Université Paris Diderot
UFR de mathématiques

Licence de mathématiques-informatique
L3 – *Analyse I*

Feuille d'exercices n° 3

Espaces produits, applications linéaires continues, normes de matrices

Exercice 1. Etudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

$$(a)\ f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\,, \quad (b)\ \frac{x+2y}{x^2+y^2}\,, \quad (c)\ \frac{x^2y}{x^2+y^2}\,, \quad (d)\ \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\,, \quad (e)\ \frac{x^2y}{x^4+3y^2}\,.$$

Exercice 2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

1. Rappeler les définitions de la limite de f à droite et à gauche en x_0.
2. Montrer que f est continue en x_0 si et seulement si f admet des limites à droite et à gauche en x_0, qui sont égales et $= f(x_0)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et soit $F : \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \frac{f(x^2+y^2) - f(0)}{x^2+y^2}\,.$$

Déterminer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$; c'est-à-dire, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^2$, la fonction $f_u(t) = f(tu)$ est dérivable en 0. En particulier la fonction f est continue en 0 lorsqu'on la restreint à n'importe quelle direction de $\mathbb{R}^2$.
2. Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 5. Mêmes questions que dans l'exercice précédent avec

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 6. Soit $V = C^0([0,1],\mathbb{R})$. On considère la norme sur V définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|\,.$$

1. Montrer que les applications $\Phi_1, \Phi_2 : V \to \mathbb{R}$ définies par

$$\Phi_1(f) = \int_0^1 f(t)\,dt\,, \quad \Phi_2(f) = f(x_0) \quad (\text{avec } x_0 \in I)$$

   sont des formes linéaires continues et calculer leurs normes d'opérateurs.
2. Qu'en est-il lorsque V est muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$?

Exercice 7. Soit ℓ^∞ l'espace des suites réelles bornées $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$, muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n\geqslant 0}|x_n|$. On considère l'application $\Phi : \ell^\infty \to \ell^\infty$ définie par $\Phi(x) = y$ avec

$$\forall n \geqslant 0 \quad y_n = \frac{x_n}{n+1}\,.$$

1. Montrer que Φ est une application linéaire continue, et calculer sa norme d'opérateur.
2. Montrer que Φ est injective mais n'est pas surjective.

Exercice 8. Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$. On considère les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E définies comme à l'exercice 6. On désigne par $\mathcal{B}_1$ et par $\mathcal{B}_\infty$ l'ensemble des parties de E bornées pour $\|\cdot\|_1$ et pour $\|\cdot\|_\infty$ respectivement. Justifier si les relations $\mathcal{B}_\infty \subset \mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_\infty$ sont vraies ou fausses.

Exercice 9. On utilisera sans démonstration l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivante, valable pour toutes suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels lorsque les sommes sont finies :

$$\sum_{n\geqslant 0}|u_n v_n| \leqslant \Big(\sum_{n\geqslant 0} u_n^2\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{n\geqslant 0} v_n^2\Big)^{\frac{1}{2}}\,.$$

On considère l'espace ℓ^2 des suites numériques $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ de carré sommable, c'est-à-dire telles que

$$\sum_{n\geqslant 0} x_n^2 < \infty\,.$$

On admettra que la formule $\|x\|_2 = \left(\sum_{n\geqslant 0} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$ définit une norme sur ℓ^2.

1. Soit $x, y \in \ell^2$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n y_n$ est absolument convergente.
2. On fixe $y \in \ell^2$ et on considère l'application $\Phi : \ell^2 \to \mathbb{R}$ définie par

   $$\Phi(x) = \sum_{n\geqslant 0} x_n y_n\,.$$

   Montrer que Φ est continue et calculer sa norme d'opérateur.
3. Soit ℓ^1 l'espace des suites numériques $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ absolument convergentes muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{n\geqslant 0}|x_n|$. Montrer que $\ell^1 \subset \ell^2$, et que l'application $\Psi : \ell^1 \to \ell^2$ définie par $\Psi(x) = x$ pour tout $x \in \ell^1$ est une application linéaire continue. Calculer la norme d'opérateur de Ψ.

Exercice 10. Soit $E = Mat_m(K)$ l'ensemble des matrices $m \times m$ à valeur dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, autrement-dit l'espace des opérateurs linéaires (bornés) sur K^m. On définit pour chaque $n \geqslant 0$ une fonction $f_n : E \to E$ par $f_n(M) = I + M + M^2 + \cdots + M^n$.

1. Montrer que f_n est continue.
2. En restreignant sur la partie $B(0,1) = \{M \in E; ||M|| < 1\}$, montrer que f_n converge simplement. On note sa limite $f : B(0,1) \to E$ par $f(M) = \sum_{k\geqslant 0} M^k$.
3. Montrer que la fonction $g : M \mapsto (I - M)^{-1}$ est continue sur son domaine de définition $\{M \in E; I - M \text{ est inversible}\} \subset E$.
4. Vérifier que $f(M)(I - M) = (I - M)f(M) = I$ si $M \in B(0,1)$, alors $I - M$ est inversible et la limite $f : B(0,1) \to E$ s'identifie à la fonction g.
5. Montrer que f_n converge uniformément vers f sur $\bar{B}(0,r) = \{M \in E; ||M|| \leqslant r\}$ si $r < 1$.

Exercice 11. Considérons l'espace de matrices complexes $E = Mat_m(\mathbb{C})$.

1. Enoncer une condition suffisante pour qu'une matrice $M \in E$ soit diagonalisable.

2. Montrer que le sous-ensemble des matrices diagonalisable $D_m(\mathbb{C}) = \{M \in E;\ M \text{ est diagonalisable}\}$ est dense dans E. (*indication* : sur $\mathbb{C}$, toute matrice est triangularisable.)
3. L'énoncé précédent est faux pour $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$. Considérer la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais elle n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un ouvert U de $Mat_2(\mathbb{R})$ contenant A tel qu'aucune matrice dans U n'est diagonalisable. (*indication* : considérer les discriminants de polynômes caractéristiques)

Exercice 12. Considérer le polynôme $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Rappelons que P_n (vu comme une fonction $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ converge uniformément vers la fonction e^x sur toute partie bornée de $\mathbb{C}$. Sur l'espace $E = Mat_m(\mathbb{C})$ on définit une fonction $P_n : E \to E$ par $M \mapsto P_n(M)$ (le cas classique : $n = 1$).

1. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement. On note sa limite $exp : E \to E$.
2. Montrer que la suite (P_n) converge uniformément vers exp sur la partie bornée $\bar{B}(0,r) = \{M \in E; ||M|| \leqslant r\}$ pour tout réel positif r.
3. En déduire que exp est une fonction continue.

Exercice 13. Soit P une matrice inversible ; Montrer que $P^{-1}exp(M)P = exp(P^{-1}MP)$ pour toute matrice M.

Exercice 14. Soit λ une valeur propre de M. Montrer que e^{λ} est une valeur propre de $exp(M)$.

Exercice 15. Montrer que $\det(exp(M)) = exp(Tr(M))$ pour toute matrice complexe (a fortiori pour les matrices réelles). (*indication* : considérer tout d'abord les matrices diagonalisables, plus la continuité et la densité.)

Exercice 16.

1. Montrer que $exp(M + N) = exp(M)exp(N)$ si $MN = NM$. (*remarque* : cela est encore correct pour tout espace de Banach (complet !) remplaçant $\mathbb{C}^m$.)
2. Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $MN \neq NM$ et $exp(M + N) \neq exp(M)exp(N)$.
3. En déduire que $exp(M)$ est toujours inversible, donner son inverse.