

Feuille de TD n° 4
Commutants d'endomorphismes

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel de dimension n sur K et $f \in \mathcal{L}(E)$. Notons $C(f) \subset \mathcal{L}(E)$ le sous-ensemble des endomorphismes g tel que $g \circ f = f \circ g$.

- (1) Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
- (2) Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme inversible. Montrer que $h \circ C(f) \circ h^{-1} = C(h \circ f \circ h^{-1})$.
- (3) Soit $h \in C(f)$, montrer que les sous-espaces $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par h . En déduire que h stabilise les espaces propres de f .
- (4) Montrer que $\{P(f); P \in K[X]\} \subseteq C(f)$.
- (5) Donner un f tel que $\{P(f); P \in K[X]\} \neq C(f)$.
- (6) Soit f un endomorphisme diagonal dont les valeurs propres sont toutes distinctes. Montrer que $C(f) = \{\text{endomorphismes diagonaux}\}$.
- (7) Soit f un endomorphisme diagonal dont les valeurs propres sont toutes distinctes. Montrer que $\{P(f); P \in K[X]\} = C(f)$.
- (8) Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Soit $J_n \in \mathcal{L}(E)$ tel que $J_n(e_1) = 0$ et $J_n(e_k) = e_{k-1}$ pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$. Montrer que $\{P(J_n); P \in K[X]\} = C(J_n)$.
- (9) En déduire que les endomorphismes qui commutent avec tout $f \in \mathcal{L}(E)$ sont les homothéties. Autrement dit,

$$\bigcap_{f \in \mathcal{L}(E)} C(f) = K.$$

- (10) Soient $n = 2$ et J_2 comme ci-dessus. Construire $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h \notin C(J_2)$ mais h stabilise les espaces propres de J_2 .