Université Paris Diderot
UFR de mathématiques

Licence de mathématiques-informatique
L3 – *Analyse I*

Feuille d'exercices n° 2

Topologie

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle préciser si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, ou ni ouverts ni fermés :

$$]1,3[\ ; \quad [2,3[\ ; \quad]-\infty,8]\ ; \quad [2,8]\cup]9,10]\ ; \quad [1,2]\cup\{\frac{1}{n}\ :\ n\geqslant 1\}\ ; \quad [-1,0]\cup\{\frac{1}{n}\ :\ n\geqslant 1\}.$$

Exercice 2. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite convergente de limite a dans un evn E. Montrer que l'ensemble $\{a\}\cup\{x_n\ :\ n\geqslant 0\}$ est un fermé de E.

Exercice 3. Soient $X' = \mathbb{Q}$, $X = \mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1/x$ sinon.

1. Est-ce que $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue ?
2. Est-ce que la restriction $f_{|X'} : X' \to \mathbb{R}$ est une fonction continue ?

Exercice 4 (normes sur $\mathbb{R}^n$). Soit $x = (x_1\ldots,x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. On considère les trois normes suivantes dans $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|\,, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\,, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(|x_i|)\,.$$

1. Montrer qu'il existe des constantes réelles strictement positives C_1, C_2 et C_3 telles que
$$\|x\|_\infty \leqslant C_1\|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1 \leqslant C_3\|x\|_\infty\,.$$
2. On se place dans $\mathbb{R}^2$.
   (a) Tracer les boules ouvertes $B(0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes ci-dessus.
   (b) Montrer que le demi-plan $\{(x,y)\ :\ y>0\}\subseteq\mathbb{R}^2$ est ouvert pour $\mathbb{R}^2$ munit de l'une quelconque des trois normes ci-dessus.

Exercice 5 (inégalité triangulaire inversée). Soit E un evn. Montrer que l'inégalité suivante est valide pour tous points $x,y\in E$:

$$\|x-y\| \geqslant \big|\|x\|-\|y\|\big|\,.$$

Exercice 6. Soit $V = C^0([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit pour $f\in V$

$$N(f) = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

1. Montrer que N est une norme sur l'espace vectoriel V.
2. On suppose que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de V qui tend vers 0 pour la norme uniforme. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 pour la norme N.

Exercice 7 (distance d'un point à une partie). Soit E un evn. Pour $x\in E$ et A une partie non vide de E, on pose

$$d(x,A) = \inf\{\|x-a\|\ :\ a\in A\}\,,$$

et on appelle ce nombre *distance de x à A*.

1. Montrer que le nombre $d(x,A)$ est bien défini.
2. On suppose que $x \in A$. Montrer que $d(x,A) = 0$.
3. Soit x un élément de E qui n'appartient pas à la boule ouverte $B(a,r)$. Montrer que $d(x, B(a,r)) \geqslant d(a,x) - r$.
4. Soient $x, y \in E$ et soit A une partie non vide de E. Montrer que $|d(x,A) - d(y,A)| \leqslant d(x,y)$. Conclure que la fonction $x \in E \mapsto d(x,A)$ est lipschitzienne.

Exercice 8 (séparabilité des fermés). Soit X une partie d'un espace vectoriel normé et soient F et G deux fermés non vides disjoints de X.

a) Montrer que $d(x,F) + d(x,G) > 0$ pour tout $x \in X$.

b) Pour $x \in X$ on pose
$$f(x) = \frac{d(x,F)}{d(x,F) + d(x,G)}$$
Montrer que $f : X \to \mathbb{R}$ est continue et que $f(x) = 0$ si $x \in F$ et $f(x) = 1$ si $x \in G$.

c) En déduire qu'il existe des ouverts Ω et Ω' de X tels que
$$F \subset \Omega,\ G \subset \Omega' \text{ et } \Omega \cap \Omega' = \varnothing$$

Exercice 9. Soit $E = Mat_m(K)$ l'ensemble des matrices $m \times m$ à valeur dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. C'est un espace vectoriel de dimension m^2 sur K.

1. Montrer que l'application déterminant $\det : Mat_m(K) \to K$ est continue.
2. Montrer que le sous-ensemble $U = Mat_m(K)^\times$ des matrices inversibles est un ouvert de E.
3. Rappeler la formule d'inversion d'une matrice inversible. Montrer que l'application d'inverse $U \to E, M \mapsto M^{-1}$ est continue.

Exercice 10. On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$.

a) Montrer que f n'est pas uniformément continue sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que f est uniformément continue sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 11. Montrer que la fonction $f(x) = e^{-x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 12. Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est bornée si elle est uniformément continue. Est-ce que la réciproque est vraie ?

Exercice 13. Soit $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la suite d'applications continues définies par $f_n(x) = 0$ pour $x \in [0,n]$, $f_n(x) = x - n$ pour $x \in [n, n+1]$, et $f_n(x) = 1$ pour $x \in [n+1,+\infty[$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 14. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{inx}}{n}$ converge simplement pour $x \in]0,2\pi[$. Montrer que la limite est une fonction continue.

Exercice 15. Soit X une partie non vide d'un evn. Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions uniformément continues. Supposons que f_n converge uniformément vers f. Montrer que f est aussi uniformément continue sur X.

Exercice 16. Soient X une partie d'un espace vectoriel normé et $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue. Justifier si les parties de X suivantes sont ouvertes ou fermées.

1. $\{x | f(x) = 8\}$
2. $\{x | f(x) \neq 2\}$
3. $\{x | f(x) < 1\}$
4. $\{x | f(x) \geqslant 5\}$