a un réel strictement positif. Pour $x > 0$ on pose

$$g(x) = \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}$$

Montrer que g est intégrable sur $]0, +\infty[$ relativement à la mesure de Lebesgue et que

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx = a \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a^2+n^2}$$

Exercice 6. Montrer que la fonction $h : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \sum_{n \geqslant 1} n e^{-nx}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$ relativement à la mesure de Lebesgue et calculer son intégrale.

Exercice 7. Trouver une suite suite de fonctions $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$, positives et intégrables sur $[0, 1]$ et vérifiant les deux conditions suivantes :

$$(a) \int_0^1 f_n(x)\, dx \text{ ne tend pas vers } 0, \qquad (b)\ f_n(x) \text{ tend vers } 0 \text{ pour presque tout } x \in [0, 1].$$

Exercice 8. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\Gamma_n = \int_0^n \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n \exp\Big(\frac{x}{2}\Big) dx\,.$$

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \Gamma_n$.

Exercice 9. Pour $x \geqslant 0$ on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} e^{-xu} du$$

a) Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$. Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Calculer F''.

c) Déduire de a) et de b) une expression de $F'(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$.

d) F est-elle dérivable à droite en 0 ?

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2} dt, \qquad g(x) = \Big(\int_0^x e^{-t^2} dt\Big)^2 .$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f' + g' = 0$.
3. Montrer que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
5. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$.