Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

MI4– Année 2014/15
L2 MI4

Feuille d'exercices n°1 : Arithmétique dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Exercice 1 (relation d'équivalence) Soient E un ensemble et $\sim$ une relation sur E. Supposons que $\sim$ est symétrique et transitive, autrement-dit

– pour tout $x, y \in E$, $x \sim y$ implique $y \sim x$;
– pour tout $x, y, z \in E$, $x \sim y$ et $y \sim z$ implique $x \sim z$.

Supposons aussi que pour tout $x \in E$ il existe $w \in E$ tel que $x \sim w$. Montrer que $\sim$ est aussi réflexive : pour tout $x \in E$ on a $x \sim x$, alors $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

Écriture des nombres entiers, réels

Exercice 2 (*Bases de numération*)

1. Soit $b \geq 2$ un entier. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ il existe un unique entier $k \geq 0$ et une unique suite $(a_0, \ldots, a_k)$ avec $a_k \neq 0$, tels que :
$$n = a_0 + a_1 b + \ldots + a_k b^k\,, \quad \text{et } 0 \leq a_i < b \text{ pour } i = 0, \ldots, k.$$
2. Donner l'écriture en base 16 de $n = 331$.
3. Donner un algorithme de passage de l'écriture décimale (c'est-à-dire, en base 10) d'un nombre à son écriture en base b.

Enfin, justifiez l'affirmation suivante : le nombre de "chiffres" nécessaires pour écrire un nombre entier n est proportionnel à $\log n$.

Exercice 3 * (*Écriture décimale ou b-imale*) Soit $b \geq 2$ un entier et $a_0, a_1, a_2, \ldots$ une suites d'entiers avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq a_i \leq b - 1$ pour $i \geq 0$.

1. Montrer que la suite définie par
$$x_n := a_0 + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \cdots + \frac{a_n}{b^n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{b^j}$$
est croissante et convergente. Vérifier que la limite x appartient à l'intervalle $[a_0, a_0 + 1]$.
2. Inversement, si x est un réel dans l'intervalle $[a_0, a_0 + 1[$, montrer qu'il existe une suite $a_1, a_2, \ldots$ telle que $x = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{b^j}\right)$. On dit qu'on obtient ainsi le *développement b-imal* de x.
3. Considérons les deux suites a_j et a'_j telles que $a_j = a'_j$ pour $j < n_0$, mais $a_{n_0} = a'_{n_0} + 1$ et, pour $j > n_0$ on a $a_j = 0$ et $a'_j = b - 1$. Montrer que les deux suites sont associées au même nombre réel (qui est en fait un nombre rationnel de la forme A/b^{n_0}).

4. Montrer que le développement b-imal d'un nombre réel est unique, sauf dans le cas mentionné à la question précédente.

Nombres premiers et factorisation

Exercice 4

1. La différence de deux nombres est 538. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 13 et le reste 22. Quels sont ces nombres ?
2. On divise un entier positif a inférieur à 85 par un entier positif b. Le quotient est 3 et le reste est 19. Quelles sont les valeurs possibles de a et b ?

Exercice 5

1. Donner la liste des entiers positifs qui divisent 100.
2. Combien le nombre 6000000 a-t-il de diviseurs positifs ?

Exercice 6 Trouver le pgcd et le ppcm de $a = 2^3 \times 3^5 \times 7^2$ et $b = 2 \times 5^2 \times 7^3$.

Exercice 7 On veut démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. On propose les deux méthodes suivantes.

1. Supposons qu'il existe des entiers positifs a, b tels que $\sqrt{3} = a/b$. Montrer que $a/b = 3b/a = (3b-a)/(a-b)$. Vérifier que $0 < 3b - a < a$. En déduire qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) d'entiers positifs tels que pour tout n, $\sqrt{3} = a_n/b_n$ et $a_{n+1} < a_n$, d'où une contradiction.
2. Donner une autre preuve de l'irrationnalité de $\sqrt{3}$ en décomposant a et b en produit de facteurs premiers dans l'égalité $3b^2 = a^2$. [Indication : on regardera en particulier l'exposant de 3 dans la décomposition en facteurs premiers de a et b.]

Exercice 8 Soit n un entier tel que $10 \leq n \leq 100$. Montrer que n est un nombre premier si et seulement si $\mathrm{pgcd}(n, 210) = 1$.

