ENS Cachan
M1 mathématiques — Arithmétique - 2014-2015

Exercices - Feuille 4

I. Factorisation

1. Factoriser l'idéal $(p) \subset O_K$ et préciser le degré f_i des extensions résiduelles $[O_K/\mathfrak{p}_i : \mathbb{F}_p]$.
   1. $p = 2, 3, 5, 19$; $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.
   2. $p = 2, 3$; $K = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$.
   3. $p = 2, 3$; $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ avec $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
2. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt{13})$. On admet le fait que $O_K = \mathbb{Z}[\sqrt{7}, \frac{\sqrt{13}-1}{2}]$.
   1. Montrer que 3 se décompose complètement dans K.
   2. Montrer pour tout $\alpha \in O_K$ que 3 divise $\alpha^3 - \alpha$.
   3. Montrer que $\{1, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\}$ ne peut jamais être une $\mathbb{Z}$-base de O_K, alors $O_K \neq \mathbb{Z}[\alpha]$ pour tout α.

II. Groupe de classes

Rappel. Soit K un corps de nombres de discriminant Δ_K, de degré $n = r_1 + 2r_2$. La constante (faible) de Minkowski est$c = (2/\pi)^{r_2}\sqrt{|\Delta_K|}$. Une telle constante nous permet de déduire la finitude du groupe de classes d'un corps de nombres. En fait, on obtiendra encore plus de informations sur les groupes de classes :
1. Montrer en utilisant le constant ci-dessus que le groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ est trivial, autrement-dit $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ est un anneau principal.
2. Montrer que le groupe de classes de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est trivial., $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est alors un anneau principal.
3. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. Factoriser $(2) \subset O_K$, montrer que un idéal au-dessus de 2 n'est pas principal. Montrer que $Cl(K) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
4. Montrer que $Cl(\mathbb{Q}(\sqrt{-13})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
5. Soit K un corps de nombres. Admettons le fait qu'un premier p est ramifié dans K si et seulement s'il divise le discriminant Δ_K, montrer qu'il existe au mois un premier p qui est ramifié dans K si $[K : \mathbb{Q}] > 1$. [*indication.* D'après la formule de Stirling, $n! \leq \frac{13}{12}\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ si $n > 1$. La constant de Minkowski $c = \frac{n!}{n^n}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2}\sqrt{|\Delta_K|}$. Vous pouvez utiliser votre calculatrice.]

Remarque. En général, il peut exister une extension (de corps de nombres) K/k non-triviale totalement non-ramifiée si $k \neq \mathbb{Q}$.