Feuille d'exercices n° 4

Compacité, complétude

Exercice 1. Les espaces suivants sont-ils compacts ?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leqslant x \leqslant 2\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + y^4 < 3\}$
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, \ xy \geqslant 1\}$

Exercice 2. Soit $F =]0, 1[$. Montrer que F est lui-même un fermé borné de F, mais n'est pas compact.

Exercice 3 (fermé-borné non compact). Soit E, F deux evn, et $X \subseteq E$ et $Y \subseteq F$ deux parties. On suppose que $f : X \to Y$ est une bijection continue.

1. Montrer qu'en général, l'image $f(U)$ d'un ouvert U de X n'est pas un ouvert de Y.
2. On suppose de plus que X est compact. Montrer qu'alors, pour tout ouvert U de X, $f(U)$ est un ouvert de Y.

Exercice 4 (voisinage ouvert d'un compatc). Soit K un compact non vide de $E = \mathbb{R}^2$ et soit U un ouvert de E contenant K. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in E \quad d(x, K) < r \implies x \in U \,,$$

où la distance d'un point x à une partie A de E est définie par : $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \ : \ y \in A\}$.

Exercice 5 (somme de deux fermés). Soit E un evn. Si A et B sont deux parties de E, on définit la *somme* de A et B comme la partie $A + b = \{a + b \ : \ a \in A, \ b \in B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B fermé, alors $A + B$ est fermé.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, \ xy \geqslant 1\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geqslant 0, \ y \leqslant 0\}$. Montrer que A et B sont deux fermés de $\mathbb{R}^2$ dont la somme n'est pas fermée dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 (applications propres). Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On dit que f est *propre* si pour tout compact $K \subseteq \mathbb{R}^n$, l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est compact.

1. Miontrer que, si f est propre, alors l'image par f de tout fermé de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.
2. Établir l'équivalence suivante : l'application f est propre si et seulement si elle a la propriété :

$$\|f(x)\| \to \infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \to \infty \,.$$

Exercice 7 (boule unité fermée non compacte). Soit $E = C\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ munies de la norme uniforme. Montrer que la boule unité fermée dans E n'est pas compacte.

Exercice 8 (suite décroissante de compacts). Soit $(K_n)_{n \geqslant 1}$ une suite décroissante de compacts d'un evn E, c'est-à-dire $K_{n+1} \subseteq K_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$, et soit $f : E \to F$ une application continue. Montrer que : $f\Big(\bigcap_{n \geqslant 1} K_n\Big) = \bigcap_{n \geqslant 1} f(K_n)$.

Exercice 9 (sous-groupes compacts). Montrer que les sous-groupes compacts du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ sont contenus dans le groupe multiplicatif des complexes de module 1.

Exercice 10. On conisdère dans $M_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices de déterminant égal à 1. Est-il compact ? Soit $O(n)$ le sous-groupe de GL_n des matrices orthogonales, c'est-à-dire telles que ${}^tA \cdot A = I$. Montrer que $O(n)$ est compact.

Exercice 11 (fermés emboîtés dans un espace complet). Soit X une partie complète d'un evn.

1. Montrer que l'intersection décroissante d'une suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ de parties fermées, non vides de X et dont le diamètre tend vers 0, a une intersection non vide.
2. Trouver un contre-exemple lorsqu'on ne suppose plus les parties F_n fermées, ou lorsque X n'est plus supposée complète.

Exercice 12. Soit ℓ_∞ l'espace des suites bornées à valeurs complexes, indexées par $\mathbb{N}$. Si $u \in \ell_\infty$, on note $\big(u(n)\big)_{n\geqslant 0}$ la suite des valeurs complexes que prend u. On munit ℓ_∞ de la norme infinie

$$\|u\|_\infty = \sup\big\{|u(n)| \;:\; n \geqslant 0\big\}\,.$$

1. Montrer que ℓ_∞ est un espace complet.
2. Soit F l'ensemble des suites qui admettent une limite dans $\mathbb{C}$. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de ℓ_∞. Montrer que F est un fermé de ℓ_∞.
3. Soit E l'ensemble des suites complexes indexées par $\mathbb{N}$ et tendant vers 0. Montrer que E est un sous-espace vectoriel fermé de ℓ_∞ (et de F). En déduire que E est complet (*indication :* soit utiliser par définition, soit construire une application linéaire continue $F \to \mathbb{C}$).

Exercice 13 (un espace normé non complet). Soit $X = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour f dans X on définit

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|dt\,.$$

1. Vérifier que N_1 définit une norme sur X.
2. Dans cette question on montre que (X, N_1) n'est pas complet.
   (a) Soit la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par $f_n(t) = \inf\big(\frac{1}{\sqrt{t}}, n\big)$ sur $[0,1]$. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy.
   (b) Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ n'a pas de limite dans X. *Indication :* remarquer que, si $g \in X$ est la fonction définie par $g(t) = 1/\sqrt{t}$ sur $]0,1]$, et par exemple $g(0) = 0$, on a : $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \big|f_n(t) - g(t)\big|\,dt = 0$. En déduire que, si $(f_n)_{n\geqslant 1}$ avait une limite f dans X, on aurait $\int_0^1 \big|f(t) - g(t)\big|\,dt = 0$, et conclure.

Exercice 14. Soit ℓ^1 l'espace des suites à valeurs complexes, indexées par $\mathbb{N}$, et absolument convergentes, c'est-à-dire telles que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u(n)| < \infty\,.$$

On munit ℓ^1 de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par :

$$\forall u \in \ell^1 \quad \|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u(n)|\,.$$

Montrer que $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ est complet.

Exercice 15. Soit ℓ^2 l'espace des suites à valeurs réelles, indexées par $\mathbb{N}$, et telles que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u(n)^2 < \infty\,.$$

On munit ℓ^2 de la norme $\|\cdot\|_2$ définie par :

$$\forall u \in \ell^2 \quad \|u\|_2 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} u(n)^2\right]^{1/2} .$$

Montrer que $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ est complet.

Exercice 16. Soit $E = \ell_2$ l'espace des suites à valeurs réelles de carré sommable, muni de la norme $\|\cdot\|_2$.

1. On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de E. Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'élément u_n est défini par :
$$u_n = (1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, 0, 0, \ldots) .$$
Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente dans ℓ_2 et déterminer sa limite. Attention, il ne s'agit pas seulement de regarder la limite *simple* de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
2. On considère maintenant $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :
$$u_n = (1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, \ldots, 1/\sqrt{n}, 0, 0, \ldots) .$$
Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas convergente dans ℓ_2 .

Exercice 17. Soient E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et L le sous-ensemble de E formé des applications lipschitziennes. Pour f dans L on pose

$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{x\neq y}\left(\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}\right)$$

a) Montrer que L est un sous-espace vectoriel de E.

b) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur L.

c) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy dans $(L, \|\cdot\|)$.

 i) Montrer que la suite $(f_n(0))$ est convergente.

 ii) En déduire que la suite (f_n) converge uniformément dans E.

 iii) Si f est la limite uniforme de $(f_n)_n$, montrer que $f \in L$ et montrer que f est aussi la limite de $(f_n)_n$ pour la norme $\|\cdot\|$. Conclure que $(L, \|\cdot\|)$ est un espace complet.

Exercice 18. Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

$$\forall n \geqslant 0 \quad \int_a^b t^n f(t)\, dt = 0$$

Montrer que $f = 0$ sur $[a,b]$.

Exercice 19. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$ n'est pas limite uniforme de polynômes sur $\mathbb{R}$.