

Feuille de TD n° 5
Transvections, dilatations

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On rappelle qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E) \setminus \{id_E\}$ est une transvection s'il existe un hyperplan (passant par 0_E) H tel que

- $f|_H = id_H$,
- $f(x) - x \in H$ pour tout $x \in E$.

- (1) Déterminer le polynôme minimal d'une transvection. Trouver les valeurs propres d'une transvection. Une transvection est-elle diagonalisable ?
- (2) Une projection sur un sous-espace vectoriel donné est-elle une transvection ?
- (3) Parmi les endomorphismes correspondant aux matrices suivantes, lesquels sont des transvections ? Déterminer leurs polynômes minimaux. Le polynôme minimal caractérise-t-il une transvection ?

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 8 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 7 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 8 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & 3 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

- (4) Soient f et g deux transvections distinctes. Est-ce que $f + g$ peut être une transvection ? Donner un exemple tel que $f \circ g$ est une transvection. Donner un autre exemple tel que $f \circ g$ n'est pas une transvection.
- (5) Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Soient $v = \sum a_i e_i \in E$ avec $a_i \in K$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par $f(e_i) = e_i$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et $f(e_n) = v$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les a_i pour que f soit une transvection.
- (6) Soit f un endomorphisme dont la matrice dans une certaine base est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Écrire f comme un produit de certaines transvections et d'un endomorphisme diagonal. Même question pour $N = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.
- (7) Soit f un endomorphisme dont la matrice dans une base \mathcal{B} de E est $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in GL_2(K)$ avec $a \neq 1$. Écrire f comme un produit de certaines transvections et de l'endomorphisme dont la matrice dans la base \mathcal{B} est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit K un corps. Pour tous $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in K^*$, on définit la matrice

$$B_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij} \in \mathcal{M}_n(K),$$

où la matrice E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la ligne i et colonne j qui vaut 1.

Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice de $SL_n(K)$ peut s'écrire comme le produit de matrices $B_{ij}(\lambda)$.

(1) Soit $A \in \text{GL}(n, K)$. Que font les opérations suivantes sur les lignes et les colonnes de A ?

$$B_{ij}(\lambda)A \quad \text{et} \quad AB_{ij}(\lambda).$$

(2) Calculer les produits matriciels $B_{ij}(1)B_{jj}(-1)B_{ij}(1)$ et $B_{ij}(-1)B_{jj}(1)B_{ij}(-1)$.

(3) Soit $A \in \text{SL}(n, K)$.

(a) Montrer qu'en multipliant A par des matrices de la forme $B_{ij}(\lambda)$, on peut obtenir une matrice contenant un coefficient 1. (*Indication : on pourra distinguer deux cas, selon qu'il existe une ligne ou une colonne de A contenant deux coefficients non nuls, ou si toute ligne ou colonne de A ne contient qu'au plus un coefficient non nul.*)

(b) en multipliant A par des matrices de la forme $B_{ij}(\lambda)$, on peut obtenir une matrice contenant un coefficient 1 en première ligne et première colonne.

(c) en multipliant A par des matrices de la forme $B_{ij}(\lambda)$, on peut obtenir une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \tilde{A} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

(4) Montrer par récurrence que toute matrice $A \in \text{SL}(n, K)$ peut s'écrire comme un produit de matrices de transvection $B_{ij}(\lambda)$.

(5) Avec cette méthode, combien de matrices $B_{ij}(\lambda)$ au plus sont-elles nécessaires pour décomposer A ?

(6) Montrer que toute matrice de $\text{GL}(n, K)$ se décompose en un produit de transvections et d'une dilatation.

(7) (a) Faire le lien entre ce qui précède et la méthode du pivot de Gauss.

(b) Décomposer les matrices suivantes $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ en produit de transvections et $B \in \text{GL}(n, K)$ en produits de transvections et d'une dilatation :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre minimal de transvections nécessaires pour écrire un élément du groupe spécial linéaire.

