Université Paris Diderot
L3 mathématiques

Algèbre 2
année 2014-2015

Feuille de TD n^{o} 6

Groupe linéaire, suite
dualité

Exercice 1

Soit $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini. Montrer que

(1) $|\mathrm{GL}_n(k)| = (q^n - 1)(q^n - q)\cdots(q^n - q^{n-1})$,

(2) $|\mathrm{SL}_n(k)| = (q^n - 1)(q^n - q)\cdots(q^n - q^{n-2})q^{n-1}$,

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{PGL}_n(k)$ le groupe quotient de $\mathrm{GL}_n(k)$ par son centre. On l'appelle *groupe projectif linéaire* sur k. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{PSL}_n(k)$ le quotient de $\mathrm{SL}_n(k)$ par son centre. On l'appelle *groupe projectif linéaire* sur k.

(3) $|\mathrm{PGL}_n(k)| = (q^n - 1)(q^n - q)\cdots(q^n - q^{n-2})q^{n-1}$,

(4) $|\mathrm{PSL}_n(k)| = \frac{1}{d}(q^n - 1)(q^n - q)\cdots(q^n - q^{n-2})q^{n-1}$ où $d = \mathrm{pgcd}(n, q-1)$.

Exercice 2

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

(1) Montrer que $\mathrm{GL}(E)$ opère (de manière naturelle) sur l'ensemble $\mathbb{P}(E)$ des droites de E passant par 0. Cette action est-elle transitive ?

(2) Montrer que $\mathrm{PGL}(E)$ opère fidèlement sur $\mathbb{P}(E)$.

(3) En déduire que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$

(4) En déduire que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq S_4$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$. (Indication : A_4 est le seul sous-groupe de S_4 d'indice 2)

(5) En déduire que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq A_5$. (Indication : pour $n \geq 5$ les seules sous-groupes distingués/normaux de S_n sont 1, A_n et S_n)

(6) En déduire que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq S_5$ et que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq A_5$. (Indication : Tout sous-groupe d'indice n de S_n est isomorphe à S_{n-1}.

Exercice 3

Soient $E = K^3$ et $\mathcal{B} = \{\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base si $car(K) \neq 3$. Pour $i = 1, 2, 3$, soit $\phi_i(x) = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3$ une forme linéaire sur E. Trouver les a_i, b_i et c_i tels que $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} \subset E^*$ soit la base duale de $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Exercice 4

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie > 0. Pour tout $x \in E$ non nul, montrer qu'il existe $\phi \in E^*$ tel que $\phi(x) \neq 0$. En déduire l'existence de $\phi \in E^*$ tel que $\phi(x) \neq \phi(y)$ pour tout $x \neq y \in E$, autrement-dit les formes linéaires peuvent séparer les points de E.

Exercice 5

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie > 0. Soient $f, g \in E^*$ non nulles. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x)g(x) \in K^*$.

Exercice 6

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie > 0. Soient $f, g \in E^*$ telles que $\ker(f) = \ker(g)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in K^*$ tel que $f = \alpha g$.

Exercice 7

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une famille de vecteurs de E. Supposons que

$$\forall f \in E^*, f(e_1) = \ldots = f(e_n) = 0 \text{ entraîne } f = 0.$$

Montrer que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E.

Exercice 8

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soient $f_1, \ldots, f_n \in E^*$. Supposons qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $f_i(x) = 0$ pour tout i. Montrer que la famille $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset E^*$ est liée.

Exercice 9

Soit $E = K_n[t] = \{\text{polynômes de degré } \leq n\}$. Soient $a_0, \ldots, a_n \in K$ deux à deux distinct.

(1) On considère ϕ_i l'évaluation en a_i définie par $\phi_i(P) = P(a_i)$, montrer que $\phi_i \in E^*$ pour $i = 0, \ldots, n$.

(2) Montrer que la famille $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ est linéairement indépendante, en déduire que c'est une base de E^*.

(3) Trouver une base $\{e_0, \ldots, e_n\}$ de E telle que la base duale de E^* est $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$.

(4) Si $K = \mathbb{R}$, montrer qu'il existe des constants $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tels que $\int_0^1 P(t)dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(a_k)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[t]$.

Exercice 10

Soient F, G des K-espace vectoriels (pas nécessairement de dimension finie). Montrer que $F^* \times G^*$ est isomorphe au dual de $F \times G$.