

NOM :  
PRÉNOM :

L3 MATH  
2014-2015

**Algèbre II**  
**Contrôle du 10 février 2015**  
**durée : 30 minutes**

*Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits durant l'épreuve.*

**Exercice 1**

Soit  $\overline{\mathbb{Q}} = \{a \in \mathbb{C} \mid a \text{ est un élément algébrique sur } \mathbb{Q}\}$ .

- (1) Montrer que si  $a \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$  alors  $a^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}$ .
- (2) Soient  $a, b \in \overline{\mathbb{Q}}$ , montrer que  $\mathbb{Q}(a, b)$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}$ .
- (3) En déduire que  $\overline{\mathbb{Q}}$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .
- (4) Quel est le degré de l'extension  $\overline{\mathbb{Q}}$  de  $\mathbb{Q}$ ?

**Exercice 2**

Soit  $(A, +, \cdot, 0_A, 1_A)$  un anneau commutatif unitaire.

- (1) Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux unitaires  $\varphi$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $A$ .
- (2)
  - (a) Montrer qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\ker(\varphi) = n\mathbb{Z}$ .
  - (b) Comment appelle-t-on cet entier  $n$  ?
  - (c) On suppose maintenant que  $A$  est un corps. Montrer que  $n$  est nul ou un nombre premier.