Feuille d'exercices n° 6

Fonctions différentiables

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0.$$

1. Étudier la continuité et la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\partial^2 f/\partial x\partial y(0,0)$ et $\partial^2 f/\partial y\partial x(0,0)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

1. Montrer que $x \in E \mapsto \langle x, x\rangle$ est différentiable sur E, et préciser sa différentielle.
2. En déduire que $x \mapsto \|x\|$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$, et préciser sa différentielle.
3. Plus généralement, si $B : E \times E \to \mathbb{R}$ est une application bilinéaire, quelle est la différentielle de $x \in E \mapsto B(x,x)$?

Exercice 3. Soit $\|\cdot\|_\infty$ la norme du max sur $\mathbb{R}^2$. En quels points de $\mathbb{R}^2$ la fonction $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \|x\|_\infty$ est-elle différentiable ?

Exercice 4. Soit $B : E \times E \to F$ une application bilinéaire, où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$.

1. Montrer que B est différentiable sur $E \times E$, de différentielle :

$$dB(x_1,x_2).(h_1,h_2) = B(x_1,h_2) + B(h_1,x_2)\,.$$

2. Retrouver le résulat de la question 1 de l'exercice 2.

Exercice 5. Soit $Mat_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles carrées d'ordre n, et I la matrice identité.

1. Montrer que l'application $f : Mat_n(\mathbb{R}) \to Mat_n(\mathbb{R})$ définie par $f(X) = X^2$ est différentiable en tout $X \in Mat_n(\mathbb{R})$, de différentielle donnée par

$$df(X).H = XH + HX\,.$$

2. Soit $A = \{X \in Mat_n(\mathbb{R}) \ : \ X^2 = I\}$. Montrer que I et $-I$ sont des points isolés de A (on dit que $x \in A$ est un point isolé de A s'il existe $r > 0$ tel que $A \cap B(x,r) = \{x\}$).
3. Le point $J = \mathrm{Diag}(1,\dots,1,-1)$ est-il isolé dans E ?

Exercice 6. Soit $U = GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ inversibles. On rappelle que U est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $X \mapsto X^{-1}$ est différentiable sur U. On pourra utiliser la série de Neumann $\sum_{k=0}^{\infty} H^k$ qui est uniformément convergente sur toute boule fermée $\overline{B}(0,r)$ avec $r < 1$.

Exercice 7. Soit E l'espace des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2. Montrer que l'application $\Phi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(f) = \int_a^b \varphi\big(f(x)\big)\,dx$$

est différentiable, et préciser sa différentielle. On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\varphi(v) = \varphi(u) + (v-u)\varphi'(u) + (v-u)^2 \int_0^1 (1-r)\varphi''\big(u + r(v-u)\big)\,dr\,.$$

Exercice 8. Soit E l'espace des application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornées et de classeéC^2 . On fixe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ et telle que $\|g^{(n)}\|_\infty < \infty$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Montrer que les applications $G : E \to E$ définies ci-dessous sont différentiables, et indiquer leurs différentielles :

$$G(f) = f \circ g\,, \qquad\qquad G(f) = g \circ f\,.$$

Exercice 9 (identité d'Euler pour les fonctions homogènes). Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en tout point, et soit k une constante réelle. On dit que f est *homogène de degré* k si $f(tx) = t^k f(x)$ pour tout $t > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1. Montrer que f est homgène de degré k si et seulement si elle vérifie l'identité d'Euler :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = kf(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. *Indication :* on pourra dériver, à x fixé, la fonction $t \mapsto f(tx)$.

2. Vérifier l'homogénéité des fonctions suivantes :

$$(x, y) \mapsto \sqrt{x+y},\ \text{pour } x + y \geqslant 0 \qquad\qquad (x, y) \mapsto \arctan \frac{y}{x}$$

3. Si f est de classe C^1 et k-homogène, montrer que df est $(k-1)$-homogène. *Indication :* à t fixé, on pourra différencier l'application $x \mapsto f(tx)$.