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $u \in \text{SL}(E)$. Notons

$$F_u = \{x \in E \mid u(x) = x\}$$

le sous-espace vectoriel des points fixes de u , et $p_u = n - \dim F_u \in \mathbb{N}$.

(1) Soit (e_1, \dots, e_{n-p}) une base de F_u . On la complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Notons $G_u = \text{Vect}(e_{n-p+1}, \dots, e_n)$.

(a) Montrer que la matrice de u dans la base \mathcal{B} est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} I_{n-p} & B \\ \hline 0 & A \end{array} \right),$$

avec $A \in \text{SL}(p, K)$.

(b) Rappeler pourquoi G_u est un supplémentaire de F_u . Notons u_F et u_G les deux endomorphismes de E tels que pour tout $x \in E$,

$$u(x) = u_F(x) + u_G(x), \quad \text{et} \quad u_F(x) \in F_u \quad \text{et} \quad u_G(x) \in G_u.$$

Montrer que A est la matrice de l'application \bar{u} égale à u_G restreinte à G_u dans la base (e_1, \dots, e_p) .

- (2) On suppose $u \neq id$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
- (i) \bar{u} est une homothétie de rapport $\lambda \neq 1$.
 - (ii) Il existe une base de G_u dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \lambda \neq 1.$$

On appelle *exceptionnel* un élément $u \in \text{SL}(E)$ tel que $u \neq id$ vérifiant (i) et (ii).

- (3) (a) Dans le cas $n = 2$, quels sont les éléments exceptionnels de $\text{SL}(E)$?
 (b) Peut-il exister $u \in \text{SL}(E)$ exceptionnel avec $p_u = 1$?
 (c) Soit u une homothétie et τ une transvection. Calculer $p_{\tau u}$. En déduire que τu n'est pas exceptionnel.
- (4) Pour tout $u \in \text{SL}(E)$, on pose $m_u = \min\{m \in \mathbb{N} \mid u = \tau_1 \dots \tau_m, \text{ avec } \tau_1, \dots, \tau_m \text{ transvections}\}$.
 Si $u = id$, on considère par convention $m_u = 0$.
 (a) Montrer l'inégalité $m_u \geq p_u$.
 (b) Montrer que si u est exceptionnel $m_u \geq p_u + 1$.
- (5) On suppose $n = \dim E \geq 3$ et on suppose que u n'est pas une homothétie.
 (a) Montrer qu'il existe $a, b, c \in E$ linéairement indépendants tels que
 (A) $u(b) = c$,
 (B) $u(a) \notin \text{Vect}(a, c)$.
 (b) On suppose $u \neq id$ et u non exceptionnelle. On suppose que \bar{u} n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe une transvection τ telle que $F_u \subsetneq F_{\tau u}$ et $p_{\tau u} = p_u - 1$. (*Indication : On pourra prendre $b \in E$ tel que b_G ne soit pas vecteur propre pour \bar{u} et, si $c = u(b)$, prendre une transvection de droite engendrée par $b - c$.)*
 (c) Avec les mêmes notations qu'à la question précédente, montrer qu'on peut trouver une transvection τ telle que τu ne soit pas exceptionnel. *Indication : On pourra distinguer les cas $p_u = 2$ et $p_u > 2$. Si $p_u > 2$, imposer à l'hyperplan de τ de contenir un élément a tel que $\bar{u}(a_G) \notin \text{Vect}(a_G, c_G)$.)*
 (d) On suppose $u \neq id$ et u non exceptionnelle. On suppose que \bar{u} est une homothétie. Vérifier que $\bar{u} = id$ et montrer qu'il existe une transvection τ telle que τu n'est pas exceptionnel et $F_u \subsetneq F_{\tau u}$.
- (6) Montrer par récurrence sur p_u que si u n'est pas exceptionnel, alors $m_u = p_u$.
- (7) Montrer que si u est une homothétie différente de l'identité, on a $m_u = n + 1$. En déduire que si u est exceptionnel, $m_u = p_u + 1$.