Exercice 9

1. Décomposer $10\,!$ en produit de facteurs premiers.
2. Trouver la plus grande puissance de 2 qui divise $100\,!$ *Indication :* compter le nombre des multiples de 2 qui sont ≤ 100, puis le nombre des multiples de 4, puis le nombre des multiples de 8, etc. . .
3. Trouver le nombre de zéros qui figurent à la fin de l'écriture décimale de $100\,!$.

Exercice 10 (Nombres de Mersenne)

1. Soient b et n des entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que $b^n - 1$ est multiple de $b - 1$.
2. Soient a et k des entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose que $a^k - 1$ est un nombre premier. Montrer que $a = 2$ et que k est un nombre premier.

3. Soit p un nombre premier tel que $p \leq 7$. Montrer que $2^p - 1$ est un nombre premier.
4. Vérifier que 23 divise $2^{11} - 1$. Conclure que si p est un nombre premier, alors $M_p := 2^p - 1$ n'est pas nécessairement premier.
5. On définit un nombre *parfait* comme un nombre égal à la somme de ses diviseurs propres, c'est-à-dire vérifiant

$$n = \sum_{d \,|\, n,\, d<n} d \qquad \text{ou encore} \qquad 2n = \sum_{d \,|\, n} d.$$

   Montrer que si $M_p = 2^p - 1$ est premier, alors le nombre $N_p = 2^{p-1} M_p$ est parfait.
6. * Montrer que si n est pair et parfait alors il est de la forme N_p.[1]

Exercice 11 (Nombres de Fermat)

1. Soient b et n des entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que si n est impair, alors $b^n + 1$ est multiple de $b + 1$.
2. Montrer que si $2^n + 1$ est un nombre premier, alors n est une puissance de 2.
3. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que $F_0, \ldots, F_4$ sont premiers mais que F_5 est composé (il est divisible par 641).

Exercice 12 Soit n un entier positif. Soit $a > 1$ un diviseur entier de $n! + 1$. Montrer que $a > n$. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 13 Soit n un entier ≥ 1. Montrer qu'il existe n nombres entiers consécutifs qui ne sont pas premiers. *Indication :* considérez $(n+1)! + 2$, $(n+1)! + 3, \ldots$

Exercice 14 Soit a et b deux entiers premiers entre eux (i.e. $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$). On suppose que $ab = c^2$. Montrer que a et b sont eux-mêmes des carrés au signe près.

Exercice 15 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$$x - 1 \mid x + 3 \tag{1}$$
$$x + 2 \mid x^2 + 2 \tag{2}$$

Exercice 16 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

$$xy = 3x + 2y \tag{3}$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \tag{4}$$

1. Cette question est plus difficile (le résultat est dû à Euler) ; on ignore s'il existe un nombre parfait impair.

Exercice 17 Résoudre les équations suivantes en nombres entiers.
(1) $37x + 53y = 1$
(2) $37x + 21y = -1$

Exercice 18 Soient a, b, c des entiers relatifs, où a et b ne sont pas tous les deux nuls. Montrer que l'équation $ax + by = c$ admet des solutions entières si et seulement si c est un multiple du pgcd de a et b.

Exercice 19

1. Calculer le pgcd de 637 et 595.
2. Trouver les entiers x et y tels que $637x + 595y = 91$.
3. Trouver les entiers x et y tels que $637x + 595y = 143$.

Exercice 20 Résoudre les équations suivantes en nombres entiers :

1. $283x + 1722y = 31$.
2. $365x + 72y = 18$.
3. $101x + 150y = 15$
4. $282x + 678y = 66$.

Exercice 21 Soient a et b des entiers non tous les deux nuls.

1. Montrer que pour tout entier x, $\mathrm{pgcd}(a, b + ax) = \mathrm{pgcd}(a, b)$.
2. Montrer que si x est un entier positif, $\mathrm{pgcd}(xa, xb) = x\,\mathrm{pgcd}(a, b)$.
3. Montrer que si x est un entier positif tel que $\mathrm{pgcd}(x, b) = 1$, alors $\mathrm{pgcd}(ax, b) = \mathrm{pgcd}(a, b)$.

Exercice 22

1. Soit n un entier. (a) Déterminer le pgcd de $9n + 15$ et $4n + 7$ en fonction de n.
2. Montrer que n^2 et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 23 * Considérons les polynômes en x à coéfficients dans $\mathbb{Q}$.
Trouver $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tels que $(x^3+2x^2+2x+1)\cdot f(x)+(x^2+1)\cdot g(x) = 1$.