Université Paris Diderot
L3 mathématiques

Algèbre 2
année 2014-2015

Feuille de TD n° 7
Formes hermitiennes

Exercice 1

(1) Les matrices hermitiennes de taille n forment-elles un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?

(2) Montrer qu'elles en forment un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel et calculer sa dimension.

Exercice 2

Pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on définit

$$<A, B> = \mathrm{Tr}(A^* \cdot B).$$

(1) Vérifier que $<\cdot,\cdot>$ est une forme hermitienne sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

(2) Calculer explicitement $<A, A>$ en fonction des coefficients de A et en déduire que la forme $<\cdot,\cdot>$ est définie positive.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{C}^3$ muni de sa structure hermitienne usuelle. Soit F le plan d'équation $x_1 - x_2 + ix_3 = 0$.

(1) Déterminer l'orthogonal de F.

(2) Donner la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

(3) Donner une base orthogonale de F.

Exercice 4

Pour tous $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$, on note

$$\phi(P, Q) = <P, Q> = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})} Q(e^{it}) dt.$$

(1) Montrer que ϕ définit un produit scalaire hermitien (c'est-à-dire une forme hermitienne définie positive) sur $\mathbb{C}_n[X]$.

(2) La famille $(1, X, \ldots, X^n)$ forme-t-elle une base orthonormée pour ϕ ?

(3) Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_0, ..., P_n)$ telle que $P_1(a) = ... = P_n(a) = 0$ et donner explicitement un $P_0 \in \mathbb{C}_n[X]$ qui convient.

(4) Calculer $\sup\{|P(0)|, P \in E \text{ tq } \|P\| = 1\}$, où $\|P\| = \sqrt{\phi(P, P)}$.

Exercice 5

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

(1) Montrer qu'il existe un unique couple de matrices hermitiennes (H, L) tel que $M = H + iL$.

(2) Montrer que M est normale (c'est-à-dire satisfait $M^*M = MM^*$) si et seulement si $HL = LH$.

Exercice 6

Soit (E, ϕ) un espace hermitien de dimension finie. Soient F un sous-espace vectoriel de E et $B = (u_1, u_2, ..., u_n)$ une base orthonormée de F.

(1) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$ (projection orthogonale de x sur F) et déterminer les coordonnées de y dans la base B.

(2) Montrer que la distance entre x et y, $\|x - y\| = \sqrt{\phi(x - y, x - y)}$, est égale à la distance de x à F, définie comme $\inf\{\|x - z\|,\ z \in F\}$.

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, soient Q une fome quadratique hermitienne définie positive sur E de forme polaire ϕ.

(1) Soient $x, y \in E$. En remarquant que pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\phi(x - ty, x - ty) \geqslant 0$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x, y \in E, \qquad |\phi(x, y)|^2 \leqslant Q(x)Q(y).$$

(2) Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si x et y sont liés.

(3) En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\forall x, y \in E, \qquad \sqrt{Q(x+y)} \leqslant \sqrt{Q(x)} + \sqrt{Q(y)}.$$