Feuille d'exercices n° 5

Fonctions dérivables

Exercice 1. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $]a, +\infty[$. Montrer que :

1. Si $\lim_{t\to\infty} f'(t) = +\infty$, alors $\lim_{t\to\infty} f(t)/t = +\infty$.
2. Si $\lim_{t\to\infty} f'(t) = 0$, alors $\lim_{t\to\infty} f(t)/t = 0$.
3. Si $\lim_{t\to\infty} f'(t) = l$ avec $l \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim_{t\to\infty} f(t)/t = l$.

Exercice 2. Soit f une fonction à valeurs réelles et définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, et dérivable sur un intervalle ouvert centré en t_0 . On suppose que f' est continue en t_0 . Quelle est la limite suivante, si elle existe ?

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(t_0,t_0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Exercice 3 (erreur dans l'approximation de Lagrange). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n, $n \geqslant 2$. On suppose qu'il existe n points distincts $x_1 < x_2 \cdots < x_n$ tels que $f(x_i) = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que, pour tout $x \in I$, il existe un point $c \in I$ tel que :

$$f(x) = f^{(n)}(c)\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)\,.$$

Soit $x \in I$ avec $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$, et soit M tel que : $f(x) = M \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$. On pose :

$$g(y) = f(y) - M\prod_{i=1}^{n}(y - x_i)\,.$$

1. Montrer par récurrence sur k et en utilisant le théorème de Rolle que $g^{(k)}$ s'annule en $n + 1 - k$ points distincts de I. Préciser les valeurs pour l'entier k.
2. Montrer que si la dérivée d'ordre n de g s'annule en c, alors $f^{(n)}(c) = n!M$. Conclure.

Exercice 4. Soit E un evn de dimension finie. On note $L(E)$ l'espace des applications linéaires de E dans lui-même. Soit $A \in L(E)$ et J un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la série $\sum \frac{t^n}{n!}A^n$ converge normalement dans $C^0(J, L(E))$, où $C^0(J, L(E))$ est muni de la norme de la convergence uniforme. On note $\exp(tA)$ la somme de cette série.
2. Montrer que la fonction $F : t \mapsto \exp(tA)$ est de classe C^1 et que $F'(t) = A\exp(tA)$.
3. En déduire que pour tout $x \in E$, la fonction $f : t \mapsto \exp(tA).x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que $f'(t) = A.f(t)$ pour tout t. Quelle équation différentielle a-t-on résolu ?

Exercice 5. Soit E un evn, soit I et J des intervalles de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to E$ des fonctions telles que :

$$f(I) \subseteq J\,.$$

On considère un point $a \in I$.

1. Montrer que si g est dérivable en $f(a)$ et si $f'_d(a)$ existe, alors $g \circ f$ admet une dérivée à droite en a, qu'on calculera.
2. On suppose maintenant que g est dérivable à droite en $f(a)$ et que f est dérivable en a. Montrer que si $f'(a) > 0$ alors $g \circ f$ admet une dérivée à droite, qu'on calculera. Traiter le cas où $f'(a) < 0$.
3. On suppose que $f'(a) = 0$. Montrer que si g admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = 0$. Exemple : $g(u) = |u|$.