**Université Paris Diderot**
**UFR de mathématiques**

**Licence de mathématiques-informatique**
**L3 – *Analyse***

# Feuille d'exercices n° 9

## Intégration : théorème de Fubini, changement de variable, densité

**Exercice 1.** Soit $\lambda$ la mesure de Lebsegue de $\mathbb{R}^2$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction mesurable, la *partie sous la courbe de* $f$ est définie par :

$$A(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Montrer l'égalité suivante :

$$\lambda\big(A(f)\big) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx\,.$$

**Exercice 2.** On note $C_c(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues et à support compact sur $\mathbb{R}$. Soit $I : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par :

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}) \qquad I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt\,.$$

1. Montrer que la suite
$$e_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} & t \in [0, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
tend vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$. Modifier légèrement les $e_n$ pour en déduire que le sous-espace
$$\{f \in C_c(\mathbb{R}) \,|\, I(f) = 0\}$$
est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
2. La forme linéaire $I$ s'étend-elle en une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R})$ ?

**Exercice 3.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et soit $\alpha > 0$.

1. Montrer que la série suivante est absolument convergente pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{-\alpha} f(nx)$$
2. En déduire : $\lim n^{-\alpha} f(nx) = 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 4.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T > 0$ et telle que :

$$\int_0^T |f(t)|\,dt < \infty.$$

1. En s'inspirant de la méthode de l'exercice précédent, montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} f(nx) = 0.$$
2. En considérant la fonction $\varphi(x) = \big(\log|\cos x|\big)^2$, en déduire que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ (indication : $\cos x \geqslant 1 - \frac{2}{\pi}x$ si $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$) :
$$\lim_{n\to\infty} |\cos nx|^{\frac{1}{n}} = 1.$$

**Exercice 5.** Montrer la formule :

$$\int_{[0,1]^2} \frac{dxdy}{1-xy} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

**Exercice 6.** Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ et $(g_n)_n$ une suite de fonctions de $L^\infty(\mathbb{R})$. Soit aussi $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. On suppose que $f_n \to f$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $g_n \to g$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que $f_n g_n \to fg$ dans $L^1(\mathbb{R})$.
2. On suppose que $g_n \to g$ p.p., et qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $\|g_n\|_\infty \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que $f_n g_n \to fg$ dans $L^1(\mathbb{R})$.
3. Montrer par un contre-exemple que la même implication n'est plus vraie si on retire l'hypothèse $\|g_n\|_\infty \leqslant M$ dans 2.

**Exercice 7.** En utilisant la densité des fonctions continues à support compact dans $L^1(\mathbb{R})$, montrer que l'ensemble des fonctions en escalier est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

**Exercice 8.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et positive. Pour $t > 0$ on pose $S_f(t) = \{x | f(x) > t\} \subset \mathbb{R}$, et $\phi_f(t) = \lambda\big(S_f(t)\big)$, où $\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En considérant les fonctions caractéristiques définies pour chaque $t > 0$ par :

$$\mathbf{1}_{S_f(t)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } f(x) > t \\ 0, & \text{si } f(x) \leqslant t \end{cases}$$

montrer la formule suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_0^\infty \phi_f(t)\,dt\,.$$

**Exercice 9.** Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$h(x,y) = e^{2i\pi(x+y)}\,.$$

1. Soit $x_1 \leqslant x_2$ et $y_1 \leqslant y_2$ quatre réels. On considère le rectangle fermé $T = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ de $\mathbb{R}^2$ dont les côtés sont parallèles aux axes. En justifiant soigneusement votre calcul, montrer que :
$$\int_T h(x,y)\,dxdy = \Big(\int_{x_1}^{x_2} e^{2i\pi x}\,dx\Big) \cdot \Big(\int_{y_1}^{y_2} e^{2i\pi y}\,dy\Big)\,.$$
2. En déduire que :
$$\int_T h(x,y)\,dxdy = 0 \iff x_2 - x_1 \in \mathbb{Z} \text{ ou } y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}.$$
3. Montrer que les côtés d'un rectangle forment dans $\mathbb{R}^2$ un ensemble de mesure nulle.
4. Soit $R$ un rectangle fermé, de côtés parallèles aux axes. On suppose que $R$ est découpé en sous-rectangles $R_1, \ldots, R_n$, tous de côtés parallèles aux axes, qui recouvrent $R$ entièrement, et tels que deux sous-rectangles distincts $R_i$ et $R_j$ s'intersectent uniquement sur leurs périmètres. Montrer que pour toute fonction $f \in L^1(R)$ on a :
$$\int_R f = \sum_{i=1}^{n} \int_{R_i} f\,.$$
5. On dit qu'un rectangle est *demi-entier* si c'est un rectangle fermé, de côtés parallèles aux axes, et dont l'un des côtés au moins est de longueur entière. Déduire de ce qui précède que si $R$ est partitionné par des rectangles demi-entiers, alors $R$ est lui-même demi-entier.